

北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期高二数学统练一

班级：_____ 学号：_____ 姓名：_____ 成绩：_____

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知直线 m , 直线 n 和平面 α , 则下列四个命题中正确的是 ()

- (A) 若 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel n$ (B) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$
 (C) 若 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \perp n$ (D) 若 $m \perp n, n \parallel \alpha$, 则 $m \perp \alpha$

2. 已知平面 α 的法向量为 $n = (-2, 1, 1)$, 若平面 α 外的直线 l 的方向向量为 $a = (1, 0, 2)$, 则可以推断 ()

- (A) $l \parallel \alpha$ (B) $l \perp \alpha$ (C) l 与 α 斜交 (D) $l \subset \alpha$

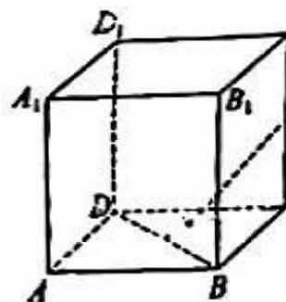
3. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° , 则 ()

- (A) $AD = AB$ (B) AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°
 (C) $AC = CB$ (D) B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

4. 已知正四棱锥 $P - ABCD$ 的高为 4, 棱 AB 的长为 2, 点 H 为侧棱 PC 上一动点, 那么 $\triangle HBD$ 面积的最小值为 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 已知棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, M 是 CC_1 的中点, N 是正方形 $ABCD$ 内 (包括边界) 的一个动点, 且 $MN \perp BD$, 则线段 MN 长度的取值范围是 ()



- (A) $[1, 2\sqrt{2}]$ (B) $[1, 3]$ (C) $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$ (D) $[\sqrt{3}, 3]$

6. 已知点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ 及 $P(1, -1, 0)$, 那么过点 P 平行于平面 ABC 的平面与平面 ABC 的距离是 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

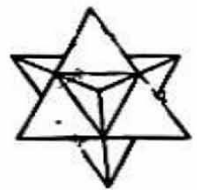
7. 已知空间中三点 $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-2, -1, 2)$, 则点 C 到直线 AB 的距离为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$, O 为底面圆心, PA, PB 为圆锥的母线, $\angle AOB = 120^\circ$, 若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, 则该圆锥的体积为 ()

- (A) π (B) $\sqrt{6}\pi$ (C) 3π (D) $3\sqrt{6}\pi$

9. 如图甲是一水晶饰品, 其对应的几何体叫星形八面体, 也叫八角星体, 是一种二复合四面体, 它是由两个有共同中心的正四面体交叉组合而成且所有面都是全等的小正三角形, 如图乙所示. 若一星形八面体中两个正四面体的棱长均为 2, 则该星形八面体体积为 ()



甲

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ (D) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

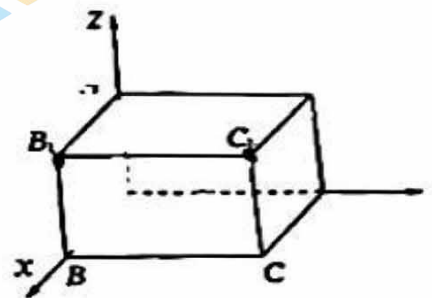
10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 M 为侧面 CC_1D_1D 的中心, 点 N 在棱 A_1B_1 上运动, 正方体表面 $A_1B_1C_1D_1$ 上有一点 P 满足 $\vec{AP} = x\vec{AM} + y\vec{AN}$ ($x \geq 0, y \geq 0$), 则所有满足条件的 P 点所构成图形的面积为 ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

11. 已知向量 $a = (x, 2, -1)$, $b = (2, 1, 0)$, $|a| = \sqrt{5}$, 则 $a \cdot b =$ _____.

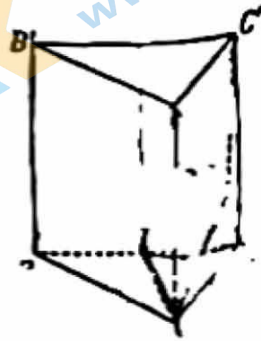
12. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 若 $\vec{AC_1} = (2, 2, 1)$, 则 B_1D 的坐标为 _____.



13. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 且 $PD = AB = 1$, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 PG 与底面 $ABCD$ 所成的角 θ 满足 _____.

- ① $\theta = \frac{\pi}{4}$; ② $\cos \theta = \frac{2\sqrt{34}}{17}$; ③ $\tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; ④ $\sin \theta =$

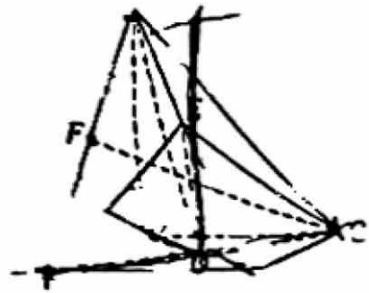
14. 如图, 直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的棱长均为 2, O 是 BC 中点, P 是侧面 $BB'C'C$ 内一点, 且 $PA = 2$, 则点 P 的轨迹长度为 _____; 当 PC' 的长取最小值时, 三棱锥 $O-PAA'$ 的体积为 _____.



15. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的菱形, 且 $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, $PD = AD$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, F, O 分别是 PA, BD 的中点, E 是线段 PB 上的动点, 给出下列四个结论:

- ① $AC \perp OE$;
 ② $FC = PO$;
 ③ 直线 PO 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$;
 ④ $\triangle AEC$ 面积的取值范围是 $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{15}]$.

其中所有正确结论的序号是 _____.



三、解答题共 3 小题, 共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题 10 分)

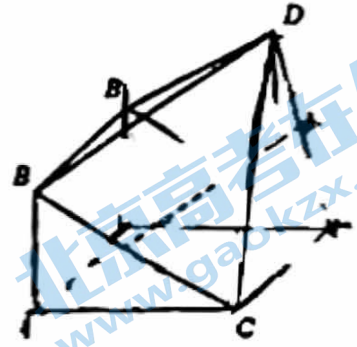
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD = DC = 2AD = 2$, E, F 分别是 PD, DC 的中点.

- (1) 求证: $PC \parallel$ 平面 AEF .
 (2) 求直线 PB 与平面 AEF 所成角的正弦值.



(本小题 15 分)

如图, 由直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $D - BB_1C_1C$ 构成的几何体中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 1$, $BC = BB_1 = 2$, $C_1D = CD = \sqrt{5}$, 平面 $CC_1D \perp$ 平面 ACC_1A_1 .



(1) 求证: $AC \perp DC_1$;

(2) 若 M 为 DC_1 中点, 求证: $AM \parallel$ 平面 DBB_1 ;

(3) 在线段 BC 上 (含端点) 是否存在点 P , 使直线 DP 与平面 DBB_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$? 若存在, 求 $\frac{BP}{BC}$ 的值, 若不存在, 说明理由.

18. (本小题 15 分)

对于三维向量 $a_k = (x_k, y_k, z_k)$ ($x_k, y_k, z_k \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, \dots$), 定义“ F 变换”: $a_{k+1} = F(a_k)$, 其中, $x_{k+1} = |x_k - y_k|$, $y_{k+1} = |y_k - z_k|$, $z_{k+1} = |z_k - x_k|$. 记 $\langle a_k \rangle = x_k y_k z_k$, $\|a_k\| = x_k + y_k + z_k$.

(1) 若 $a_0 = (3, 1, 2)$, 求 $\langle a_1 \rangle$ 及 $\|a_2\|$;

(2) 证明: 对于任意 a_0 , 经过若干次 F 变换后, 必存在 $K \in \mathbb{N}^*$, 使 $\langle a_K \rangle = 0$;

(3) 已知 $a_1 = (p, 2, q)$ ($q \geq p$), $\|a_1\| = 2024$, 将 a_1 再经过 m 次 F 变换后, $\|a_{m+1}\|$ 最小, 求 m 的最小值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

