

## 数 学

## 注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{(x, y) | x + y = 2\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = x^2\}$ , 则  $A \cap B =$   
 A.  $\{(1, 1)\}$       B.  $\{(-2, 4)\}$       C.  $\{(1, 1), (-2, 4)\}$       D.  $\emptyset$
2. 已知  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 是  $\frac{1-i}{1+i}$  的共轭复数，则  $a + b =$   
 A.  $-1$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $1$
3. 设向量  $a = (1, 1)$ ,  $b = (-1, 3)$ ,  $c = (2, 1)$ , 且  $(a - \lambda b) \perp c$ , 则  $\lambda =$   
 A.  $3$       B.  $2$       C.  $-2$       D.  $-3$
4.  $(\frac{1}{x} - x)^{10}$  的展开式中  $x^4$  的系数是  
 A.  $-210$       B.  $-120$       C.  $120$       D.  $210$
5. 已知三棱锥  $S - ABC$  中,  $\angle SAB = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ,  $SB = 4$ ,  $SC = 2\sqrt{13}$ ,  $AB = 2$ ,  $BC = 6$ , 则三棱锥  $S - ABC$  的体积是  
 A.  $4$       B.  $6$       C.  $4\sqrt{3}$       D.  $6\sqrt{3}$
6. 已知点  $A$  为曲线  $y = x + \frac{4}{x}$  ( $x > 0$ ) 上的动点,  $B$  为圆  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  上的动点, 则  $|AB|$  的最小值是  
 A.  $3$       B.  $4$       C.  $3\sqrt{2}$       D.  $4\sqrt{2}$
7. 设命题  $p$ : 所有正方形都是平行四边形, 则  $\neg p$  为  
 A. 所有正方形都不是平行四边形      B. 有的平行四边形不是正方形  
 C. 有的正方形不是平行四边形      D. 不是正方形的四边形不是平行四边形

8. 若  $a > b > c > 1$  且  $ac < b^2$ , 则

A.  $\log_a b > \log_b c > \log_c a$

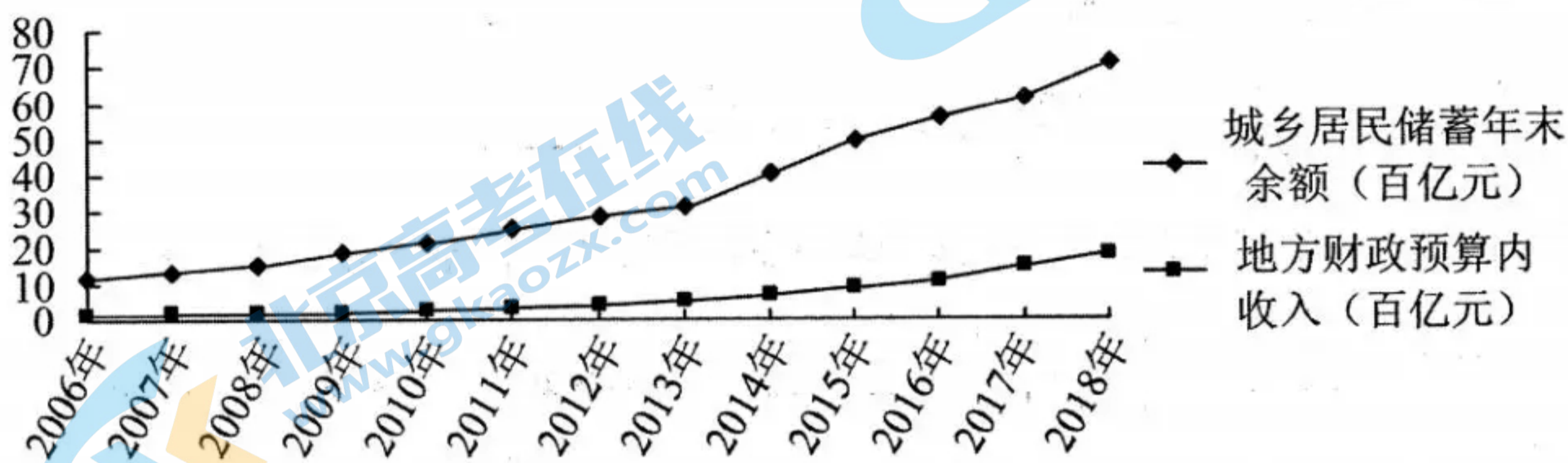
B.  $\log_c b > \log_b a > \log_a c$

C.  $\log_b c > \log_a b > \log_c a$

D.  $\log_b a > \log_c b > \log_a c$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9. 下图为某地区 2006 年 ~ 2018 年地方财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额折线图。



根据该折线图可知，该地区 2006 年 ~ 2018 年

A. 财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额均呈增长趋势

B. 财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额的逐年增长速度相同

C. 财政预算内收入年平均增长量高于城乡居民储蓄年末余额年平均增长量

D. 城乡居民储蓄年末余额与财政预算内收入的差额逐年增大

10. 已知双曲线  $C$  过点  $(3, \sqrt{2})$  且渐近线为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ , 则下列结论正确的是

A.  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

B.  $C$  的离心率为  $\sqrt{3}$

C. 曲线  $y = e^{x-2} - 1$  经过  $C$  的一个焦点

D. 直线  $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$  与  $C$  有两个公共点

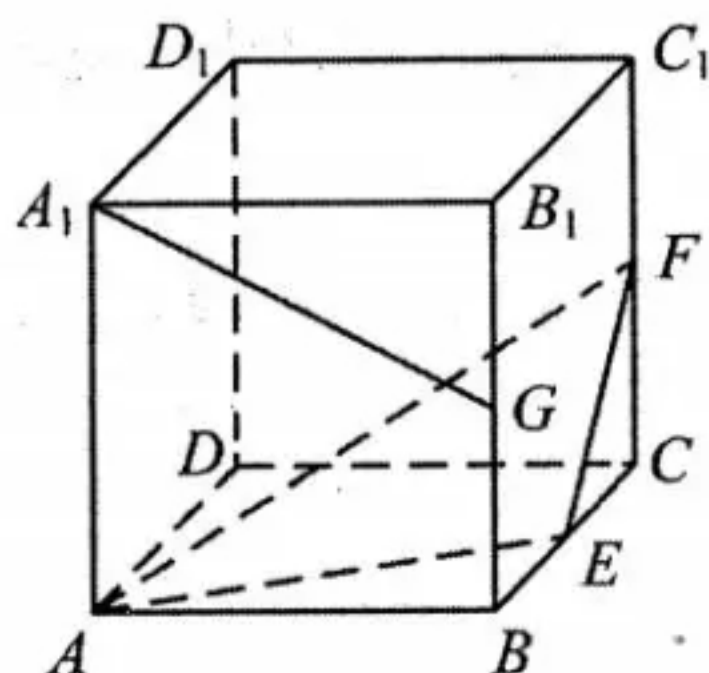
11. 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,  $E, F, G$  分别为  $BC, CC_1, BB_1$  的中点. 则

A. 直线  $D_1D$  与直线  $AF$  垂直

B. 直线  $A_1G$  与平面  $AEF$  平行

C. 平面  $AEF$  截正方体所得的截面面积为  $\frac{9}{8}$

D. 点  $C$  与点  $G$  到平面  $AEF$  的距离相等



12. 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，且  $f(x+1)$  与  $f(x+2)$  都为奇函数，则

A.  $f(x)$  为奇函数

B.  $f(x)$  为周期函数

C.  $f(x+3)$  为奇函数

D.  $f(x+4)$  为偶函数

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某元宵灯谜竞猜节目，有 6 名守擂选手和 6 名复活选手，从复活选手中挑选 1 名选手为攻擂者，从守擂选手中挑选 1 名选手为守擂者，则攻擂者、守擂者的不同构成方式共有\_\_\_\_\_种.

14. 已知  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ ，则  $\sin(\alpha + \frac{11\pi}{6}) =$ \_\_\_\_\_.

15. 直线  $l$  过抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点  $F(1, 0)$ ，且与  $C$  交于  $A, B$  两点，则

$p =$ \_\_\_\_\_,  $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} =$ \_\_\_\_\_. (本题第一空 2 分，第二空 3 分.)

16. 半径为 2 的球面上有  $A, B, C, D$  四点，且  $AB, AC, AD$  两两垂直，则  $\triangle ABC, \triangle ACD$  与  $\triangle ADB$  面积之和的最大值为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在①  $b_1 + b_3 = a_2$ ，②  $a_4 = b_4$ ，③  $S_5 = -25$  这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的  $k$  存在，求  $k$  的值；若  $k$  不存在，说明理由.

设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $\{b_n\}$  是等比数列，\_\_\_\_\_,  $b_1 = a_5, b_2 = 3,$

$b_5 = -81$ ，是否存在  $k$ ，使得  $S_k > S_{k+1}$  且  $S_{k+1} < S_{k+2}$ ？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分)

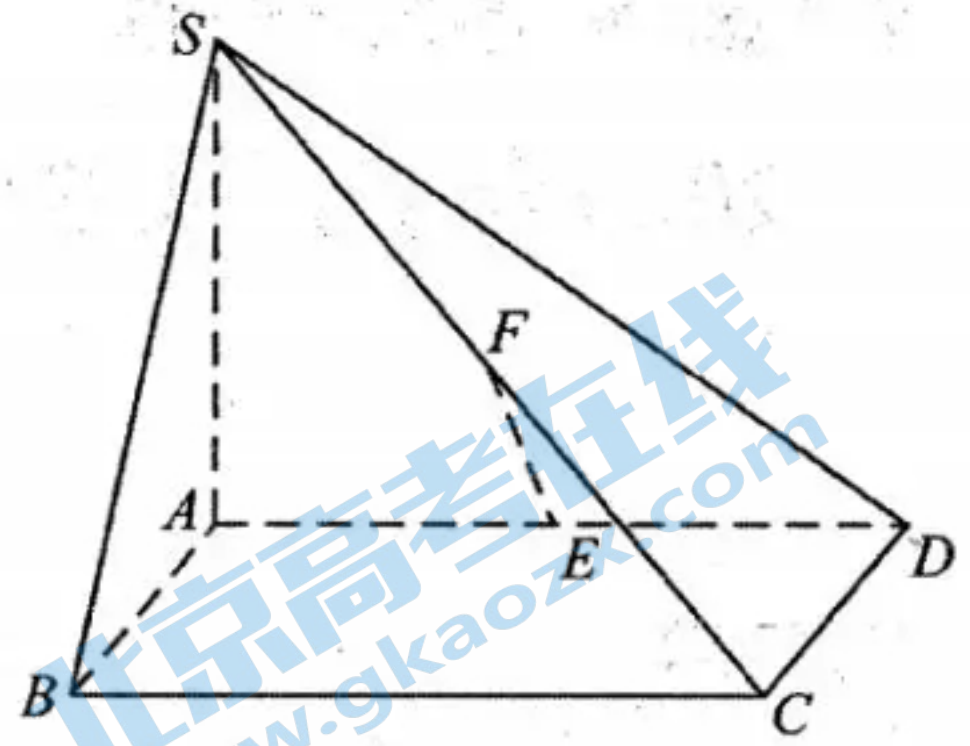
在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ，点  $D$  在  $BC$  边上. 在平面  $ABC$  内，过  $D$  作  $DF \perp BC$  且  $DF = AC$ .

(1) 若  $D$  为  $BC$  的中点，且  $\triangle CDF$  的面积等于  $\triangle ABC$  的面积，求  $\angle ABC$ ；

(2) 若  $\angle ABC = 45^\circ$ ，且  $BD = 3CD$ ，求  $\cos \angle CFB$ .

19. (12分)

如图, 四棱锥  $S-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形.  $SA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E, F$  分别为  $AD, SC$  的中点,  $EF$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$ .



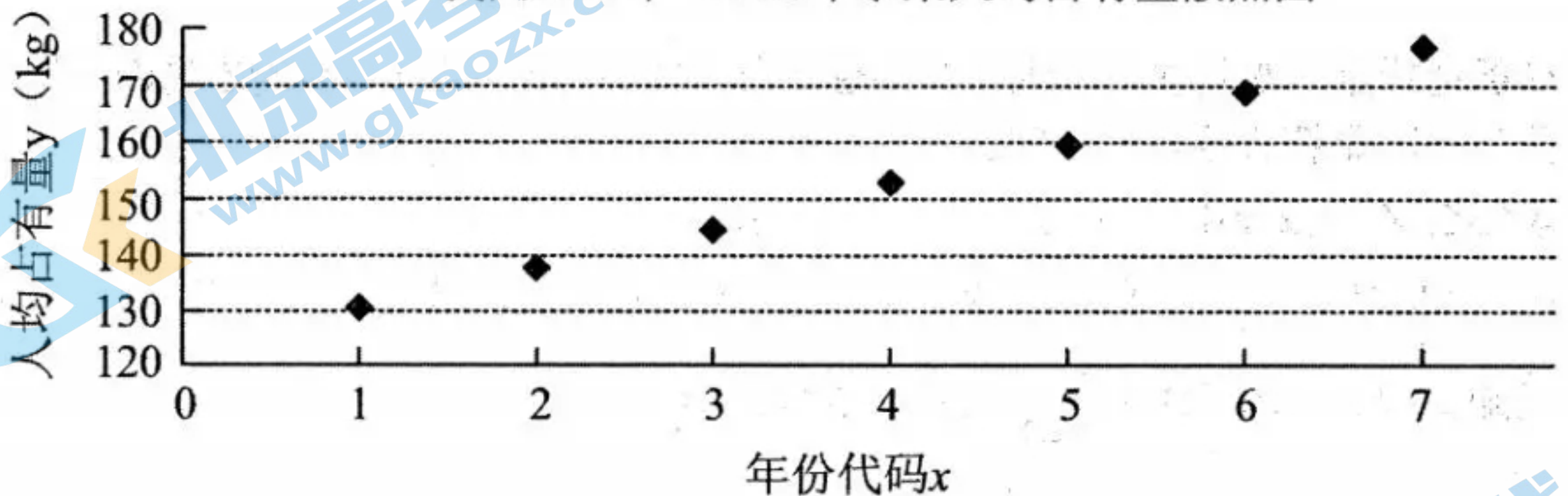
(1) 证明:  $EF$  为异面直线  $AD$  与  $SC$  的公垂线;

(2) 若  $EF = \frac{1}{2}BC$ , 求二面角  $B-SC-D$  的余弦值.

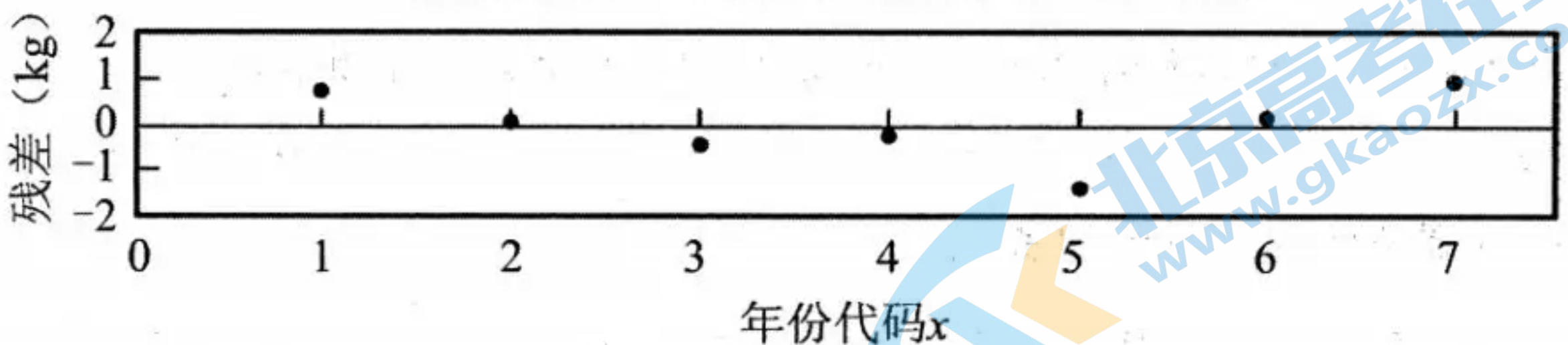
20. (12分)

下面给出了根据我国 2012 年~2018 年水果人均占有量  $y$  (单位: kg) 和年份代码  $x$  绘制的散点图和线性回归方程的残差图(2012 年~2018 年的年份代码  $x$  分别为 1~7).

我国 2012 年~2018 年水果人均占有量散点图



我国 2012 年~2018 年水果人均占有量残差图



(1) 根据散点图分析  $y$  与  $x$  之间的相关关系;

(2) 根据散点图相应数据计算得  $\sum_{i=1}^7 y_i = 1074$ ,  $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 4517$ , 求  $y$  关于  $x$  的线性

回归方程;

(3) 根据线性回归方程的残差图, 分析线性回归方程的拟合效果.

(精确到 0.01)

附: 回归方程  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$  中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

21. (12分)

设中心在原点, 焦点在  $x$  轴上的椭圆  $E$  过点  $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 且离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $F$  为  $E$  的右焦点,  $P$  为  $E$  上一点,  $PF \perp x$  轴,  $\odot F$  的半径为  $PF$ .

(1) 求  $E$  和  $\odot F$  的方程;

(2) 若直线  $l: y = k(x - \sqrt{3}) (k > 0)$  与  $\odot F$  交于  $A, B$  两点, 与  $E$  交于  $C, D$  两点, 其中  $A, C$  在第一象限, 是否存在  $k$  使  $|AC| = |BD|$ ? 若存在, 求  $l$  的方程; 若不存在, 说明理由.

22. (12分)

函数  $f(x) = \frac{a+x}{1+x} (x > 0)$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线在  $y$  轴上的截距为  $\frac{11}{2}$ .

(1) 求  $a$ ;

(2) 讨论  $g(x) = x(f(x))^2$  的单调性;

(3) 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = f(a_n)$ , 证明:  $2^{n-2} |2 \ln a_n - \ln 7| < 1$ .