延庆区 2023—2024 学年第一学期期末试卷

高一数学

2024.1

本试卷共 4 页，150 分，考试时长 120 分钟.

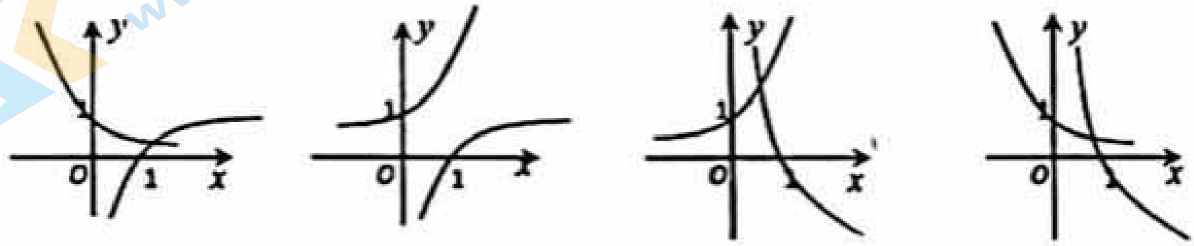
第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=(-2,0]$，集合 $B=[-1,2)$，则 $A\cup B=$

（A）$[-1,0]$　　（B）$(-1,0)$　　（C）$(-2,2)$　　（D）$[-2,2]$

（2）当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象可能是



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

（3）下列函数中是奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=x^{}$　　（B）$y=x^{\frac{1}{3}}$　　（C）$y=e^{|x|}$　　（D）$y=|\ln x|$

（4）向量 $a=(2,1)$，$b=(1,x)$，若 a . .，则

（A）$x=\frac{1}{2}$　　（B）$x=-\frac{1}{2}$　　（C）$x=2$　　（D）$x=-2$

（5）$a=(\frac{1}{2})^3$，$b=2^{0.5}$，$c=\log_3\frac{1}{2}$ 的大小关系为

（A）$a<b<c$　　（B）$c<b<$　　（C）$a<c<b$　　（D）c

（6）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ 3^x, x\le 0.\end{cases}$ 则 $f(\frac{1}{4})$ 的值为

（A）$\frac{1}{9}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）-2　　（D）2

) 甲，乙两人在5天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如下，中间一列的数字表示零件个数的十位数，两边的数字表示零件个数的个位数，则下列结论正确的是

甲		乙
9 8	1	
7 3	2	1 3 5

(A) 在这5天中，甲加工零件数的极差小于乙加工零件数的极差

(B) 在这5天中，甲、乙两人加工零件数的中位数相同

(C) 在这5天中，甲日均加工零件数大于乙日均加工零件数

(D) 在这5天中，甲加工零件数的方差小于乙加工零件数的方差

(8) 一个袋子中有大小和质地相同的4个球 其中有2个红色球（标号为1和2），2个绿色球（标号为3和4），从袋中不放回地依次随机摸出2个球，每次摸出一个球，设事件S="第一次摸到红球"，T="第二次摸到红球"，R="两次都摸到红球"，G="两次都摸到绿球"，M="两球颜色相同"，N="两球颜色不同"，则下列说法错误的是

(A) $M=\overline{N}$ (B) R与G互斥但不对立 (C) $R\cup G=M$ (D) S与T相互独立

(9) 已知等边ΔABC的边长为6，D在AC上且$AD=2DC$，E为线段AB上的动点，求 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}|$的取值范围

(A) $[2\sqrt{3},4]$ (B) $[2\sqrt{3},2\sqrt{7}]$ (C) $[4,2\sqrt{7}]$ (D) $[4,6]$

(10) 假设有机体生存时碳14的含量为m_0，那么有机体死亡x年后体内碳14的含量y满足的关系为$y=m_0a^x$（其中m_0，a都是非零实数），若测得死亡5730年后的古生物样品，体内碳14的含量为0.5，又测得死亡11460年后这类古生物样品，体内碳14的含量为0.25.如果测得某古生物样品碳14的含量为0.3，推测此古生物的死亡时间为（取$\lg 2\approx 0.3$，$\lg 3\approx 0.5$）

(A) 10550年 (B) 7550年 (C) 8550年 (D) 9550年

第二部分 （非选择题 共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{x}+\lg(1-x)$ 的定义域为__________.

（12）$(\frac{1}{2})^{-2}+4^{\frac{3}{2}}+\lg 2+\lg 5+\ln e^{2}=$__________.

（13）已知 $a=(1,2)$，$a-b=(-2,-2)$，则 $|2b|=$__________.

（14）甲同学进行投篮练习，每次投中的概率都是 $\frac{1}{2}$ 连续投3次，每次投篮互不影响，

则该同学恰好只有第一次投中的概率为__________；该同学至少两次投中的概率为__________.

（15）设 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x<-0.5,\\ a^{2}-x^{2}, -0.5\le x\le a,\\ -\sqrt{x}-1, x>a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①$f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $f(x)$ 存在最大值时，$a\ge\frac{\sqrt{6}}{2}$；

③存在 $M(x_1,f(x_1))(-a\le x_1\le a)$，$N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$，使得 $|MN|<1$；

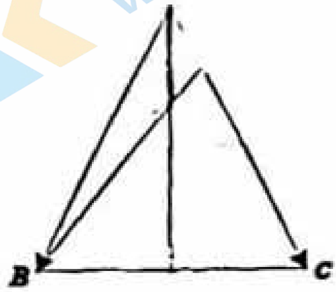
④若存在两个不同的 x，使得 $f(x)=\frac{3}{2}$，则 a 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}]$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(16)（本小题14分）

如图，在ΔABC中，$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$，D为BC中点，E为AD上一点，且$2AE=ED$，BE的延长线与AC的交点为F．



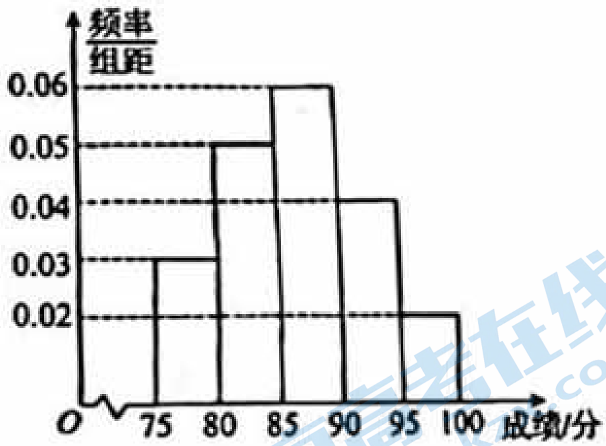
（Ⅰ）用向量a与b表示$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{AD}$；

（Ⅱ）用向量a与b表示$\overrightarrow{BE}$；

（Ⅲ）求出$\dfrac{AF}{AC}$的值.

(17)（本小题14分）

为了了解某校高一学生一次体育健康测试的得分情况，一位老师采用分层抽样的方法选取了20名学生的成绩作为样本，来估计本校高一学生的得分情况，并以[75,80)，[80,85)，[85,90)，[90,95)，[95,100]为分组，作出了右图所示的频率分布直方图，规定成绩不低于90分为"优秀".



高一

（Ⅰ）从该学校高一学生中随机选取一名学生，估计这名学生本次体育健康测试成绩"优秀"的概率；

（Ⅱ）从样本成绩优秀的[90,95)，[95,100]两组学生中任意选取2人，记为$\{a_i,b_j\}$，[90,95)中的学生为$a_i(i=1,2\cdots)$，[95,100]中的学生为$b_j(j=1,2\cdots)$，求这2人来自同一组的概率；

（Ⅲ）从成绩在[80,85)的学生中任取3名学生记为A组，从成绩在[85,90)的学生中任取3名学生记为B组，这两组学生的得分记录如下：

A组：82，83，a；　　　　B组：85，86，87．

写出a为何值时，A，B两组学生得分的方差相等（结论不要求证明）．

(18)（本小题 13 分）

已知函数① $f(x)=\log_2 x$　② $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，从这两个函数中选择一个，并完成以下问题.

（Ⅰ）求 $f(\frac{27}{8})-f(27)$ 的值；

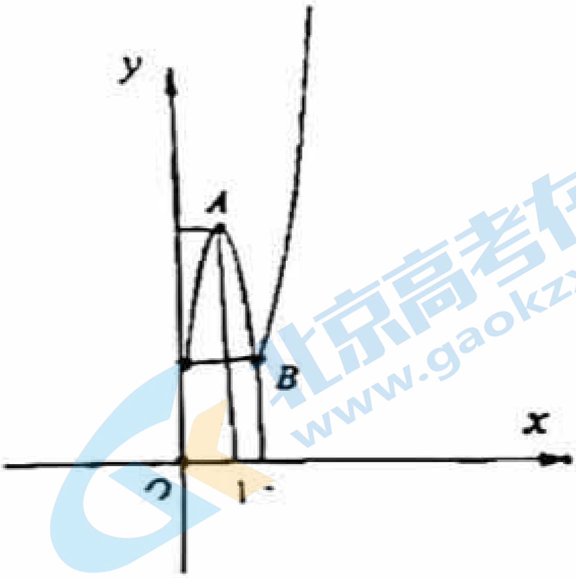
（Ⅱ）在 x 轴上取两点 $A(1,0)$ 和 $B(8,0)$，设线段 AB 的中点为 C，过点 A，B，C 分别作 x 轴的垂线，与函数 $f(x)$ 的图象交于 A_1，B_1，C_1，线段 A_1B_1 中点为 M.

（i）求 $|\overline{A_1B_1}|$；

（ii）判断 $|\overline{CM}|$ 与 $|\overline{CC_1}|$ 的大小，并说明理由.

(19)（本小题 15 分）

函数 $f(x)$ 的图像如图所示，定义域为 $[0,+\infty)$. 其中 $A(1,8)$，$B(2,4)$，当 $x\in[0,2]$ 时，图像是二次函数的一部分，其中顶点 $A(1,8)$，当 $x\in[2,+\infty)$ 时，图像是指数函数的一部分.



（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）求不等式 $f(x)>7$ 的解集；

（Ⅲ）若 $g(x)=x^2$，对于 $\forall x\in[a,b]$，都有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立. 写出 $a+b$ 的取值范围（不要求计算过程）.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)-mx$，$m\in R$.

（Ⅰ）当 $m=0$ 时，若 $f(x)=-2$，求 x 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 是偶函数，求出 m 的值；

（Ⅲ）当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，讨论方程 $f(x)=b$ 根的个数，并说明理由.

（21）（本小题 14 分）

已知集合 A 为非空数集. 定义：$S=\{x|x=a+b,a,b\in A\}$，$T=\{x|x=|a-b|,a,b\in$

（Ⅰ）若集合 $A=\{1,3\}$，直接写出集合 S，T；

（Ⅱ）若集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，且 $T=A$，求证：$x_4=3x_2$；

（Ⅲ）若集合 $A\subseteq\{x|0\le x\le 2024,x\in N\}$，$S\cap T=\varnothing$，记 $|A|$ 为集合 A 中元素的个数，求 $|A|$ 的最大值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

延庆区 2023-2024 学年第一学期期末考试

高一数学参考答案及评分标准　2024. 1

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　（2）B　（3）A　（4）A　（5）D

（6）C　（7）C　（8）D　（9）B　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[0,1)$　（12）15　（13）10

（14）$\frac{4}{27}$　$\frac{7}{27}$　（注：第一空 3 分，第二空 2 分）

（15）②④　（注：选对一个得 3 分，全部正确的 5 分，有错误选项得 0 分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ ，　…………2 分

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.　…………5 分

（Ⅱ）$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}=-\frac{5}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$　……10 分

（Ⅲ）设 $\frac{AF}{AC}=\lambda$，则 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda\boldsymbol{b}$，　………11 分

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　………12 分

因为 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{BE}$ 共线，所以 $\frac{-\frac{5}{6}}{-1}=\frac{\frac{1}{6}}{\lambda}$.　………13 分

所以 $\lambda=\frac{1}{5}$ ，即 $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{5}$　………14 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）成绩优秀的学生共有 6 人，$\frac{6}{20}=0.3$，　……2分

所以这名学生本次体育健康测试成绩“优秀”的概率为 0.3．　……4分

（Ⅱ）$[90,95)$ 中有 4 人，$[95,100]$ 中有 2 人　……6分

从样本成绩优秀的 $[90,95)$，$[95,100]$ 两组学生中任意选取 2 人，其样本空间可记为：

$\Omega=\{\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_1,a_4\},\{a_1,b_1\},\{a_1,b_2\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\},\{a_2,b_1\},\{a_2,b_2\},$

$\{a_3,a_4\},\{a_3,b_1\},\{a_3,b_2\},\{a_4,b_1\},\{a_4,b_2\},\{b_1,b_2\}\}$共包含15个样本点. ……8分

记 A：两人来自同一组，则

$A=\{\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_1,a_4\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\},\{a_3,a_4\},\{b_1,b_2\}\}$共包含7个样本点，9分

所以 $p(A)=\dfrac{7}{15}$ ……11分

（III）81或84 ……14分（对一个2分）

（18）（本小题 13 分）

选择①

（Ⅰ） $f(\dfrac{27}{8})-f(27)=\log_2\dfrac{27}{8}-\log_2 27=\log_2\dfrac{1}{8}=-3\log_2 2=-3$ …3 分

（Ⅱ） 线段 AB 的中点为 C 为 $(\dfrac{9}{2},0)$ …4 分

A_1， B_1， C_1 分别为 $(1,0),(8,3),(\dfrac{9}{2},\log_2\dfrac{9}{2})$ …7 分

线段 A_1B_1 中点 M 为 $(\dfrac{9}{2},\dfrac{3}{2})$ …8 分

（i） $\overrightarrow{A_1B_1}=(7,3),|\overrightarrow{A_1B_1}|=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$； …9 分

（ii） $|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|=\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_2 2=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\log_2 2\sqrt{2}$， $|\overrightarrow{CC_1}|=\log_2\dfrac{9}{2}$. …11 分

$(2\sqrt{2})^2=$ ， $(\dfrac{9}{2})^2=\dfrac{81}{4}$， 所以 $2\sqrt{2}<\dfrac{9}{2}$ …12 分

所以 $\log_2 2\sqrt{2}<\log_2\dfrac{9}{2}$ 即 $|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|<|\overrightarrow{CC_1}|$ …13 分

选择②

（Ⅰ） $f(\dfrac{27}{8})-f(27)=(\dfrac{27}{8})^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}-3=-\dfrac{3}{2}$ …3 分

（Ⅱ） 线段 AB 的中点为 C 为 $(\dfrac{9}{2},0)$ …4 分

A_1， B_1， C_1 分别为 $(1,1),(8,2),(\dfrac{9}{2},\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}})$ …7 分

线段 A_1B_1 中点 M 为 $(\frac{9}{2},\frac{3}{2})$ …8 分

（i）$\overrightarrow{A_1B_1}=(7,1),|\overrightarrow{A_1B_1}|=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$； …9 分

（ii）$|\overrightarrow{CM}|=\frac{3}{2}$，$|\overrightarrow{CC_1}|=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$． …11 分

$(\frac{3}{2})^3=\frac{27}{8}$，　$(\sqrt[3]{\frac{9}{2}})^3=\frac{9}{2}=\frac{36}{8}$， …12 分

所以 $\frac{3}{2}<\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ 即 $|\overrightarrow{CM}|<|\overrightarrow{CC_1}|$ …13 分

（19）（本小题 15 分）

（Ⅰ）当 $x\in[0,2]$ 时，图像是二次函数的一部分，设解析式为 $f(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$

或 $f(x)=a(x-1)^2+8,(a\neq 0)$ …1 分（3 分）

根据题意可知：$\begin{cases}4a+2b+c=4\\ -\frac{b}{2a}=1\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=8\end{cases}$ 或 $a(2-1)^2+8=4,(a\neq 0)$，解得：$\begin{cases}a=-4\\ b=8\\ c=4\end{cases}$； …4 分

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，图像是指数函数的一部分，设解析式为 $f(x)=a^x,(a>1)$ …5 分

根据题意可知：$a^2=4$，所以 $a=2$． …7 分

所以 $f(x)=\begin{cases}-4x^2+8x+4, x\in[0,2]\\ 2^x, x\in(2,+\infty)\end{cases}$ …8 分

（Ⅱ）①$\begin{cases}0\leq x\leq 2\\ -4x^2+8x+4>7\end{cases}$，解得 $x\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ …10 分

② $\begin{cases} x>2 \\ 2^x>7 \end{cases}$，解得 $x\in(\log_2 7,+\infty)$ …12 分

综上，不等式 $f(x)>7$ 的解集为 $x\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cup(\log_2 7,+\infty)$ …13 分

（III）对于 $\forall x\in[a,b]$，都有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立，则 $[a,b]\subseteq[2,4]$，

所以 $a+b\in(4,8)$ …15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（ I ）当 $m=0$ 时，若 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)=-2$，则 $3^x+1=(\frac{1}{3})^{-2}$

所以 $x=\log_3 8$； …3 分

（ II ）若 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^{-x}+1)+mx=f(x)$ …5 分

即：$\log_{\frac{1}{3}}(3^{-x}+1)+mx=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)-mx$ …6 分

所以 $2mx=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(3^{-x}+1)=\log_{\frac{1}{3}}(\frac{3^x+1}{3^{-x}+1})=\log_{\frac{1}{3}}(\frac{3^x(3^x+1)}{3^x+1})=-x$

所以 $m=-\frac{1}{2}$ …7 分

（III）当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，由（ II ）可知

$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+\frac{1}{2}x=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}x}=\log_{\frac{1}{3}}(\frac{3^x+1}{\sqrt{3}^x})$

令 $m(x)=\frac{3^x+1}{\sqrt{3}^x}$， $x\in(0,+\infty)$

在 $(0,+\infty)$ 上任取 $0<x_1<x_2$，

$m(x_2)-m(x_1)=\frac{3^{x_2}+1}{\sqrt{3}^{x_2}}-\frac{3^{x_1}+1}{\sqrt{3}^{x_1}}=\sqrt{3}^{x_2}-\sqrt{3}^{x_1}+\frac{\sqrt{3}^{x_1}-\sqrt{3}^{x_2}}{\sqrt{3}^{x_2}\sqrt{3}^{x_1}}=(\sqrt{3}^{x_2}-\sqrt{3}^{x_1})(1-\frac{1}{\sqrt{3}^{x_2}\sqrt{3}^{x_1}})$

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $\sqrt{3}^{x_2}>\sqrt{3}^{x_1}>1$， $0<\frac{1}{\sqrt{3}^{x_2}}<\frac{1}{\sqrt{3}^{x_1}}<1$， $\frac{1}{\sqrt{3}^{x_2}\sqrt{3}^{x_1}}<1$ …8 分

所以 $m(x_2)-m(x_1)>0$，即 $m(x)=\dfrac{3^x+1}{\sqrt{3}^x}$，在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　…9 分

所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+\dfrac{1}{2}x=\log_{\frac{1}{3}}(\dfrac{3^x+1}{\sqrt{3}^x})$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减　　…10 分

又因为 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+\dfrac{1}{2}x$ 是偶函数，所以在 $(-\infty,0)$ 单调递增　　…11 分

当 $x=0$ 时，$f(x)_{\max}=\log_{\frac{1}{3}}2=-\log_3 2$

当 $b>-\log_3 2$ 时，方程 $f(x)=b$，没有实数根.　　…12 分

当 $b=-\log_3 2$ 时，方程 $f(x)=b$，1 个实数根.　　…13 分

当 $b<-\log_3 2$ 时，

取 $-2b\in(0,+\infty)$，$f(-2b)=\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{3}^{-2b}+\dfrac{1}{\sqrt{3}^{-2b}})<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}^{-2b}=b$

在 $(0,-2b)$，$f(0)=-\log_3 2>b$，$f(-2b)<b$ 且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减…14 分

此时，方程 $f(x)=b$，2 个实数根.　　…15 分

（21）（本小题 14 分）

解（Ⅰ）根据题意，由 $A=\{1,3\}$，则 $S=\{2,4,6\}$，$T=\{0,2\}$；　　…………4 分

（Ⅱ）由于集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，且 $T=A$，

所以 T 中也只包含四个元素，因为 $0<x_2-x_1<x_3-x_1<x_4-x_1$，

即 $T=\{0,x_2-x_1,x_3-x_1,x_4-x_1\}$ 且 $x_1=0$，　　…………6 分

剩下的 $0<x_3-x_2<x_4-x_2$，$0<x_4-x_3<x_4-x_2$，$x_4-x_2<x_4$，

所以 $x_4-x_2=x_3$，$x_3-x_2=x_4-x_3=x_2$，

所以 $x_3=2x_2$，$x_4=3x_2$；　　…………8 分

（III）设 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_k\}$ 满足题意，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_k$，

则 $2a_1<a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_1+a_k<a_2+a_k<a_3+a_k<\cdots<a_{k-1}+a_k<2a_k$

$\therefore |S|\geq 2k-1$，$a_1-a_1<a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_k-a_1$，$\therefore |T|\geq k$，

$\because S\cap T=\varnothing$，$|S\cup T|=|S|+|T|\geq 3k-1$，　　　　…………10 分

$S\cup T$ 中最小的元素为 0，最大的元素为 $2a_k$，

$\therefore |S\cup T|\leq 2a_k+1$，$\therefore 3k-1\leq 2a_k+1\leq 4049(k\in N^*)$，$\therefore k\leq 1350$，　　…………11 分

设 $A=\{m,m+1,m+2\cdots,2024\}$，$m\in N$

则 $S=\{2m,2m+1,2m+2\cdots,4048\}$，$T=\{0,1,2\cdots,2024-m\}$，

因为 $S\cap T=\varnothing$，可得 $2024-m<2m$，即 $m>674\dfrac{2}{3}$，　　　　…………12 分

故 m 的最小值为 675，于是当 $m=675$ 时，A 中元素最多，　　　　………13 分

即 $A=\{675,676,677\cdots,2024\}$ 时满足题意，

综上所述，集合 A 中元素的个数的最大值是 1350.　　　　…………14 分