2023 北京一六六中高三 10 月月考

数　学

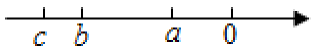
一、单选题（共 10 题，每题 4 分）

1．设集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x\leq 1\}$，$B=\{0，1，2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1，0，1，2\}$　　B．$\{0，1\}$

C．$\{-2，-1，0，1，2\}$　　D．$\{0，1，2\}$

2．已知实数 a，b，c 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是（　　）



A．$b-a<c+a$　　B．$c^2<ab$　　C．$\frac{c}{b}>\frac{c}{a}$　　D．$|b|c<|a|c$

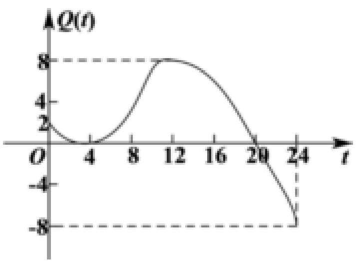
3．下列函数中，值域为 $\mathbf{R}$ 且在区间（0，+∞）上单调递增的是（　　）

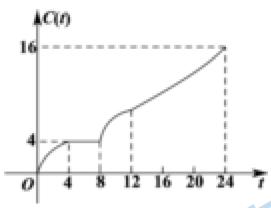
A．$y=x^2+2x$　　B．$y=2^{x+1}$　　C．$y=x^3+1$　　D．$y=(x-1)|x|$

4．在△ABC 中，$(a-c)(\sin A+\sin C)=(a+b)\cos(\frac{\pi}{2}+B)$，则∠$C=$（　　）

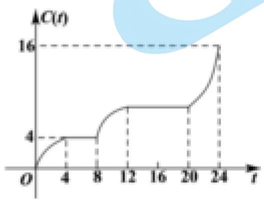
A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

5．老舍在《济南的冬天》中写到济南的冬天是没有风声的，济南的冬天是响晴的，济南真得算个宝地．济南市某一天内的气温 $Q(t)$（单位：℃）与时刻 t（单位：时）之间的关系如图所示，令 $C(t)$ 表示时间段[0，t]内的温差（即时间段[0，t]内最高温度与最低温度的差），$C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示，则下列正确的图象是（　　）

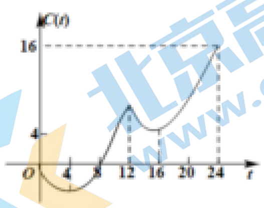




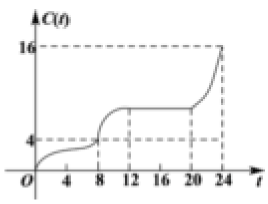
A．



B．



C．



D．

6．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，0）上单调递减且 $f(-1)=0$，若 $a=f(-\log_3 8)$，$b=f$

（－$\log_2 4$），$c=f$（$2^{\frac{2}{3}}$），则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$c<a<b$　　　B．$a<b<c$　　　C．$a<c<b$　　　D．$c<b<a$

7．已知函数 $f(x)=2\cos^2(x+\theta)-1$，则“$\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in Z)$”是“$f(x)$ 为奇函数”的（　　）

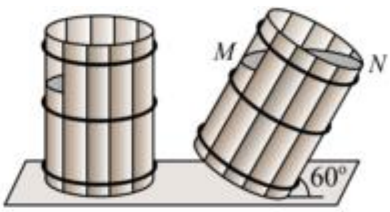
A．充分而不必要条件　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　D．既不充分也不必要条件

8．若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$（$\omega>0$）在（$\frac{\pi}{2}$，$\pi$）上单调，且在（0，$\frac{\pi}{4}$）上存在极值点，则 ω 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{1}{3},2]$　　　B．$(\frac{2}{3},2]$　　　C．$(\frac{2}{3},\frac{7}{6}]$　　　D．$(\frac{1}{3},\frac{7}{6}]$

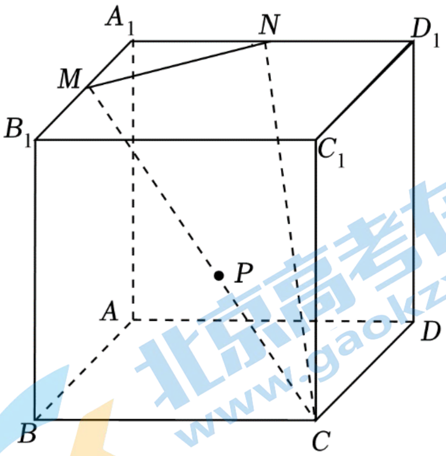
9．“木桶效应”是一个有名的心理效应，是指木桶盛水量的多少，取决于构成木桶的最短木板的长度，而不取决于构成木桶的长木板的长度，常被用来寓意一个短处对于一个团队或者一个人的影响程度．某同学认为，如果将该木桶斜放，发挥长板的作用，在短板存在的情况下，也能盛较多的水．根据该同学的说法，若有一个如图①所示的圆柱形木桶，其中一块木板有缺口，缺口最低处与桶口距离为 2，若按照图②的方式盛水，形成了一个椭圆水面，水面刚好与左边缺口最低处 M 和右侧桶口 N 齐平，且 MN 为该椭圆水面的长轴．则此时比图①盛水方式多盛的水的体积为（　　）



图①　　　图②

A．2π　　　B．3π　　　C．4π　　　D．6π

10．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点，点 P 在线段 CM 上运动，给出下列四个结论错误的是（　　）



A．平面 CMN 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形是五边形

B．直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是$\frac{2\sqrt{17}}{17}$

C．存在点 P，使得$\angle B_1PD_1=90°$

D．$\triangle PDD_1$ 面积的最小值是$\frac{5\sqrt{5}}{6}$

二、填空题（共 5 题，每题 5 分）

11．（5 分）在$(2x^2-1)^5$的展开式中，x^4 的系数为_______．（用数字作答）

12．（5 分）在$\triangle ABC$ 中，$a=4$，$b=5$，$\cos C=\frac{1}{8}$，则 $c=$______，$S_{\triangle ABC}=$____________．

13．（5 分）将石片扔向水面，假设石片第一次接触水面的速率为 $11.2m/s$，这是第一次“打水漂”，然后石片在水面上多次“打水漂”，每次“打水漂”的速率为上一次的 93%，若要使石片的速率低于 $7.84m/s$，则至少需要“打水漂”______次．（参考数据：取 $ln0.7=-0.357$，$ln0.93=-0.073$）

14．（5 分）若存在 $x\in[0,1]$，有 $x^2+(1-a)x+3-a>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是_________．

15．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, & x\leqslant m\\ x-4, & x>m\end{cases}$．

①当 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为______；

②如果函数 $f(x)$ 恰有两个零点，那么实数 m 的取值范围为____________．

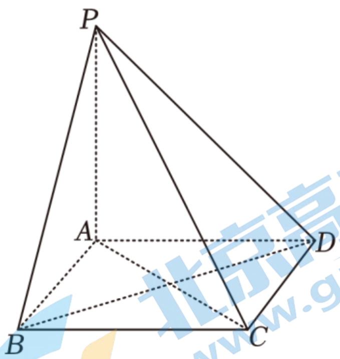
三、解答题（共 6 题，每题 85 分）

16．（14 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AD=2$，$BD=2\sqrt{2}$．

（1）求证：$BD\perp$平面 PAC；

（2）求二面角 $B-PD-C$ 余弦值的大小；

（3）求点 C 到平面 PBD 的距离．



17．（14 分）已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\phi+2\sin\phi-4\sin^2\frac{\omega x}{2}\sin\phi$（$\omega>0$，$|\phi|<\pi$），其

图像的一条对称轴与相邻对称中心的横坐标相差$\frac{\pi}{4}$，_____，从以下两个条件中任选一个补充在空白横线中.

①函数$f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到的图像关于y轴对称且$f(0)<0$;

②函数$f(x)$的图像的一个对称中心为$(\frac{\pi}{12},0)$且$f(\frac{\pi}{6})>0$.

（1）求函数$f(x)$的解析式;

（2）将函数$f(x)$图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{t}(t>0)$倍，纵坐标不变，得到函数$y=g(x)$的图象，若函数$y=g(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{3}]$上恰有3个零点，求t的取值范围.

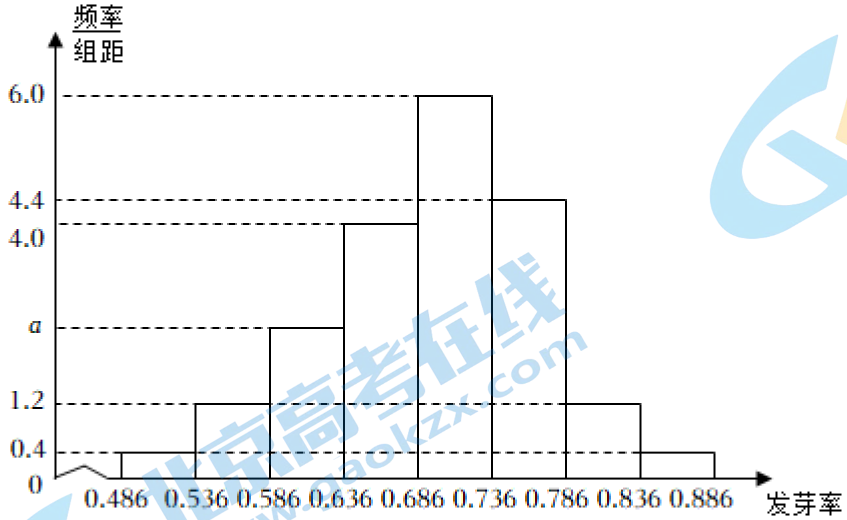
18.（14分）某花卉企业引进了数百种不同品种的康乃馨，通过试验田培育，得到了这些康乃馨种子在当地环境下的发芽率，并按发芽率分为8组：[0.486，0.536)，[0.536，0.586)，…，[0.836，0.886)加以统计，得到如图所示的频率分布直方图.

企业对康乃馨的种子进行分级，将发芽率不低于0.736的种子定为“A级”，发芽率低于0.736但不低于0.636的种子定为“B级”，发芽率低于0.636的种子定为“C级”.

（Ⅰ）现从这些康乃馨种子中随机抽取一种，估计该种子不是“C级”种子的概率;

（Ⅱ）该花卉企业销售花种，且每份“A级”、“B级”“C级”康乃馨种子的售价分别为20元、15元、10元.某人在市场上随机购买了该企业销售的康乃馨种子两份，共花费X元，以频率为概率，求X的分布列和数学期望;

（Ⅲ）企业改进了花卉培育技术，使得每种康乃馨种子的发芽率提高到原来的1.1倍，那么对于这些康乃馨的种子，与旧的发芽率数据的方差相比，技术改进后发芽率数据的方差是否发生变化？若发生变化，是变大了还是变小了？（结论不需要证明）.



19.（14分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$|F_1F_2|=2$，连接椭圆$C$的四个顶点所成的四边形的周长为$4\sqrt{7}$.

（1）求椭圆 C 的方程和离心率；

（2）已知过点 F_1 的直线 l_1 与椭圆交于 P，Q 两点，过点 F_2 且与直线 l_1 垂直的直线 l_2 与椭圆交于 M，N 两点，求 $\dfrac{|PQ|+|MN|}{|PQ|\cdot|MN|}$ 的值．

20．（15 分）已知函数 $f(x)=2\ln x-x-\ln a$，$a>0$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处切线的斜率；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的极大值；

（Ⅲ）设 $g(x)=ae^x-x^2$，当 $a\in(1,e)$ 时，求函数 $g(x)$ 的零点个数，并说明理由．

21．（14 分）设 A 是由 $m\times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的数表，如果某一行（或某一列）各数之和为负数，则改变该行（或该列）中所有数的符号，称为一次“操作”．

（Ⅰ）数表 A 如表 1 所示，若经过两次“操作”，使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负实数，请写出每次“操作”后所得的数表（写出一种方法即可）；

1	2	3	-7
-2	1	0	1

表 1

（Ⅱ）数表 A 如表 2 所示，若必须经过两次“操作”，才可使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数，求整数 a 的所有可能值；

a	a^2-1	$-a$	$-a^2$
$2-a$	$1-a^2$	$a-2$	a^2

表 2

（Ⅲ）对由 $m\times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的任意一个数表 A，能否经过有限次“操作”以后，使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数？请说明理由．

参考答案

一、单选题（共 10 题，每题 4 分）

1.【答案】B

【分析】可求出集合 A，然后进行交集的运算即可．

【解答】解：$\because A=\{-1，0，1\}$，$B=\{0，1，2\}$，

$\therefore A\cap B=\{0，1\}$．

故选：B．

2.【答案】D

【分析】法 1：根据数轴得到 $c<b<a<0$ 且$|c|>|b|>|a|$，结合不等式基本性质逐一进行判断即可；

法 2：用特值法代入验证即可．

【解答】解：（法 1）根据数轴可得 $c<b<a<0$ 且$|c|>|b|>|a|$，

对于 A：因为 $c<b$，$a<0$，所以 $c+a<c$，$b-a>b$，则 $c+a<c<b-a$，即 $c+a<b-a$，故 A 错误；

对于 B：因为 $c<b<a<0$，$|c|>|b|>|a|$，所以 $c^2>b^2>a^2$，且 $b^2>ab$，所以 $c^2>b^2>ab$，则 $c^2>ab$，故 B 错误；

对于 C：因为 $b<a<0$，所以$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，则$\frac{c}{b}<\frac{c}{a}$，故 C 错误；

对于 D：因为$|b|>|a|$，且 $c<0$，所以$|b|c<|a|c$，故 D 正确，

（法 2）不妨令 $c=-5$，$b=-4$，$a=-1$，

则 $c+a=-6<b-a=-3$，故 A 错误；$c^2=25>ab=4$，故 B 错误；$\frac{c}{b}=\frac{5}{4}<\frac{c}{a}=5$，故 C 错误；

故选：D．

3.【答案】C

【分析】根据题意，依次分析选项中函数的单调性以及值域，综合即可得答案．

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，$y=x^2+2x=(x+1)^2-1$，其值域为$[-1，+\infty)$，不符合题意；

对于 B，$y=2^{x+1}$，其值域为$(0，+\infty)$，不符合题意；

对于 C，$y=x^3+1$，值域为 $\mathbf{R}$ 且在区间$(0，+\infty)$上单调递增，符合题意；

对于 D，$y=(x-1)|x|=\begin{cases}x^2-x，& x\geqslant 0\\ -x^2+x，& x<0\end{cases}$，在区间$(0，\frac{1}{2})$上为减函数，不符合题意；

故选：C．

4.【答案】C

【分析】利用正弦定理并结合 $\cos(\frac{\pi}{2}+B)=-\sin B$ 可得$(a-c)(a+c)=(a+b)(-b)$，即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，从而利用余弦定理即可求出 $\cos C$ 并确定$\angle C$的大小．

【解答】解：由正弦定理并结合 $\cos(\frac{\pi}{2}+B)=-\sin B$，得$(a-c)(a+c)=(a+b)(-b)$，

所以 $a^2+b^2-c^2=-ab$，

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\pi)$，故 $\angle C=\frac{2\pi}{3}$.

故选：C.

5.【答案】B

【分析】根据不同时间段 $C(t)$ 值的变化情况判断.

【解答】解：由题意可知，当 $0\leqslant t<4$ 时，$C(t)$ 的值随着 t 的值的增大而增大，

当 $4\leqslant t<8$ 时，$C(t)$ 的值不变，恒为 2，

当 $8\leqslant t<12$ 时，$C(t)$ 的值随着 t 的值的增大而增大，

当 $12\leqslant t<20$ 时，$C(t)$ 的值不变，恒为 8，

当 $20\leqslant t<24$ 时，$C(t)$ 的值随着 t 的值的增大而增大，

观察四个选项的图象，只有选项 B 符合题意.

故选：B.

6.【答案】A

【分析】根据题意可得出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$，$(-\infty,0)$ 上单调递减，$f(1)=f(-1)=0$，并可得出 $2^{\frac{2}{3}}>1$，$-\log_2 4<-\log_3 8<-1$，从而根据 $f(x)$ 的单调性即可得出 a，b，c 的大小关系.

【解答】解：$\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$f(-1)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$f(1)=0$，

$\because 2^{\frac{2}{3}}>2^0=1$，$-\log_2 4=-\log_3 9<-\log_3 8<-\log_3 3=-1$，

$\therefore f(2^{\frac{2}{3}})<f(1)=0$，$f(-\log_2 4)>f(-\log_3 8)>f(-1)=0$，

$\therefore c<a<b$.

故选：A.

7.【答案】A

【分析】根据题意，由二倍角公式可得 $f(x)=\cos(2x+2\theta)$，结合诱导公式呢分析可得答案.

【解答】解：根据题意，函数 $f(x)=2\cos^2(x+\theta)-1=\cos(2x+2\theta)$，

若 $\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z)$，则 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2}+2k\pi)=-\sin 2x$，是奇函数，

反之，若 $f(x)$ 为奇函数，必有 $2\theta=\pi+2k\pi$，变形可得 $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

故“$\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z)$”是“$f(x)$ 为奇函数”充分不必要条件，

故选：A.

8.【答案】C

【分析】直接利用三角函数关系式的变换和三角函数的值的应用求出结果.

【解答】解：函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$在（0，$\frac{\pi}{4}$）上存在极值点，

故该极值点满足$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{3}$；

所以 $\omega>\frac{2}{3}$，

由于函数 $f(x)$ 在（$\frac{\pi}{2}$，π）上单调，

故 $T\geqslant2(\pi-\frac{\pi}{2})=\pi$，

所以 $\omega\leqslant2$；

所以$\frac{2}{3}<\omega\leqslant2$；

当 $x=\frac{\pi}{2}$时，$\frac{7\pi}{12}<\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$；

当 $x=\pi$ 时，$\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，解得：$\omega\leqslant\frac{7}{6}$.

综上所述：$\frac{2}{3}<\omega\leqslant\frac{7}{6}$.

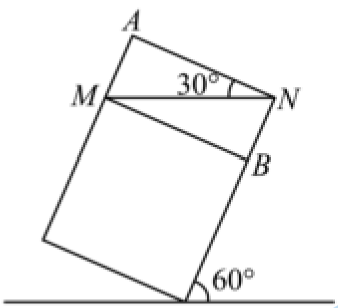
即 ω 的取值范围是（$\frac{2}{3}$，$\frac{7}{6}$].

故选：C.

9.【答案】B

【分析】作出截面图，求出圆柱的底面半径，根据对称得出答案.

【解答】解：作出截面图，如图，从缺口 M 向桶边作垂线 MB，MN 恰好平分 $AMBN$；



因为桶倾斜与底面成 60°，所以$\angle ANM=30°$；

因为 $AM=2$，所以$MN=4$，$AN=2\sqrt{3}$；

因为缺口以上的圆柱部分体积为$V=\pi\times(\sqrt{3})^2\times2=6\pi$；

所以多盛的水的体积为$\frac{1}{2}\times6\pi=3\pi$.

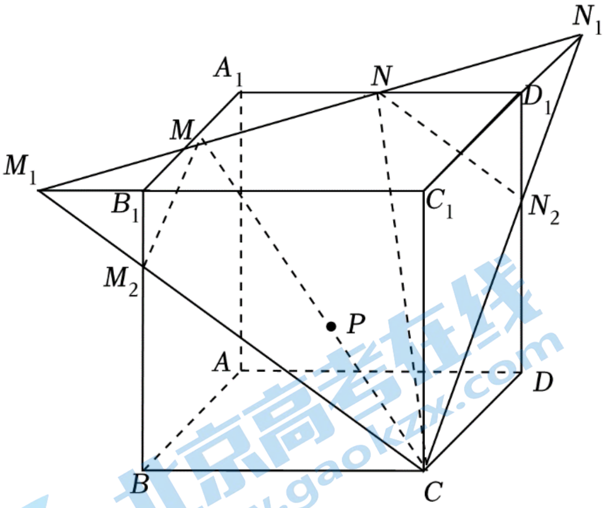
故选：B.

10.【答案】D

【分析】作出截面图形判断 A；利用等积法可判断 B，利用坐标法可判断 CD.

【解答】解：对于 A，如图直线 MN 与 C_1B_1、C_1D_1 的延长线分别交于 M_1，N_1，

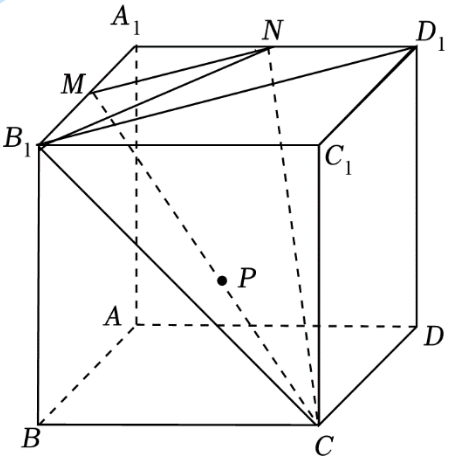
连接 CM_1，CN_1 分别交 BB_1，DD_1 于 M_2，N_2，连接 MM_2，NN_2，



则五边形 MM_2CN_2N 即为所得的截面图形，故 A 正确；

对于 B，由题可知 $MN// B_1D_1$，$MN\subset$平面 CMN，$B_1D_1\not\subset$平面 CMN，

所以 $B_1D_1//$ 平面 CMN，故点 B_1 到平面 CMN 的距离即为直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离，



设点 B_1 到平面 CMN 的距离为 h，由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，

可得 $CM=CN=3$，$MN=\sqrt{2}$，$S_{\triangle CMN}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3^2-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，

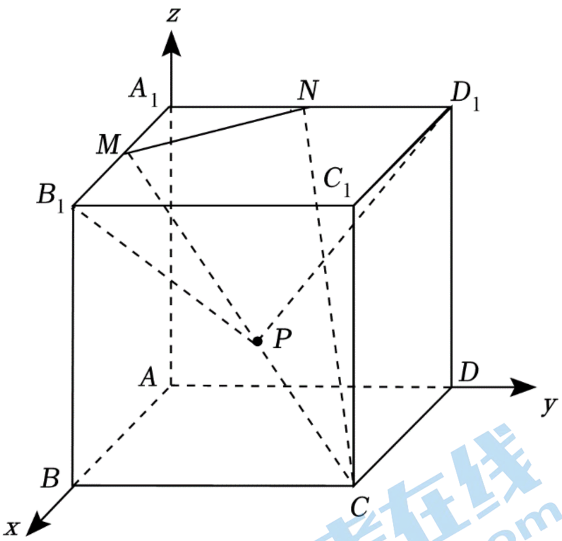
所以 $V_{B_1-CMN}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle CMN}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{17}}{2}\times h=\dfrac{\sqrt{17}}{6}h$，

$V_{C-B_1MN}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle B_1MN}\cdot CC_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2=\dfrac{1}{3}$，

所以由 $V_{B_1-CMN}=V_{C-B_1MN}$，可得 $h=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，

所以直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，故 B 正确；

对于 C，如图建立空间直角坐标系，则 B_1（2，0，2），D_1（0，2，2），C（2，2，0），M（1，0，2），



设 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{MC}$，$0\leq\lambda\leq1$，所以 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{MC}=\lambda$（1，2，-2），

又 C（2，2，0），B_1（2，0，2），D_1（0，2，2），

所以 P（$2-\lambda$，$2-2\lambda$，2λ），$\overrightarrow{PB_1}=$（λ，$2\lambda-2$，$2-2\lambda$），$\overrightarrow{PD_1}=$（$\lambda-2$，2λ，$2-2\lambda$），

假设存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1=90°$，

$\therefore\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{PD_1}=\lambda(\lambda-2)+2\lambda(2\lambda-2)+(2-2\lambda)^2=0$，整理得 $9\lambda^2-14\lambda+4=0$，

所以 $\lambda=\frac{7+\sqrt{13}}{9}>1$（舍去）或 $\lambda=\frac{7-\sqrt{13}}{9}$，

故存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1=90°$，故 C 正确；

对于 D，由上知 P（$2-\lambda$，$2-2\lambda$，2λ），所以点 P（$2-\lambda$，$2-2\lambda$，2λ）在 DD_1 的射影为（0，2，2λ），

所以点 P（$2-\lambda$，$2-2\lambda$，2λ）到 DD_1 的距离为：$d=\sqrt{(2-\lambda)^2+(-2\lambda)^2}=\sqrt{5\lambda^2-4\lambda+4}=\sqrt{5(\lambda-\frac{2}{5})^2+\frac{16}{5}}$，

所以当 $\lambda=\frac{2}{5}$ 时，$d_{min}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

故 $\triangle PDD_1$ 面积的最小值是 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故 D 错误．

故选：D．

二、填空题（共 5 题，每题 5 分）

11．【答案】-40．

【分析】在二项展开式的通项公式中，令 x 的幂指数等于 4，求出 r 的值，即可求得展开式中 x^4 的系数．

【解答】解：$(2x^2-1)^5$ 的展开式中的通项为 $(-1)^{5-r}2^rC_5^rx^{2r}$，

令 $2r=4$，解得 $r=2$，

$\therefore x^4$ 的系数为 $(-1)^3 2^2C_5^2=-40$，

故答案为：-40．

12．【答案】见试题解答内容

【分析】由已知利用余弦定理可求 c 的值，根据同角三角函数基本关系式可求 $\sin C$ 的值，利用三角形的面积公式即可计算得解．

【解答】解：∵$a=4$，$b=5$，$\cos C=\frac{1}{8}$，

∴由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}=36$，解得：$c=6$，

∴$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$．

故答案为：$\frac{15\sqrt{7}}{4}$．

13．【答案】6．

【分析】设石片第 n 次“打水漂”时的速率为 v_n，则 $v_n=11.2\times0.93^{n-1}$，建立不等式关系即可求解．

【解答】解：设石片第 n 次“打水漂”时的速率为 v_n，

则 $v_n=11.2\times0.93^{n-1}$，由 $11.2\times0.93^{n-1}<7.84$，得 $0.93^{n-1}<0.7$，

则 $(n-1)\ln0.93<\ln0.7$，即 $n-1>\frac{\ln0.7}{\ln0.93}=\frac{-0.357}{-0.073}\approx4.89$，

则 $n>5.89$，故至少需要“打水漂”的次数为 6．

故答案为：6．

14．【答案】$(-\infty,3)$．

【分析】参数分离可得 $a<\frac{x^2+x+3}{x+1}$，设 $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x+1}$，将存在问题转化为 $a<f(x)_{max}$，求出函数的最大值，即可得到实数 a 的取值范围．

【解答】解：将原不等式参数分离可得 $a<\frac{x^2+x+3}{x+1}$，设 $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x+1}$，

已知存在 $x\in[0,1]$，有 $x^2+(1-a)x+3-a>0$ 成立，则 $a<f(x)_{max}$，

令 $t=x+1$，则 $f(x)=\frac{(t-1)^2+t-1+3}{t}=\frac{t^2-t+3}{t}=t+\frac{3}{t}-1$，$t\in[1,2]$，

由对勾函数知 $f(x)$ 在 $[1,\sqrt{3})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{3},2]$ 上单调递增，

又 $f(1)=1+\frac{3}{1}-1=3$，$f(2)=2+\frac{3}{2}-1=\frac{5}{2}$，

所以 $f(x)_{max}=f(1)=3$，即 $a<3$．

故答案为：$(-\infty,3)$．

15．【答案】见试题解答内容

【分析】①令 $f(x)=0$ 求出 $f(x)$ 的零点；

②根据 m 与 -2，0 和 4 的大小关系逐一判断 $f(x)$ 的零点个数即可得出结论．

【解答】解：①令 $-x^2-2x=0$ 可得 $x=-2$ 或 $x=0$，

令 $x-4=0$ 得 $x=4$．

∴当 $m=0$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点．

②若 $m<-2$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,m]$ 上无零点，在 $(m,+\infty)$ 上有 1 个零点 $x=4$，不符合题意；

若 $-2\leqslant m<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,m]$ 上有 1 个零点 $x=-2$，在 $(m,+\infty)$ 上有 1 个零点 $x=4$，符合题意；

若 $0\leqslant m<4$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,m]$ 上有 2 个零点 $x=-2$，$x=0$，在 $(m,+\infty)$ 上有 1 个零点 $x=4$，不符合题意；

若 $m\geqslant 4$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,m]$ 上有 2 个零点 $x=-2$，$x=0$，在 $(m,+\infty)$ 上无零点，符合题意；

∴ $-2\leqslant m<0$ 或 $m\geqslant 4$．

故答案为：①3，②$[-2,0)\cup[4,+\infty)$．

三、解答题（共 6 题，每题 85 分）

16.【答案】(1) 证明见解析；

(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

(3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

【分析】(1) 只需证明 $BD\perp AC$，$PA\perp BD$ 即可证明 $BD\perp$ 平面 PAC；

(2) 通过证明 $AD\perp CD$，$PD\perp CD$ 可知 $\angle PDA$ 是平面 PCD 与平面 CDB 所成角的平面角，根据 $PA=AD$ 可得结果；

(3) 利用等体积法可求得结果．

【解答】证明：(1) 在直角三角形 BAD 中，$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{8-4}=2$，

所以底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $BD\perp AC$，

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$，

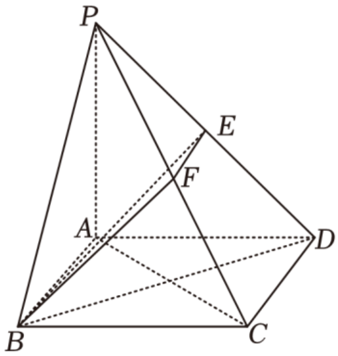
因为 $PA\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC；

解：(2) 因为 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD\perp CD$，

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，

因为 $PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，即 $CD\perp PD$，

取 PD 的中点 E，PC 的中点 F，连接 BE，EF，BF，



因为 $PB=PD=BD=2\sqrt{2}$，所以 $BE\perp PD$，

因为 $EF\parallel CD$，S 所以 $EF\perp PD$，

所以 $\angle BEF$ 为二面角 $B-PD-C$ 的平面角，

在 $\triangle BEF$ 中，

$BE=\sqrt{BD^2-ED^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，

$EF=\frac{1}{2}CD=1$，$BF=\frac{1}{2}PC=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle BEF=\frac{BE^2+EF^2-BF^2}{2BE\cdot EF}=\frac{6+1-3}{2\times\sqrt{6}\times 1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

又二面角 $B-PD-C$ 的平面角为锐角，

则二面角 $B-PD-C$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$；

（3）由题意可知点 C 到平面 PBD 的距离等于点 A 到平面 PBD 的距离，设为 d，

由（1）可得 $PB=BD=PD=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle PBD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$，

由 $V_{P-ABD}=V_{A-PBD}$ 得 $\frac{1}{3}\times PA\times S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle PBD}$，即 $\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{1}{3}d\times 2\sqrt{3}$，

所以 $d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以点 C 到平面 PBD 的距离等于 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

17.【答案】（1）$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

（2）$[\frac{13}{4},\ \frac{19}{4})$.

【分析】（1）利用辅助角公式进行化简，先根据图像的一条对称轴与相邻对称中心的横坐标相差 $\frac{\pi}{4}$，求出周期和 ω，然后根据①②求出 φ 的值即可求出函数的解析式.

（2）根据三角函数的图象变换求出 $g(x)$ 的解析式，求出角的范围，利用函数零点个数建立不等式关系进行求解即可.

【解答】解：（1）$f(x)=2\sin\omega x\cos\varphi+2\sin\varphi-4\sin^2\frac{\omega x}{2}\sin\varphi=2\sin\omega x\cos\varphi+2\sin\varphi-2(1-\cos\omega x)\sin\varphi$

$=2\sin\omega x\cos\varphi+2\sin\varphi-2\sin\varphi+2\cos\omega x\sin\varphi=2\sin(\omega x+\varphi)$，

由于其图象的一条对称轴与相邻对称中心的横坐标相差$\frac{\pi}{4}$，

故$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，即 $T=\pi$，即$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$，

则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

若选①，函数 $f(x)$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到的图像关于 y 轴对称且 $f(0)<0$，

则 $y=2\sin[2(x+\frac{\pi}{3})+\varphi]=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi)$，

此时函数关于 y 轴对称，则$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\because|\varphi|<\pi$，$\therefore$当 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

$\because f(0)<0$，$\therefore f(0)=2\sin\varphi<0$，则 $\sin\varphi<0$，

则 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$成立，$\varphi=\frac{5\pi}{6}$不成立，舍去.

则 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

若选②，函数 $f(x)$ 的图像的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 且 $f(\frac{\pi}{6})>0$.

则 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\because|\varphi|<\pi$，$\therefore$当 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

$\because f(\frac{\pi}{6})>0$，$\therefore 2\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)>0$，

当 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$时，$2\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=2\sin\frac{7\pi}{6}=2\times(-\frac{1}{2})=-1>0$ 不成立，

故 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$成立，则 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

（2）将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{t}(t>0)$倍，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，

则 $g(x)=2\sin(2tx-\frac{\pi}{6})$，

∵$x\in[0,\frac{\pi}{3}]$，∴$2tx\in[0,\frac{2t\pi}{3}]$，$2tx-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{2t\pi}{3}-\frac{\pi}{6}]$，

∵函数 $y=g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上恰有 3 个零点，

∴$2\pi\leqslant\frac{2t\pi}{3}-\frac{\pi}{6}<3\pi$，得 $\frac{13\pi}{6}\leqslant\frac{2t\pi}{3}<\frac{19\pi}{6}$，

得 $\frac{13}{4}\leqslant t<\frac{19}{4}$，

即实数 t 的取值范围是 $[\frac{13}{4},\frac{19}{4})$.

18.【答案】见试题解答内容

【分析】(Ⅰ) 先由频率分布直方图中的数据，频率和为 1 算出 a 的值，再求出是“C 级”种子的概率，然后根据对立事件的概率，即可求得不是“C 级”种子的概率；

(Ⅱ) 先根据频率分布直方图依次求出种子是“A 级”、“B 级”、“C 级”康乃馨的概率，X 的可能取值为 20，25，30，35，40，然后由独立事件的概率逐一求出每个 X 的取值所对应的概率即可得分布列，进而求得数学期望；

(Ⅲ) 根据方差的意义与性质即可作出判断.

【解答】解：(Ⅰ) 设事件 M 为：“从这些康乃馨种子中随机抽取一种，且该种子不是 C 级种子”，

由图表，得 $(0.4+1.2+a+4.0+6.0+4.4+1.2+0.4)\times0.05=1$，解得 $a=2.4$.

由图表，知“C 级”种子的频率为 $(0.4+1.2+2.4)\times0.05=0.2$，

故可估计从这些康乃馨种子中随机抽取一种，该种子是“C 级”的概率为 0.2.

∵事件 M 与事件“从这些康乃馨种子中随机抽取一种，且该种子是 C 级种子”为对立事件，

∴事件 M 的概率 $P(M)=1-0.2=0.8$.

(Ⅱ) 由题意，任取一种种子，恰好是“A 级”康乃馨的概率为 $(4.4+1.2+0.4)\times0.05=0.3$，

恰好是“B 级”康乃馨的概率为 $(4.0+6.0)\times0.05=0.5$，

恰好是“C 级”的概率为 $(0.4+1.2+2.4)\times0.05=0.2$.

而随机变量 X 的可能取值有 20，25，30，35，40，

∴$P(X=20)=0.2\times0.2=0.04$，

$P(X=25)=0.2\times0.5+0.5\times0.2=0.2$，

$P(X=30)=0.5\times0.5+0.3\times0.2+0.2\times0.3=0.37$，

$P(X=35)=0.3\times0.5+0.5\times0.3=0.3$，

$P(X=40)=0.3\times0.3=0.09$.

所以 X 的分布列为：

X	20	25	30	35	40
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

故数学期望 $E(X)=20\times0.04+25\times0.2+30\times0.37+35\times0.3+40\times0.09=31$.

(Ⅲ) 与旧的发芽率数据的方差相比，技术改进后发芽率数据的方差变大了.

19.【答案】（1）椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率$=\frac{1}{2}$.

（2）$\frac{7}{12}$.

【分析】（1）由$|F_1F_2|=2$，连接椭圆 C 的四个顶点所成的四边形的周长为$4\sqrt{7}$，可得 $2c=2$，$4\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{7}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 c，a，b^2，即可得出椭圆 C 的方程与离心率.

（2）由题意可设直线 l_1 的方程为 $my=x+1$，与直线 l_1 垂直的直线 l_2 的方程为$-\frac{1}{m}y=x-1$，P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），直线 l_1 的方程与椭圆方程联立化简，利用一元二次方程的根与系数的关系、弦长公式即可得出$|PQ|$，同理可得$|MN|$，进而得出结论.

【解答】解：（1）∵$|F_1F_2|=2$，连接椭圆 C 的四个顶点所成的四边形的周长为$4\sqrt{7}$，

∴$2c=2$，$4\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{7}$，$a^2=b^2+c^2$，

解得 $c=1$，$a=2$，$b^2=3$，

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

离心率$=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

（2）焦点 F_1（-1，0），

由题意可设直线 l_1 的方程为 $my=x+1$，与直线 l_1 垂直的直线 l_2 的方程为$-\frac{1}{m}y=x-1$，P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），

联立$\begin{cases}my=x+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，化为（$3m^2+4$）$x^2-6my-9=0$，

$\Delta>0$，

$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，

∴$|PQ|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$.

同理可得：$|MN|=\frac{12(1+m^2)}{3+4m^2}$.

∴$\frac{|PQ|+|MN|}{|PQ|\cdot|MN|}=\frac{1}{|MN|}+\frac{1}{|PQ|}=\frac{3+4m^2+3m^2+4}{12(1+m^2)}=\frac{7}{12}$.

20.【答案】（Ⅰ）1.

（Ⅱ）函数 f（x）的极大值为 f（2）$=\ln\frac{4}{ae^2}$.

（Ⅲ）$a\in$（1，e）时，函数 g（x）有且仅有一个零点.

【分析】（Ⅰ）求出函数的导数，利用导数的几何意义，求解切线的斜率．

（Ⅱ）求出导函数，通过导函数的符号，判断函数的单调性，然后求解函数的极值即可．

（Ⅲ）利用函数的导数，解得函数的单调性以及函数的极值，转化求解函数的零点的个数即可．

【解答】解：（Ⅰ）$f(x)$ 定义域为（0，+∞）$f'(x)=\dfrac{2-x}{x}$，$f(1)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在（1，$f(1)$）处切线的斜率为 1．…………

（Ⅱ）$f(x)=2\ln x-x-\ln a$，则 $f'(x)=\dfrac{2-x}{x}$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$．当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减．所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(2)=\ln\dfrac{4}{ae^2}$．…………（10 分）

（Ⅲ）$g'(x)=ae^x-2x$（$1<a<e$），

当 $x\in(-\infty,0]$时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $x\in(-\infty,0]$时单调递增．

而 $g(0)=a>0$，$g(-1)=\dfrac{a}{e}-1<0$.

所以方程 $g(x)=0$ 在 $x\in(-1,0)$ 时有且只有一个根，即方程 $g(x)=0$ 在 $x\in(-\infty,0]$时有且只有一个根．

当 $x>0$ 时，讨论函数 $g(x)$ 的零点个数即讨论方程 $ae^x=x^2$ 根的个数，

即研究方程 $\ln a+x=2\ln x$（$1<a<e$，$x>0$）的根的个数，

即研究函数 $f(x)=2\ln x-x-\ln a$（$1<a<e$，$x>0$）的零点个数．

当 $1<a<e$ 时，$ae^2>e^2$，$f(2)=\ln\dfrac{4}{ae^2}<\ln\dfrac{4}{e^2}<0$，则函数 $f(x)$ 在（0，+∞）上无零点．

综上，当 $a\in(1,e)$ 时，函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点．…………（15 分）

21．【答案】见试题解答内容

【分析】解：(*I*) 根据题中一次“操作”的含义，将原数表改变第 4 列，再改变第 2 行即可；或者改变第 2 行，改变第 4 列也可得（写出一种即可）

(*II*) 每一列所有数之和分别为 2，0，﹣2，0，每一行所有数之和分别为﹣1，1；①如果操作第三列，第一行之和为 $2a-1$，第二行之和为 $5-2a$，列出不等关系解得 a，b；②如果操作第一行，可解得 a 值；

(*III*) 按要求对某行（或某列）操作一次时，则该行的行和（或该列的列和），由负整数变为正整数，都会引起该行的行和（或该列的列和）增大，从而也就使得数阵中 mn 个数之和增加，且增加的幅度大于等于 $1-(-1)=2$，但是每次操作都只

是改变数表中某行（或某列）各数的符号，而不改变其绝对值，显然，数表中 mn 个数之和必然小于等于 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，可见其增加的趋势必在有限次之后终止，终止之时必然所有的行和与所有的列和均为非负整数，故结论成立．

【解答】解：(*I*)

法 1：

1	2	3	- 7
- 2	1	0	1

改变第 4 列得：

1	2	3	7
- 2	1	0	- 1

改变第 2 行得：

1	2	3	7
2	- 1	0	1

法 2：

1	2	3	- 7
- 2	1	0	1

改变第 2 行得：

1	2	3	7
2	- 1	0	- 1

改变第 4 列得：

1	2	3	7
2	- 1	0	1

法 3：

1	2	3	- 7
- 2	1	0	1

改变第 1 列得：

- 1	2	3	7
2	1	0	- 1

改变第 4 列得：

- 1	2	3	7
2	1	0	- 1

（写出一种即可）…（3 分）

（*II*） 每一列所有数之和分别为 2，0，－2，0，每一行所有数之和分别为－1，1；

①如果操作第三列，则

a	a^2-1	a	$-a^2$
$2-a$	$1-a^2$	$-a+2$	a^2

则第一行之和为 $2a-1$，第二行之和为 $5-2a$，

这两个数中，必须有一个为负数，另外一个为非负数，所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$或 $a\geqslant\frac{5}{2}$

当 $a\leqslant\frac{1}{2}$时，则接下来只能操作第一行，

$-a$	$1-a^2$	$-a$	a^2
$2-a$	$1-a^2$	$-a+2$	a^2

此时每列之和分别为 $2-2a$，$2-2a^2$，$2-2a$，$2a^2$，

必有 $2-2a^2\geqslant0$，解得 $a=0$， -1，

当 $a\geqslant\frac{5}{2}$时，则接下来操作第二行，

a	a^2-1	a	$-a^2$
$a-2$	a^2-1	$a-2$	$-a^2$

此时第 4 列和为负，不符合题意；

②如果先操作第一行，

$-a$	$1-a^2$	a	a^2
$2-a$	$1-a^2$	$a-2$	a^2

则每一列之和分别为 $2-2a$，$2-2a^2$，$2a-2$，$2a^2$

当 $a=1$ 时，每列各数之和已经非负，不需要进行第二次操作，舍掉，

当 $a\neq1$ 时，$2-2a$，$2a-2$ 至少有一个为负数，

所以此时必须有 $2-2a^2\geqslant0$，即 $-1\leqslant a\leqslant1$，所以 $a=0$ 或 $a=-1$，

经检验 $a=0$ 或 $a=-1$ 符合要求，

综上 $a=0$ 或 $a=-1$　　　　　　　　　　…（10 分）

（*III*） 证明：按要求对某行（或某列）操作一次时，则该行的行和（或该列的列和）

由负整数变为正整数，都会引起该行的行和（或该列的列和）增大，

从而也就使得数阵中 mn 个数之和增加，且增加的幅度大于等于 $1-(-1)=2$，

但是每次操作都只是改变数表中某行（或某列）各数的符号，而不改变其绝对值，

显然，数表中 mn 个数之和必然小于等于$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，

可见其增加的趋势必在有限次之后终止，终止之时必然所有的行和与所有的列和均为非负整数，故结论成立 …（13 分）