

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

A. $\{x | -4 < x < 3\}$

B. $\{x | -4 < x < -2\}$

C. $\{x | -2 < x < 2\}$

D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z - i| = 1$, z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则

A. $(x+1)^2 + y^2 = 1$

B. $(x-1)^2 + y^2 = 1$

C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$

D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$

3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足

底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名

的“断臂维纳斯”便是如此. 此外，最美人体的头顶至咽喉的长

度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄

金分割比例，且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm,

则其身高可能是

A. 165 cm

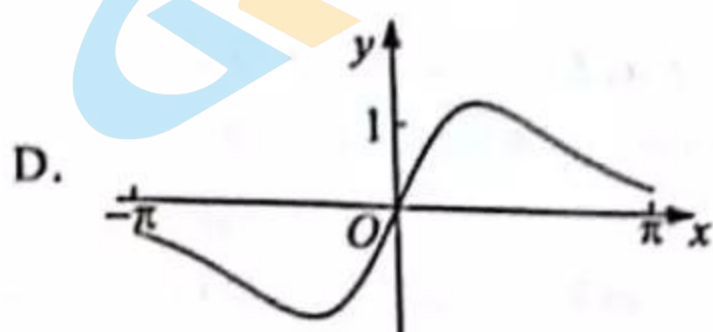
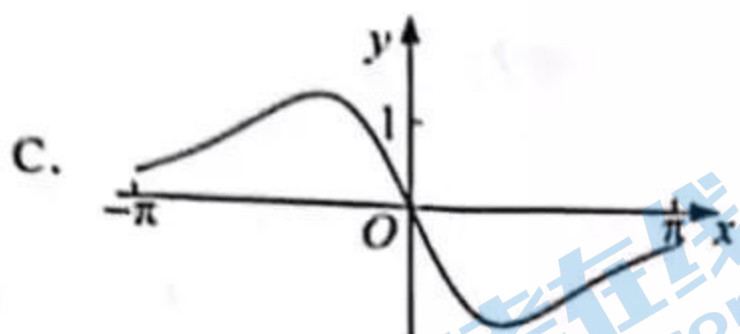
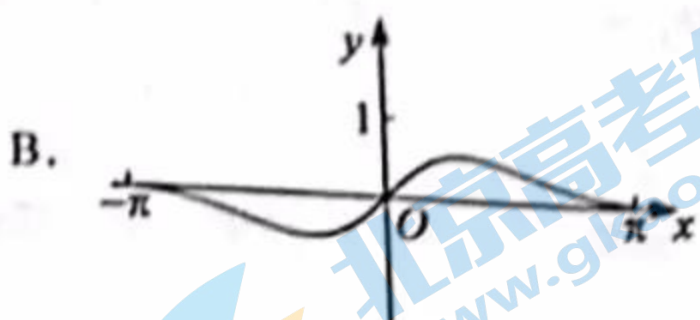
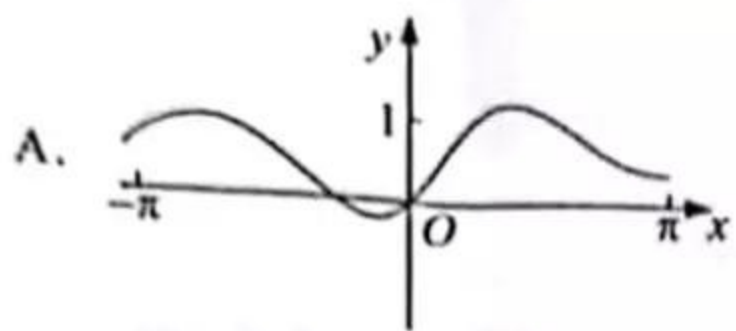
B. 175 cm

C. 185 cm

D. 190 cm



5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“--”, 右图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有3个阳爻的概率是



- A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$, 且 $(a-b) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

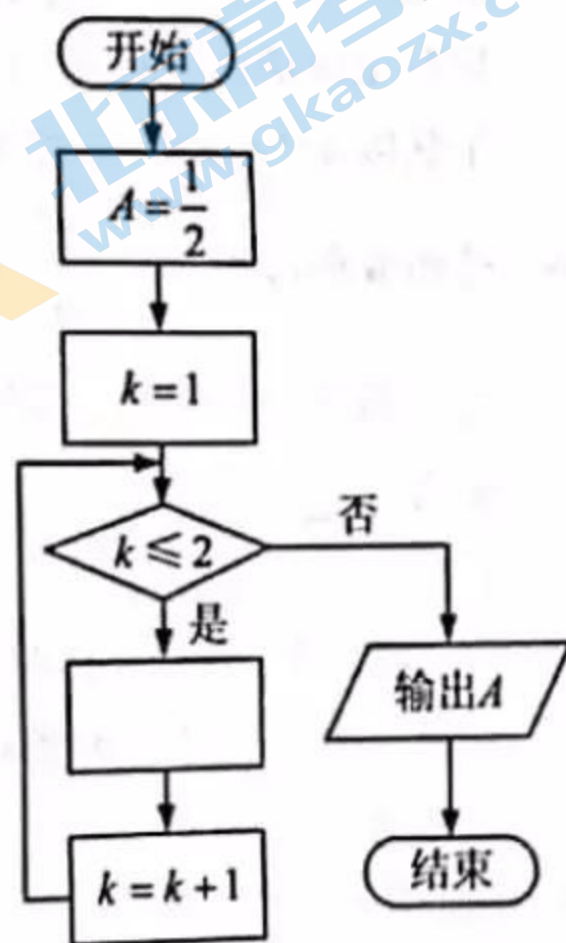
8. 右图是求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入

A. $A = \frac{1}{2+A}$

B. $A = 2 + \frac{1}{A}$

C. $A = \frac{1}{1+2A}$

D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$



9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则

- A. $a_n = 2n - 5$ B. $a_n = 3n - 10$ C. $S_n = 2n^2 - 8n$ D. $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若

$|AF_2| = 2|F_2B|$, $|AB| = |BF_1|$, 则 C 的方程为

- A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

① $f(x)$ 是偶函数

② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点

④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A. ①②④

B. ②④

C. ①④

D. ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$, 则球 O 的体积为

A. $8\sqrt{6}\pi$

B. $4\sqrt{6}\pi$

C. $2\sqrt{6}\pi$

D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_4 = a_6$, 则 $S_5 =$ _____.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4:1 获胜的概率是_____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overline{F_1A} = \overline{AB}$, $\overline{F_1B} \cdot \overline{F_2B} = 0$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

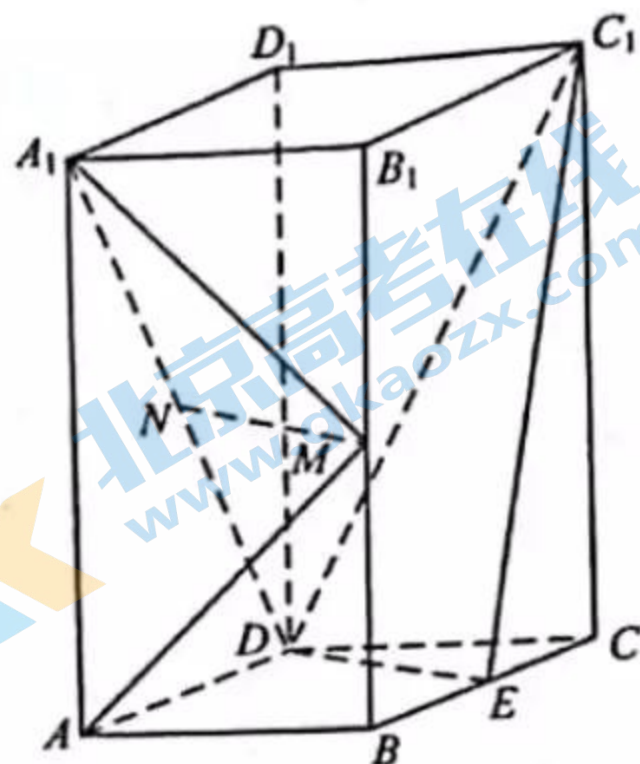
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $\sqrt{2}a + b = 2c$, 求 $\sin C$.

18. (12分)

如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.



(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.

19. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点为 F , 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 与 x 轴的交点为 P .

(1) 若 $|AF|+|BF|=4$, 求 l 的方程;

(2) 若 $\overline{AP}=3\overline{PB}$, 求 $|AB|$.

20. (12分)

已知函数 $f(x)=\sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. (12分)

为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为 X .

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, $p_i (i=0,1,\dots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0, p_8=1, p_i = \alpha p_{i-1} + \beta p_i + c p_{i+1} (i=1,2,\dots,7)$, 其中 $a=P(X=-1), b=P(X=0), c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5, \beta=0.8$.

(i) 证明: $\{p_{i+1}-p_i\} (i=0,1,2,\dots,7)$ 为等比数列;

(ii) 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点 O 为极点，

x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.

- (1) 求 C 和 l 的直角坐标方程；
- (2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 为正数，且满足 $abc = 1$. 证明：

- (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;
- (2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.