2023北京顺义高一（下）期中
数　学

2023. 4

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）复数 $z=2+\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第三象限　（D）第四象限

（2）在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ 等于

（A）$\overrightarrow{AC}$　（B）$\overrightarrow{DB}$　（C）$\overrightarrow{CA}$　（D）$\overrightarrow{BD}$

（3）已知 $\sin\alpha<0$，$\tan\alpha<0$，则 α 的终边所在的象限是

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第三象限　（D）第四象限

（4）为了得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象

（A）向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　（B）向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

（C）向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度　（D）向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

（5）在△ ABC 中，若 $a=\sqrt{3}$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$，则 $b=$

（A）1　（B）$2\sqrt{3}$　（C）2　（D）$\sqrt{3}$

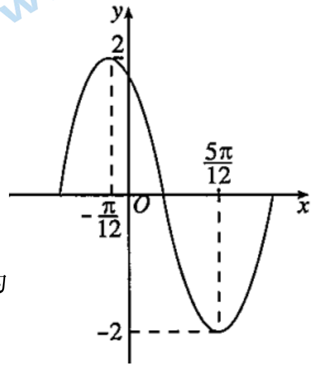
（6）已知向量 $\vec{a}=(m,2)$，$\vec{b}=(3,1)$，若 $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)//\vec{b}$，则实数 $m=$

（A）3　（B）6　（C）-3　（D）-6

（7）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi)$ 在一个周期内的图象如图所示，则此函数的解析式为

（A）$y=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　（B）$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

（C）$y=\sin\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)$　（D）$y=2\sin\left(x+\frac{11\pi}{12}\right)$



（8）若 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的两个单位向量，则 $\vec{a}=\vec{e_1}+\vec{e_2}$ 与 $\vec{b}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}$ 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　（B）$\frac{\pi}{3}$　（C）$\frac{2\pi}{3}$　（D）$\frac{5\pi}{6}$

（9）已知函数 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，如果存在实数 x_1，x_2，使得对任意实数 x，都有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$，那么 $|x_2-x_1|$ 的最小值为

（A）$\frac{\pi}{3}$　（B）$\frac{\pi}{2}$　（C）π　（D）2π

（10）已知 P 是△ ABC 所在平面内一点，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AP}|=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=6$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最大值是

（A）3　　　　（B）2　　　　（C）-2　　　　（D）-3

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡上.

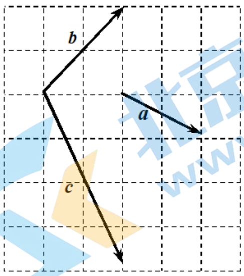
（11）$2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}=$________________.

（12）在平面直角坐标系中，$A(1,2)$，$B(2,3)$，则向量 $\overrightarrow{AB}=$____________; $|\overrightarrow{AB}|=$____________.

（13）若实数 b 满足 $(2+b\mathrm{i})\mathrm{i}=2+2\mathrm{i}$，则 $b=$____________.

（14） 如图，在 6×6 的方格中，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的起点和终点均在格点，且满足 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$ $(x,y\in\mathbf{R})$，

那么 $x+y=$____________.



（15）已知 $f(x)=|\sin x|\cdot\cos x$，$x\in R$.有下列四个说法：

① $f(x)$的一个正周期为 2π；② $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单增；

③ $f(x)$ 值域为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$；④ $f(x)$ 图象关于 $x=\pi$ 对称.

其中，所有正确说法的序号是________________.

三、解答题共 6 道题，共 85 分， 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本小题 15 分）

已知复数 $z=3+4\mathrm{i}$ （i 为虚数单位）.

（I）求复数 z 的模$|z|$;

（II）求复数 z 的共轭复数;

（III）若 z 是关于 x 的方程 $x^2-6x+m=0$ 一个虚根，求实数 m 的值.

（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos 2x+\sin 2x$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递减区间

（18）（本小题 15 分）

已知向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(-2,1)$.

（I）求 $3\vec{a}+\vec{b}$；

（II）设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，求 $\cos\theta$ 的值；

（III）若向量 $\left(k\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，求实数 k 的值.

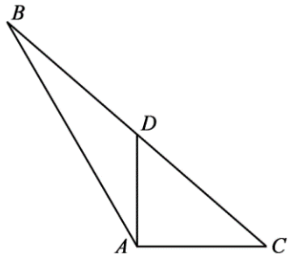
（19）（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=4\cos x\sin(x+\dfrac{\pi}{6})-1$.

（Ⅰ）求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

（20）（本小题 14 分）



在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A=-\dfrac{1}{2},a=2\sqrt{7},b=2$

（Ⅰ）求 c；

（Ⅱ）设 D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp AC$,求△ ABD 的面积.

（21）（本小题 15 分）

对于函数 $y=f(x),x\in D_1$， $y=g(x),x\in D_2$ 及实数 m，若存在 $x_1\in D_1$， $x_2\in D_2$，使得 $f(x_1)+g(x_2)=m$，则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有 “m 关联”性质.

（Ⅰ）分别判断下列两组函数是否具有“2 关联”性质，直接写出结论；

① $f(x)=x$， $x\in[-1,1]$； $g(x)=-x$， $x\in[-1,1]$；

② $f(x)=e^x$， $x\geq 1$； $g(x)=e^x$， $x\leq 1$；

（Ⅱ）若 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos 2x$ 具有 “m 关联”性质，求 m 的取值范围；

（III）已知 $a>0$， $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，且满足：

①在 $[0,2a]$ 上，当且仅当 $x=\dfrac{a}{2}$ 时， $f(x)$ 取得最大值 1；

②对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(a+x)+f(a-x)=0$.

求证： $y_1=\sin\pi x+f(x)$ 与 $y_2=\cos\pi x-f(x)$ 不具有“4 关联”性质.

2022---2023 学年度第二学期期中试卷

高一数学参考答案　　2023. 4

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

ABDCA　BACBD

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分.

（11）$\frac{1}{2}$　（12）$(1,1)$；$\sqrt{2}$（对一空 3 分）

（13）-2（14）1

（15）①③④.（有错不得分，仅选对一个 3 分，仅选对 2 个得 4 分）

三、解答题共 6 道题，共 85 分.

16 解：（I）$|z|=\sqrt{3^2+4^2}$ ……………………………2 分

所以，$|z|=5$ ……………………………4 分

（II）因为 $z=3+4i$，所以 $\bar{z}=3-4i$ ……………………………8 分

（III）因为 $z=3+4i$ 是 $x^2-6x+m=0$ 的一个虚根

所以，$z=3+4i$ 满足方程，即 $(3+4i)^2-6(3+4i)+m=0$ ……………………………11 分

化简可得，$m=25$ ……………………………14 分

17. 解：（I）$f(x)=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)$ ……………………………2 分

$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ ……………………………4 分

因为最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$ ……………………………6 分

所以，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ……………………8 分

（Ⅱ）因为 $y=\sin x$，在 $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$ 上单调递减……………10 分

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 解得 $\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{8}+k\pi$

所以，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right](k\in Z)$ ……………………13 分

18. 解：（Ⅰ）因为 $\vec{a}=(1,0)$，所以 $3\vec{a}=(3,0)$ ……………………2 分

又 $\vec{b}=(-2,1)$，所以 $3\vec{a}+\vec{b}=(1,1)$ ……………………4 分

（Ⅱ）$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+0\times1=-2$ ……………………6 分

又因为 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{5}$ ……………………8 分

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ……………………9 分

所以，$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ……………………11 分

（Ⅲ）因为 $(k\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，所以 $(k\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ ……………………13 分

可得 $k\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2=0$，又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，$(\vec{b})^2=|\vec{b}|^2=5$

所以，$-2k+5=0$，即 $k=\frac{5}{2}$ ……………………15 分

19. 解：（Ⅰ）$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}-1$ ……………………2 分

所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2$ ……………………4 分

（II）$f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$

$=4\cos x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-1$ ……………………5 分

$=4\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-1=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ ……………………7 分

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ ……………………9 分

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ ……………………10 分

所以，当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$ 即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\min}=-1$ ……………………12 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$ ……………………14 分

20. 解：（I）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ……………………2 分

可得 $c^2+2c-24=0$ 解得 $c=4, c=-6$（舍负） ……………………4 分

（II）由（I）知 $c=4$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ……………………6 分

所以，在△ACD 中，$CD=\frac{AC}{\cos C}=\sqrt{7}$ ……………………8 分

又 $BC=2\sqrt{7}$，所以 D 为 BC 中点 ……………………10 分

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$ ……………………12 分

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$ ……………………14 分

（其它解法酌情给分）

21.（I）①具有"2 关联"性质；②不具有"2 关联"性质； ……………………4 分

(II) $f(x)=\sin x\in[-1,1]$，$g(x)=\cos 2x\in[-1,1]$

所以 $[f(x_1)+g(x_2)]\in[-2,2]$，则 $m\in[-2,2]$；……………………………8 分

(III) 因为在 $[0,2a]$ 上，当且仅当 $x=\frac{a}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 1；

又 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，由对称性可知在 $[-2a,0]$ 上，

当且仅当 $x=-\frac{a}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -1。

因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，有性质②，所以 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称，

由 $f(a+x)=-f(a-x)=f(x-a)$，可知 $f(x)$ 的周期为 $2a$。

注意到 $f(x)\in[-1,1]$，$\sin\pi x\in[-1,1]$，$\cos\pi x\in[-1,1]$，……………………(**)

注意到 $f(x_1)=1$，当且仅当 $x_1=\frac{a}{2}+2na,n\in Z$；$\sin\pi x_1=1$ 当且仅当 $x_1=\frac{1}{2}+2k,k\in Z$；

若 $\sin\pi x_1=f(x_1)=1$，则 $\frac{a}{2}+2na=\frac{1}{2}+2k$，从而 $a=\frac{4k+1}{4n+1}$，$k,n\in Z$。

注意到 $f(x_2)=-1$，当且仅当 $x_2=-\frac{a}{2}+2ma,m\in Z$；$\cos\pi x_2=1$ 当且仅当 $x_2=2t,t\in Z$

若 $\cos\pi x_2=1,f(x_2)=-1$，则 $-\frac{a}{2}+2ma=2t$，从而 $a=\frac{4t}{4m-1}$，$t,m\in Z$。

用反证法，假设 $y_1=\sin\pi x+f(x)$ 与 $y_2=\cos\pi x-f(x)$ 具有"4 关联"性质，即存在

$x_1,x_2\in R$，使得 $\sin\pi x_1+f(x_1)+\cos\pi x_2-f(x_2)=4$，根据(**)可知，

此时 $\sin\pi x_1=f(x_1)=1$；并且 $\cos\pi x_2=1,f(x_2)=-1$；从而 $a=\frac{4k+1}{4n+1}=\frac{4t}{4m-1}$，

$k,n,t,m\in Z$，所以 $(4k+1)(4m-1)=4t(4n+1)$，$k,n,t,m\in Z$。

注意到上式等号右边是 4 的倍数，左边不是 4 的倍数，矛盾。

所以不存在 $x_1\in\mathbf{R}$，$x_2\in\mathbf{R}$，使得 $\sin\pi x_1+f(x_1)+\cos\pi x_2-f(x_2)=4$，

所以 $y_1=\sin\pi x+f(x)$ 与 $y_2=\cos\pi x-f(x)$ 不具有"4 关联"性质。证毕…………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。