2024 北京房山高三（上）期末

数　　学

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{-2,0,1,2\}$，$B=\{x|1-x>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{-2,0\}$　　D. $\{-2,0,1,2\}$

2.在复平面内，若复数 z 对应的点为 $(-1,1)$，则 $(-1-\mathrm{i})z=$（　　）

A. 2　　B. $2\mathrm{i}$　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. -2

3.已知向量 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(m,1)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 m 的值为（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

4.$\left(x^3+\frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项是（　　）

A. -32　　B. 32　　C. -23　　D. 23

5.已知 a，b 为非零实数，且 $a>b$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　C. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D. $\frac{1}{ab^2}>\frac{1}{a^2b}$

6.已知直线 l：$y=2x+b$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 相切，则实数 $b=$（　　）

A. 1 或 9　　B. -1 或 9　　C. -1 或 -9　　D. 1 或 -9

7.已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)-f(x)=0$，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，对于实数 a，b，则“$a^2<b^2$”是“$f(a)>f(b)$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8.保护环境功在当代，利在千秋，良好的生态环境既是自然财富，也是经济财富，关系社会发展的潜力和后劲.某工厂将生产产生的废气经过过滤后排放，已知过滤过程中的污染物的残留数量 P（单位：毫米/升）与过滤时间 t（单位：小时）之间的函数关系为 $P=P_0\cdot \mathrm{e}^{-kt}(t\geq 0)$，其中 k 为常数，$k>0$，P_0 为原污染物数量.该工厂某次过滤废气时，若前 9 个小时废气中的污染物恰好被过滤掉 80%，那么再继续过滤 3

小时，废气中污染物的残留量约为原污染物的（参考数据：$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 0.585$）（　　）

A. 12%　　B. 10%　　C. 9%　　D. 6%

9.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为双曲线 C 左支上一动点，Q 为双曲线 C 的渐近线上一动点，且 $|PQ|+|PF_2|$ 最小时，PF_1 与双曲线 C 的另一条渐近线平行，则双曲线 C 的方程可能是（　　）

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

10.数学家祖冲之曾给出圆周率 π 的两个近似值："约率" $\frac{22}{7}$ 与"密率" $\frac{355}{113}$.它们可用"调日法"得到：称小于 3.1415926 的近似值为弱率，大于 3.1415927 的近似值为强率.由于 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$，取 3 为弱率，4 为强率，计算得 $a_1=\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}$，故 a_1 为强率，与上一次的弱率 3 计算得 $a_2=\frac{3+7}{1+2}=\frac{10}{3}$，故 a_2 为强率，继续计算，….若某次得到的近似值为强率，与上一次的弱率继续计算得到新的近似值；若某次得到的近似值为弱率，与上一次的强率继续计算得到新的近似值，依此类推.已知 $a_m=\frac{25}{8}$，则 $m=$（　　）

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.函数 $y=\ln(1-2x)+\frac{2}{x}$ 的定义域是__________.

12.记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$，则 $a_n=$__________.

13.在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b-\frac{\sqrt{2}}{2}c=a\cos C$，则 $\angle A=$__________.

14.已知平面直角坐标系中，动点 M 到 $F(0,-2)$ 的距离比 M 到 x 轴的距离大 2，则 M 的轨迹方程是__________.

15.如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 B_1C 上的动点.给出下列结论：

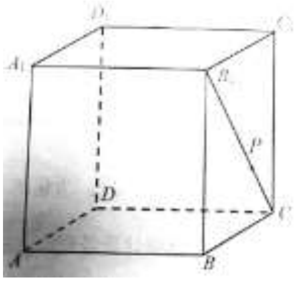
① $AP\perp BD_1$；

② $AP//$ 平面 A_1C_1D；

③直线 AP 与直线 A_1D_1 所成角的范围是 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$；

④点 P 到平面 A_1C_1D 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

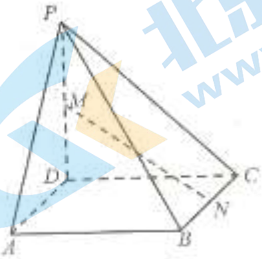
其中所有正确结论的序号是__________.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle PAD$ 为等腰三角形，$PD\perp AD$，$PA=2\sqrt{2}$，底面 $ABCD$ 是正方形，M，N 分别为棱 PD，BC 的中点.



（Ⅰ）求证：MN // 平面 PAB；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值.

条件①：$CD\perp PA$；

条件②：$PB=2\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题 13 分）

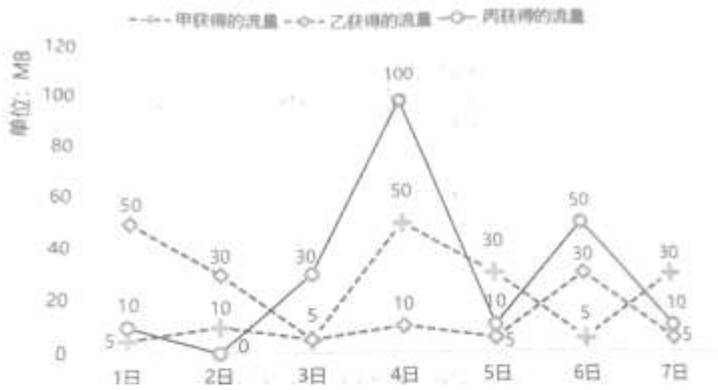
已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，所得函数图象关于原点对称.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-2\cos^2 x+\frac{1}{2}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上有且只有一个零点，求 m 的取值范围.

18.（本小题 13 分）

某移动通讯公司为答谢用户，在其 APP 上设置了签到翻牌子赢流量活动.现收集了甲、乙、丙 3 位该公司用户 2023 年 12 月 1 日至 7 日获得的流量（单位：MB）数据，如图所示.



（Ⅰ）从 2023 年 12 月 1 日至 7 日中任选一天，求该天乙获得流量大于丙获得流量的概率；

（Ⅱ）从 2023 年 12 月 1 日至 7 日中任选两天，设 X 是选出的两天中乙获得流量大于丙获得流量的天数，求 X 的分布列及数学期望 EX ；

（Ⅲ）将甲、乙、丙 3 位该公司用户在 2023 年 12 月 1 日至 7 日获得流量的方差分别记为 ${s_1}^2$， ${s_2}^2$， ${s_3}^2$，试比较 ${s_1}^2$， ${s_2}^2$， ${s_3}^2$ 的大小（只需写出结论）.

19.（本小题 15 分）

设椭圆 C ： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1， A_2，右焦点为 F ，已知 $|A_1F|=3$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）已知点 P 是椭圆 C 上的一个动点（不与顶点重合），直线 A_2P 交 y 轴于点 Q ，若 $\triangle A_1PQ$ 的面积是 $\triangle A_2FP$ 面积的 4 倍，求直线 A_2P 的方程.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\cdot \mathrm{e}^x$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上只有一个极值点，求 a 的取值范围.

21.（本小题 15 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足： $\exists m\in \mathbf{N}^*$， 对于 $\forall n\geq n_0\left(n_0\in \mathbf{N}^*\right)$，都有 $\dfrac{a_{n+m}}{a_n}=q$（其中 q 为常数），则称 $\{a_n\}$ 具有性质“ $Q\left(m,n_0,q\right)$ ”.

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 具有性质“ $Q(4,2,3)$ ”，且 $a_3=1$， $a_5=2$， $a_6+a_9+a_{11}=20$，求 a_2；

（Ⅱ）若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为 2 的等比数列， $b_2=c_3=4$， $b_1+c_1=c_2$， $a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质“ $Q(2,1,3)$ ”，并说明理由；

（III）设$\{a_n\}$既具有性质“$Q(i,1,q_1)$”，又具有性质“$Q(j,1,q_2)$”，其中i，$j\in\mathbf{N}^*$，$i<j$，求证：

$\{a_n\}$具有性质“$Q\left(j-i,i+1,q_2^{\frac{j-i}{j}}\right)$”．

参考答案

1．C

【分析】计算出集合 B 后由交集定义运算可得.

【详解】$B=\{x|1-x>0\}=\{x|x<1\}$，故 $A\cap B=\{-2,0\}$.

故选：C.

2．A

【分析】利用复数的几何意义可得出复数 z，再利用复数的乘法可求得 $(-1-\mathrm{i})z$ 的值.

【详解】在复平面内，若复数 z 对应的点为 $(-1,1)$，由复数的几何意义可得 $z=-1+\mathrm{i}$，

因此，$(-1-\mathrm{i})z=(-1-\mathrm{i})\cdot(-1+\mathrm{i})=2$.

故选：A.

3．B

【分析】先表示出 $\vec{a}\cdot\vec{b},|\vec{a}|,|\vec{b}|$，然后根据 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}$ 求解出 m 的值.

【详解】因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2m$，$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{m^2+1}$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}$，所以 $2m=2\times\sqrt{m^2+1}\times\frac{1}{2}$，

解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去），

故选：B.

4．B

【分析】写出二项式展开式通项，令 x 的指数为零，求出参数的值，代入通项即可得解.

【详解】$\left(x^3+\frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式通项为 $T_{k+1}=\mathrm{C}_4^k\cdot\left(x^3\right)^{4-k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^k=\mathrm{C}_4^k\cdot2^k\cdot x^{12-4k}\ (k=0,1,2,3,4)$，

令 $12-4k=0$，可得 $k=3$，

因此，展开式中的常数项为 $T_3=\mathrm{C}_4^3\cdot2^3=4\times8=32$.

故选：B.

5．D

【分析】对 A、B、C 举反例即可得，对 D 作差计算即可得.

【详解】对 A：若 $0>a>b$，则 $a^2<b^2$，故错误；

对 B：若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故错误；

对 C：若 $a>b>0$，则 $a^2>b^2$，$ab>0$，左右同除 ab，有 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$，故错误；

对 D：由 $a>b$ 且 a，b 为非零实数，则 $\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}=\frac{a-b}{a^2b^2}>0$，即 $\frac{1}{ab^2}>\frac{1}{a^2b}$，故正确.

故选：D.

6．D

【分析】利用圆心到直线的距离等于圆的半径，可求得实数b的值.

【详解】圆C的圆心为$C(1,-2)$，半径为$\sqrt{5}$，

因为直线$l:2x-y+b=0$与圆C相切，则$\dfrac{|2+2+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，即$|b+4|=5$，解得$b=1$或$-9$.

故选：D.

7．C

【分析】根据给定条件，可得函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数，利用充分条件、必要条件的定义，结合偶函数性质及单调性判断即得.

【详解】由函数$f(x)$满足$f(-x)-f(x)=0$，得函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数，而$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，

因此$f(a)>f(b)\Leftrightarrow f(|a|)>f(|b|)\Leftrightarrow|a|<|b|\Leftrightarrow a^2<b^2$，

所以“$a^2<b^2$”是“$f(a)>f(b)$”的充要条件.

故选：C

8．A

【分析】根据题意可得$P_0\cdot e^{-9k}=\dfrac{1}{5}P_0$，解得$e^{-3k}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$，从而求得关于残留数量与过滤时间的函数关系式，再将$t=12$代入即可求得答案.

【详解】因为前9个小时废气中的污染物恰好被过滤掉80%，所以$P_0\cdot e^{-9k}=\dfrac{1}{5}P_0$，即$e^{-9k}=\dfrac{1}{5}$,所以

$e^{-3k}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$.

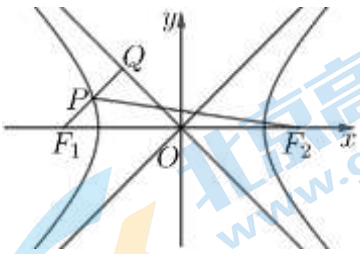
再继续过滤3小时，废气中污染物的残留量约为$P_0\cdot e^{-12k}=P_0\times\left(e^{-3k}\right)^4=P_0\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}}\approx\dfrac{1}{5}\times0.585\times P_0\approx12\%P_0$.

故选：A.

9．C

【分析】根据给定条件，利用双曲线定义确定$|PQ|+|PF_2|$最小时，点Q的位置，进而求出a,b的关系即得.

【详解】双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线为$bx\pm ay=0$，由对称性不妨令点$P$在第二象限，



由双曲线定义得$|PQ|+|PF_2|=|PQ|+|PF_1|+2a\geq|F_1Q|+2a$，当且仅当$P$为线段$F_1Q$与双曲线的交点时取等号，

因此$|PQ|+|PF_2|$的最小值为$|F_1Q|$的最小值与$2a$的和，显然当F_1Q与渐近线$bx+ay=0$垂直时，

$|F_1Q|$取得最小值，而PF_1平行于渐近线$bx-ay=0$，于是双曲线的两条渐近线互相垂直，即$\frac{b}{a}=1$，

则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$x\pm y=0$，显然选项 ABD 不满足，C 满足，

所以双曲线C的方程可能是$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

故选：C

10．B

【分析】根据题意不断计算即可解出．

【详解】因为a_2为强率，由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{10}{3}$可得，$a_3=\frac{3+10}{1+3}=\frac{13}{4}>3.1415927$，即$a_3$为强率；

由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{13}{4}$可得，$a_4=\frac{3+13}{1+4}=\frac{16}{5}>3.1415927$，即$a_4$为强率；

由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{16}{5}$可得，$a_5=\frac{3+16}{1+5}=\frac{19}{6}>3.1415927$，即$a_5$为强率；

由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{19}{6}$可得，$a_6=\frac{3+19}{1+6}=\frac{22}{7}>3.1415927$，即$a_6$为强率；

由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{22}{7}$可得，$a_7=\frac{3+22}{1+7}=\frac{25}{8}=3.125<3.1415926$，即$a_7$为弱率，所以$m=7$，

故选：B.

11．$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

【分析】由真数大于零及分母不等于零计算即可得.

【详解】由题意可得$1-2x>0$、$x\neq0$，故$x<\frac{1}{2}$且$x\neq0$，

故该函数定义域为$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

故答案为：$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

12．$2n-9$

【分析】由等差数列及其前n项和的性质计算即可得.

【详解】设$a_n=a_1+(n-1)d=-7+(n-1)d$，则$S_3=3a_1+3d=-21+3d=-15$，

即$d=2$，故$a_n=-7+2(n-1)=2n-9$.

故答案为：$2n-9$.

13．$\frac{\pi}{4}$

【分析】根据给定条件，利用正弦定理边化角，再利用和角的正弦公式求解即得.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，由 $b-\dfrac{\sqrt{2}}{2}c=a\cos C$ 及正弦定理，得 $\sin B-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C=\sin A\cos C$，

则 $\sin(A+C)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C=\sin A\cos C$，整理得 $\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C$，而 $\sin C>0$，

因此 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{4}$

14．$x^2=-8y(y\le 0)$ 或 $x=0(y>0)$

【分析】设出点 M 的坐标，利用已知列出方程化简即得.

【详解】设点 $M(x,y)$，依题意，$|MF|=|y|+2$，即 $\sqrt{x^2+(y+2)^2}=|y|+2$，整理得 $x^2=4(|y|-y)$，

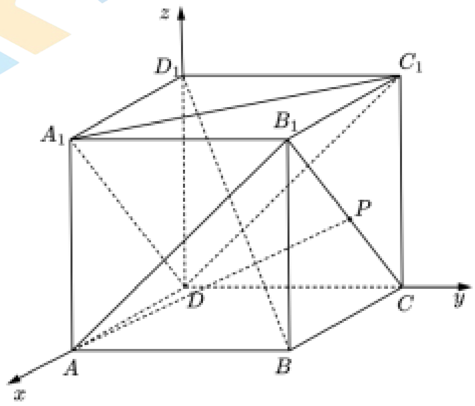
所以 M 的轨迹方程是 $x^2=-8y(y\le 0)$ 或 $x=0(y>0)$.

故答案为：$x^2=-8y(y\le 0)$ 或 $x=0(y>0)$

15．①②④

【分析】建立空间直角坐标系后逐个分析即可得.

【详解】



以 D 为原点，建立如图所示空间直角坐标系，

则有 $D(0,0,0)$、$A(a,0,0)$、$A_1(a,0,a)$、$B(a,a,0)$、$D_1(0,0,a)$、$B_1(a,a,a)$、

$C(0,a,0)$、$C_1(0,a,a)$，

则 $\overrightarrow{B_1C}=(-a,0,-a)$、$\overrightarrow{BD_1}=(-a,-a,a)$、$\overrightarrow{A_1C_1}=(-a,a,0)$、$\overrightarrow{A_1D}=(-a,0,-a)$、

$\overrightarrow{AB_1}=(0,a,a)$、$\overrightarrow{A_1D_1}=(-a,0,0)$、$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,a)$，

设 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1C}$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1P}=(-\lambda a,a,a-\lambda a)$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD_1}=\lambda a^2-a^2+a^2-\lambda a^2=0$，故 $AP\perp BD_1$，故①正确；

设平面 A_1C_1D 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{A_1D}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-ax+ay=0\\ -ax-az=0\end{cases}$，取 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,1,-1)$，

有 $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=-\lambda a+a-a+\lambda=0$，故 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$，又 $AP\not\subset$ 平面 A_1C_1D，则 $AP//$ 平面 A_1C_1D，故②正确；

当 $\lambda=0$ 时，有 $\overrightarrow{AP}=(0,a,a)$，此时 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=0+0+0=0$，即 $AP\perp A_1D_1$，

即此时直线 AP 与直线 A_1D_1 所成角为 $\frac{\pi}{2}$，故③错误；

由 $\vec{n}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PA_1}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AP}=(\lambda a,-a,\lambda a)$，

则 $d=\frac{\left|\overrightarrow{PA_1}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|\lambda a-a-\lambda a|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，故④正确.

故答案为：①②④.

【点睛】关键点睛：对空间中线上动点问题，可设出未知数表示该动点分线段所得比例，从而用未知数的变化来体现动点的变化.

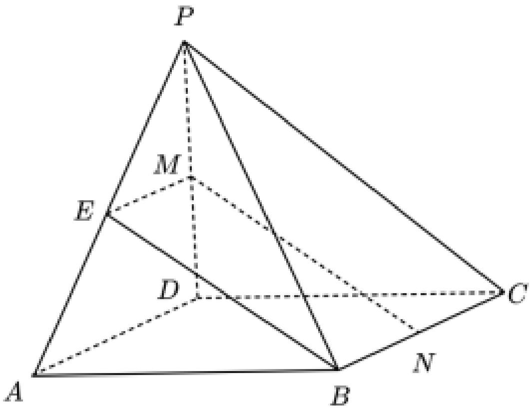
16．(1)证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【分析】（1）由线面平行的判定定理即可得；

（2）选①，由题意及 $CD\perp PA$ 去推导得到 PD、CD、AD 两两垂直，即可建立空间直角坐标系解决问题；选②，由题意及 $PB=2\sqrt{3}$ 结合勾股定理的逆定理去推导得到 PD、CD、AD 两两垂直，即可建立空间直角坐标系解决问题.

【详解】（1）



连接点 B 与 AP 中点 E、连接 ME，又 M，N 分别为棱 PD，BC 的中点，

故 $ME//AD$、$ME=\frac{1}{2}AD$，又底面 $ABCD$ 是正方形，

故 $BN//AD$、$BN=\frac{1}{2}AD$，故 $ME//BN$ 且 $ME=BN$，

故四边形 $MEBN$ 为平行四边形，故 $MN//EB$，

又 $EB\subset$ 平面 PAB，$MN\not\subset$ 平面 PAB，故 $MN//$ 平面 PAB；

（2）选条件①：$CD\perp PA$，

由 $PD\perp AD$ 且 $\triangle PAD$ 为等腰三角形，故 $PD=AD$，又 $PA=2\sqrt{2}$，

故 $PD=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{2}=2$，有 $PD=AD=AB=BC=CD=2$，

由$CD\perp PA$，$CD\perp AD$，PA、$AD\subset$平面PAD，$PA\cap AD=A$，

故$CD\perp$平面PAD，又$PD\subset$平面PAD，故$CD\perp PD$，

故PD、CD、AD两两垂直，故可以D为原点，建立如图所示空间直角坐标系，

有$D(0,0,0)$、$P(0,0,2)$、$B(2,2,0)$、$C(0,2,0)$、$M(0,0,1)$、$N(1,2,0)$，

则$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$、$\overrightarrow{PB}=(2,2,-2)$、$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$，

令平面PBC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+2y-2z=0\\ 2y-2z=0\end{cases}$，令$y=1$，则$\vec{n}=(0,1,1)$，

则$\cos\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{MN}||\vec{n}|}=\dfrac{2-1}{\sqrt{1+4+1}\times\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

故MN与平面PBC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

条件②：$PB=2\sqrt{3}$，

由$PD\perp AD$且$\triangle PAD$为等腰三角形，故$PD=AD$，又$PA=2\sqrt{2}$，

故$PD=AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{2}=2$，有$PD=AD=AB=BC=CD=2$，

由$PB=2\sqrt{3}$，则$PB^2=PA^2+AB^2$，故$PA\perp AB$，又$AB//CD$，

故$CD\perp PA$，又$CD\perp AD$，PA、$AD\subset$平面PAD，$PA\cap AD=A$，

故$CD\perp$平面PAD，又$PD\subset$平面PAD，故$CD\perp PD$，

故PD、CD、AD两两垂直，故可以D为原点，建立如图所示空间直角坐标系，

有$D(0,0,0)$、$P(0,0,2)$、$B(2,2,0)$、$C(0,2,0)$、$M(0,0,1)$、$N(1,2,0)$，

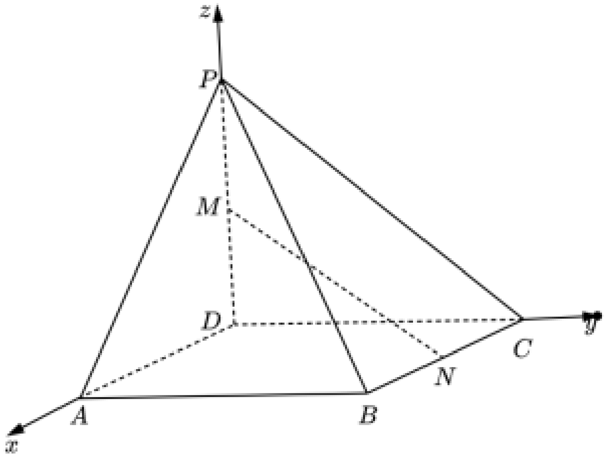
则$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$、$\overrightarrow{PB}=(2,2,-2)$、$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$，

令平面PBC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+2y-2z=0\\ 2y-2z=0\end{cases}$，令$y=1$，则$\vec{n}=(0,1,1)$，

则$\cos\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{MN}||\vec{n}|}=\dfrac{2-1}{\sqrt{1+4+1}\times\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

故MN与平面PBC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



17．(1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$

(2) $\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$

【分析】(1）求出平移后所得函数的解析式，根据正弦型函数的奇偶性，结合φ的取值范围可求得φ的值；

（2）利用三角恒等变换化简得出$g(x)=\sin 2x-\frac{1}{2}$，由$0<x<m$可得$0<2x<2m$，结合题意可得出关于m的不等式，解之即可.

【详解】(1）解：将函数$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象上所有点向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，

可得到函数$y=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$，

由题意可知，函数$y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$为奇函数，则$\varphi-\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

可得$\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

（2）解：由（1）可知，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x+\cos 2x$，

则$g(x)=f(x)-2\cos^2 x+\frac{1}{2}=\sin 2x+\cos 2x-(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}=\sin 2x-\frac{1}{2}$，

因为$0<x<m$，则$0<2x<2m$，

由$g(x)=0$，可得$\sin 2x=\frac{1}{2}$，

因为$g(x)$在区间$(0,m)$上有且只有一个零点，则$\frac{\pi}{6}<2m\le\frac{5\pi}{6}$，解得$\frac{\pi}{12}<m\le\frac{5\pi}{12}$.

因此，实数m的取值范围是$\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$.

18．(1) $\frac{2}{7}$

(2) X 的分布列见解析， $E\left(x\right)=\frac{4}{7}$

(3) $s_3^2 > s_1^2 = s_2^2$

【分析】（1）利用古典概型计算公式进行求解即可；

（2）利用古典概型计算公式，结合数学期望公式进行求解即可.

（3）根据数据的集中趋势进行判断即可.

【详解】（1）由图可知，七天中只有 1 日、2 日乙获得流量大于丙获得流量，

所以该天乙获得流量大于丙获得流量的概率为 $\frac{2}{7}$；

（2）由（1）可知七天中只有 1 日、2 日乙获得流量大于丙获得流量，

因此 $X=0,1,2$，

$P\left(X=0\right)=\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{10}{21}$， $P\left(X=2\right)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$， $P\left(X=1\right)=1-\frac{10}{21}-\frac{1}{21}=\frac{10}{21}$，

所以 X 的分布列如下图所示：

X	0	1	2
P	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

$E\left(X\right)=0\times\frac{10}{21}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{1}{21}=\frac{4}{7}$；

（3）根据图中数据信息，甲、乙七天的数据相同，都是 1 个 50,2 个 30,1 个 10,3 个 5；而且丙的的数据最分散，

所以， $s_3^2 > s_1^2 = s_2^2$.

19．(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2) $3x\pm 2y-6=0$

【分析】（1）由题意计算即可得；

（2）设出直线，联立曲线，得到 P、Q 两点的纵坐标，结合面积公式计算即可得.

【详解】（1）由 $\left|A_1F\right|=a+c=3$， $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，解得 $a=2$， $c=1$，故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=3$，

即椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则 $A_1\left(-2,0\right)$、$A_2\left(2,0\right)$、$F\left(1,0\right)$，

由题意可得直线 A_2P 斜率存在且不为 0，设 $l_{A_2P}: x=my+2$，

令 $x=0$，则 $y=-\frac{2}{m}$，故 $Q\left(0,-\frac{2}{m}\right)$，

联立 $\begin{cases}x=my+2\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 x 得 $\left(3m^2+4\right)y^2+12my=0$，

即 $\left[\left(3m^2+4\right)y+12m\right]y=0$，故 $y=0$ 或 $y=\frac{-12m}{3m^2+4}$，

由 $A_2(2,0)$，故 $y_P=\frac{-12m}{3m^2+4}$，

则 $S_{\triangle A_1PQ}=\left|S_{\triangle A_1A_2Q}-S_{\triangle A_1A_2P}\right|=\left|\frac{1}{2}\times4\left|y_Q\right|-\frac{1}{2}\times4\left|y_P\right|\right|=2\left\|y_Q\right|-\left|y_P\right\|$，

又 $S_{\triangle A_2FP}=\frac{1}{2}\times(2-1)\left|y_P\right|=\frac{\left|y_P\right|}{2}$，即 $2\left\|y_Q\right|-\left|y_P\right\|=4\times\frac{\left|y_P\right|}{2}=2\left|y_P\right|$，

即 $\left\|y_Q\right|-\left|y_P\right\|=\left|y_P\right|$，

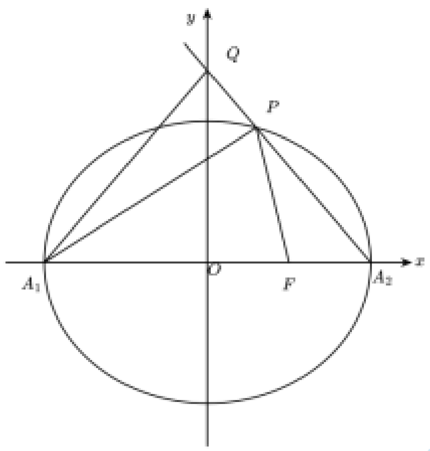
若 $\left|y_Q\right|>\left|y_P\right|$，则 $\left|y_Q\right|=2\left|y_P\right|$，即 $\frac{2}{|m|}=2\times\frac{|-12m|}{3m^2+4}$，

即 $3m^2+4=12m^2$，即 $m^2=\frac{4}{9}$，则 $m=\pm\frac{2}{3}$，

若 $\left|y_Q\right|<\left|y_P\right|$，则 $\left|y_P\right|-\left|y_Q\right|=\left|y_P\right|$，即 $\left|y_Q\right|=0$，不符，故舍去，

即 $m=\pm\frac{2}{3}$，故 $l_{A_2P}:x=\pm\frac{2}{3}y+2$，

即直线 A_2P 的方程为 $3x\pm2y-6=0$.



20．(1) $y=\mathrm{e}$

(2) $\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$

(3) $(0,+\infty)$

【分析】（1）当 $a=0$ 时，求出 $f(1)$、$f'(1)$ 的值，利用导数的几何意义可求得所求切线的方程；

（2）当$a=1$时，求出$f'(x)$，利用函数的单调性与导数的关系可求得函数$f(x)$的单调递增区间；

（3）令$g(x)=ax^2+x-1$，分析可知，函数$g(x)$在$(0,1)$上有且只有一个异号零点，对实数a的取值进行分类讨论，结合题意可得出关于实数a的不等式，综合可得出实数a的取值范围.

【详解】（1）解：当$a=0$时，$f(x)=\frac{e^x}{x}$，则$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，所以，$f(1)=e$，$f'(1)=0$，

故当$a=0$时，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-e=0$，即$y=e$.

（2）解：当$a=1$时，$f(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)e^x=\frac{(x+1)e^x}{x}$，该函数的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，

$f'(x)=\frac{(x+2)xe^x-(x+1)e^x}{x^2}=\frac{(x^2+x-1)e^x}{x^2}$，

由$f'\ \ x\ \ >0$，即$x^2+x-1>0$，解得$x<-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$x>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

因此，当$a=1$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$.

（3）解：因为$f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\cdot e^x$，则$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+a-\frac{1}{x^2}\right)e^x=\frac{(ax^2+x-1)e^x}{x^2}$，

令$g(x)=ax^2+x-1$，因为函数$f(x)$在$(0,1)$上有且只有一个极值点，

则函数$g(x)$在$(0,1)$上有一个异号零点，

当$a=0$时，对任意的$x\in(0,1)$，$g(x)=x-1<0$，不合乎题意；

当$a>0$时，函数$g(x)=ax^2+x-1$在$(0,1)$上单调递增，

因为$g(0)=-1<0$，只需$g(1)=a>0$，合乎题意；

当$a<0$时，函数$g(x)$的图象开口向下，对称轴为直线$x=-\frac{1}{2a}>0$，

因为$g(0)=-1<0$，只需$g(1)=a>0$，不合乎题意，舍去.

综上所述，实数a的取值范围是$(0,+\infty)$.

21．(1)$\frac{5}{3}$

(2)$\{a_n\}$不具有性质“$Q(2,1,3)$”，理由见解析

(3)证明见解析

【分析】（1）由$\{a_n\}$具有性质“$Q(4,2,3)$”，可得当$n\geq 2$时，$\frac{a_{n+4}}{a_n}=3$，结合题意计算即可得；

（2）由题意计算出a_n通项公式后，检验$\frac{a_{n+2}}{a_n}$是否恒等于3即可得；

（3）借助$\{a_n\}$既具有性质“$Q(i,1,q_1)$”，又具有性质“$Q(j,1,q_2)$”，则当$n\geq 1$时，有$\frac{a_{n+i}}{a_n}=q_1$，$\frac{a_{n+j}}{a_n}=q_2$，则有$\frac{a_{1+i}}{a_1}\times\frac{a_{2+i}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{j+i}}{a_j}=q_1^j$，$\frac{a_{1+j}}{a_1}\times\frac{a_{2+j}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{i+j}}{a_i}=q_2^i$，通过运算得到$q_1^j=q_2^i$，从而可验证对任意的$n\geq i+1$时，是否有$\frac{a_{n+j-i}}{a_n}=q_2^{\frac{j-i}{j}}$即可得.

【详解】（1）由$\{a_n\}$具有性质“$Q(4,2,3)$”，则当$n\geq 2$时，$\frac{a_{n+4}}{a_n}=3$，

故$a_6=3a_2$，$a_9=3a_5$，$a_{11}=3a_7=9a_3$，又$a_3=1$，$a_5=2$，

故$a_6+a_9+a_{11}=3a_2+3a_5+9a_3=3a_2+3\times2+9\times1=20$，

即$a_2=\frac{5}{3}$；

（2）$\{a_n\}$不具有性质“$Q(2,1,3)$”，理由如下：

设$b_n=b_1+(n-1)d$，$c_n=c_1\cdot 2^{n-1}$，由$b_2=c_3=4$，$b_1+c_1=c_2$，

即有$\begin{cases}b_1+d=4c_1=4\\ b_1+c_1=2c_1\end{cases}$，解得$\begin{cases}b_1=c_1=1\\ d=3\end{cases}$，故$b_n=3n-2$，$c_n=2^{n-1}$，

则$a_n=b_n+c_n=2^{n-1}+3n-2$，有$a_{n+2}=2^{n+2-1}+3(n+2)-2=2^{n+1}+3n+4$，

则$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{2^{n+1}+3n+4}{2^{n-1}+3n-2}$，不恒等于3，故$\{a_n\}$不具有性质“$Q(2,1,3)$”；

（3）由$\{a_n\}$既具有性质“$Q(i,1,q_1)$”，又具有性质“$Q(j,1,q_2)$”，

即当$n\geq 1$时，有$\frac{a_{n+i}}{a_n}=q_1$，$\frac{a_{n+j}}{a_n}=q_2$，

则有$\frac{a_{1+i}}{a_1}\times\frac{a_{2+i}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{j+i}}{a_j}=q_1^j$，$\frac{a_{1+j}}{a_1}\times\frac{a_{2+j}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{i+j}}{a_i}=q_2^i$，

由$i<j$，故$\dfrac{\frac{a_{1+i}}{a_1}\times\frac{a_{2+i}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{j+i}}{a_j}}{\frac{a_{1+j}}{a_1}\times\frac{a_{2+j}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{i+j}}{a_i}}=\frac{q_1^j}{q_2^i}=\frac{a_{1+i}a_{2+i}\cdots a_j}{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j}=1$，

故$q_1^j=q_2^i$，即$q_1=q_2^{\frac{i}{j}}$，由$\frac{a_{n+i}}{a_n}=q_1$，$\frac{a_{n+j}}{a_n}=q_2$，则$\frac{a_{n+j}}{a_{n+i}}=\frac{q_2}{q_1}$，

当$n\geq i+1$，即$n-i\geq 1$时，有$\frac{a_{n-i+j}}{a_{n-i+i}}=\frac{a_{n+j-i}}{a_n}=\frac{q_2}{q_1}=\frac{q_2}{q_2^{\frac{i}{j}}}=q_2^{\frac{j-i}{j}}$，

即对任意的$n\geq i+1$时，有$\frac{a_{n+j-i}}{a_n}=q_2^{\frac{j-i}{j}}$，即$\{a_n\}$具有性质“$Q\left(j-i,i+1,q_2^{\frac{j-i}{j}}\right)$”.

【点睛】关键点睛：本题关键点在于通过对数列新定义的分析，从而得到$\frac{a_{n+i}}{a_n}=q_1$，$\frac{a_{n+j}}{a_n}=q_2$，并由此得到

$\frac{a_{1+i}}{a_1}\times\frac{a_{2+i}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{j+i}}{a_j}=q_1^j$， $\frac{a_{1+j}}{a_1}\times\frac{a_{2+j}}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{i+j}}{a_i}=q_2^i$，从而得出 $q_1^j=q_2^i$.