2022 北京二十中高三 12 月月考

数　　学

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$　　C. $\{x|1<x<3\}$　　D. $\{x|x>2或x<1\}$

2. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程是（　　）

A. $x=-\frac{1}{2}$　　B. $y=-\frac{1}{2}$　　C. $x=-1$　　D. $y=-1$

3. 下列函数中最小正周期为π的是（　　）

① $f(x)=\cos x\cdot\sin x$；

② $f(x)=\cos x+\sin x$；

③ $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$；

④ $f(x)=2\sin^2 x$

A. ①②　　B. ②④　　C. ①③④　　D. ①②④

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d　等差数列，S_n 为其前 n 项和．若 $S_3=3a_1+3$，则 $d=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 已知 α，β 是两个不重合的平面，m，l 是两条不重合的直线，下列结论不正确的是（　　）

A. $l\perp\alpha$，$m/\!/l\Rightarrow m\perp\alpha$　　B. $l\perp\alpha$，$m\perp\alpha\Rightarrow m/\!/l$

C. $l\perp\alpha$，$\alpha/\!/\beta\Rightarrow l\perp\beta$　　D. $l\perp\alpha$，$m\perp l\Rightarrow m/\!/\alpha$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$AC=3$，D 是 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 不确定

7　若 $a>b>1$，$0<c<1$，则（　　）

A. $c^b<c^a$　　B. $\log_c a>\log_c b$　　C. $a^c<b^c$　　D. $\log_a c>\log_b c$

8. 在 ΔABC 中，"$\cos A\cos B\cos C<0$"是"ΔABC 为钝角三角形"　（　）

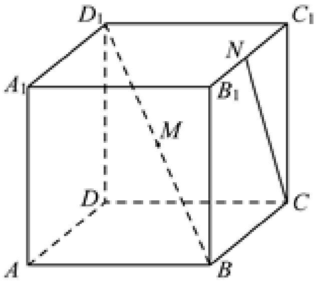
A. 充分必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 在平面直角坐标系中，A，B 是直线 $x+y=m$ 上的两点，且 $|AB|=10$．若对于任意点 $P(\cos\theta,\sin\theta)(0\le\theta<2\pi)$，存在 A，B 使 $\angle APB=90^\circ$ 成立，则 m 的最大值为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

10. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为 BD_1,B_1C_1 的中点，点 P 在正方体的表面上运动，且满足 $MP\perp CN$，则下列说法正确的是（　　）



A. 点 P 可以是棱 BB_1 的中点　　B. 线段 MP 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. 点 P 的轨迹是正方形　　D. 点 P 轨迹的长度为 $2+\sqrt{5}$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若复数 $(2-i)(a+2i)$ 是纯虚数，则实数 $a=$________

12. 若点 $P(2,0)$ 到双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 一条渐近线的距离为 1，则 $a=$______.

13. 已知圆 C：$x^2-2x+y^2=0$，则圆心坐标为__________；若直线 l 过点 $(0,2)$ 且与圆 C 相切，则直线 l 的方程是__________.

14. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

①若 $f(0)=1$，则 $\varphi=$__________；

②若 $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $f(x+2)-f(x)=4$ 成立，则 ω 的最小值是__________.

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于任意 $x_1\in D$，存在 $x_2\in D$，使得 $f(x_1)f(x_2)=1$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 M，给出下列四个结论：

①函数 $y=x^3-x$ 不具有性质 M；

②函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 具有性质 M；

③若函数 $y=\log_8(x+2)$，$x\in[0,t]$ 具有性质 M，则 $t=510$；

④若函数 $y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$ 具有性质 M，则 $a=5$.

则正确的序号为__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出相应文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期及 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间;

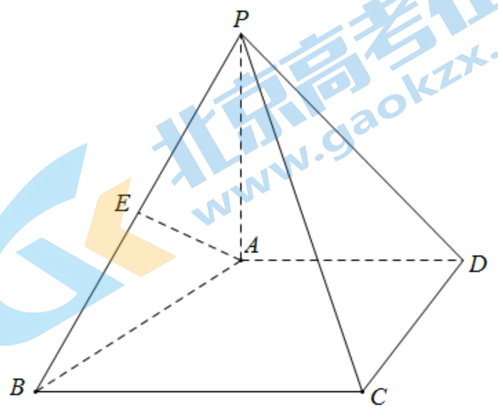
（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,a\right]$ 上有且只有一个零点，求实数 a 的取值范围.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $a=2t-1$，$b=4t$，$c=4t+1\left(t>1\right)$.

（1）当 $t=3$ 时．求 $\cos B$；

（2）是否存在正整数 t，使得角 C 为钝角？如果存在，求出 t 的值，并求此时 $\triangle ABC$ 的面积；如果不存在．说明理由．

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$，$PC=2\sqrt{3}$，E 为 PB 中点，<u>（1）</u>.



（1）求证：四边形 $ABCD$ 是直角梯形；

（2）并求直线 AE 与平面 PCD 所成角的正弦值.

从① $CD\perp BC$；② $BC//$ 平面 PAD 这两个条件中选一个，补充在上面问题中，并完成解答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^x+a}-1$，$a\neq 0$.

（1）当 $a=1$ 时，

①求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

②求证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一极大值点；

（2）若 $f(x)$ 没有零点，求 a 的取值范围.

20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，以椭圆的四个顶点为顶点的四边形周长为 $4\sqrt{5}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）直线 $y=kx+m\left(m\neq 0\right)$ 与椭圆 C 交于 A 、B 两点，与 y 轴交于点 P，线段 AB 的垂直平分线与 AB 交于点 M，与 y 轴交于点 N，O 为坐标原点.如果 $\angle MOP=2\angle MNP$ 成立，求 k 的值.

21. 已知无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $\left|a_{n+1}-a_n\right|=1$，其中 $n=1，2，3，\ldots$.对于数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的一项 a_k，若包含 a_k

的连续 $j\left(j\geq 2\right)$ 项 a_i， a_{i+1}， …， $a_{i+j-1}\left(i\leq k\leq i+j-2\right)$ 满足 $a_i<a_{i+1}<\cdots<a_{i+j-1}$ 或 $a_i>a_{i+1}>\cdots>a_{i+j-1}$，则称 a_i， a_{i+1}， …， a_{i+j-1} 为包含 a_k 的长度为 j 的“单调片段”.

（1）若 $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$，写出所有包含 a_3 的长度为 3 的“单调片段”；

（2）若 $\forall k\in\mathrm{N}^*$，包含 a_k 的“单调片段”长度的最大值都等于 2，并且 $a_3=9$，求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（3）若 $\forall k\in\mathrm{N}^*$，$k\geq 2$，都存在包含 a_k 的长度为 k 的“单调片段”，求证：存在 $N_0\in\mathrm{N}^*$，使得 $n\geq N_0$ 时，都有 $\left|a_n-a_{N_0}\right|=n-N_0$.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】A

【解析】

【分析】先解出集合 B，在计算并集即可.

【详解】$(x-1)(x-3)<0, \therefore B=\{x|1<x<3\}$，$A=\{x|x>2\}$

$A\cup B=\{x|x>1\}$.

故选：A

2. 【答案】A

【解析】

【分析】由抛物线的方程直接求解准线方程即可.

【详解】解：由抛物线 $y^2=2x$，可得其准线方程是 $x=-\frac{1}{2}$.

故选：A.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】根据同角三角函数关系、三角恒等变换化简函数，从而可判断各三角函数的最小正周期，即可得答案.

【详解】解：① $f(x)=\cos x\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故①符合；

② $f(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $f(x)$ 的最小正周期为

$\frac{2\pi}{1}=2\pi$，故②不符合；

③ $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故③符合；

④ $f(x)=2\sin^2 x=1-\cos 2x$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故④符合.

故选：C.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】

根据$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，且$S_3=3a_1+3$，利用等差数列的前n项和公式求解.

【详解】因为$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，且$S_3=3a_1+3$，

所以$3a_1+3d=3a_1+3$，

解得$d=1$，

故选：C

5. 【答案】D

【解析】

【分析】根据空间中直线与平面的位置关系逐项判断即可.

【详解】解：若$l\perp\alpha$，$m/\!/l$，则$m\perp\alpha$，故A正确；

若$l\perp\alpha$，$m\perp\alpha$，则$m/\!/l$，故B正确；

若$l\perp\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，则$l\perp\beta$，故C正确；

若$l\perp\alpha$，$m\perp l$，则$m\subset\alpha$或$m//\alpha$，故D不正确.

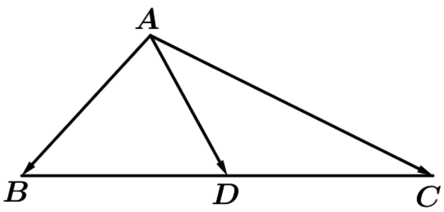
故选：D.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】

【详解】



$\because D$是BC边的中点，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$,由向量的运算法则可得：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)==\frac{1}{2}\times\left(3^2-1^2\right)=4$，故选B.

7. 【答案】D

【解析】

【分析】利用指数函数、对数函数、幂函数的单调性即可得出结果.

【详解】对于A，当$0<c<1$时，$y=c^x$单调递减，所以由$a>b$可得$c^a<c^b$，故A错误；

对于B，当$0<c<1$时，$y=\log_c x$单调递减，所以由$a>b$可得$\log_c a<\log_c b$，故B错误；

对于C，当$0<c<1$时，$y=x^c$在$(0,+\infty)$单调递增，由$a>b>1$可得$a^c>b^c$，故C错误；

对于D，当$0<c<1$时，$y=\log_c x$单调递减，所以由$a>b>1$可得$\log_c a<\log_c b<0$，

则$\frac{1}{\log_c a}>\frac{1}{\log_c b}$，即$\log_a c>\log_b c$，故D正确.

故选：D.

8. 【答案】A

【解析】

【详解】由题设条件可知 $\cos A, \cos B, \cos C$ 中必有一个是负数,即三个内角中必有一个是钝角,所以是钝角三角形,是充分性成立;

反之,若三角形是钝角三角形,则 $\cos A, \cos B, \cos C$ 的积必为负数,即是必要性成立,

“$\cos A\cos B\cos C<0$”是“ΔABC 为钝角三角形”的充分必要条件，应选答案 A.

9. 【答案】C

【解析】

【分析】

可得 P 是圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点，且需存在 A， B，使点 P 又在以 $|AB|$ 为直径的圆上，故只需满足圆 $x^2+y^2=1$ 上点到直线 $x+y=m$ 的最远距离小于等于 5 即可求出.

【详解】设 $P(x,y)$，则 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$，满足 $x^2+y^2=1$，

则点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，

又存在 A， B 使 $\angle APB=90^{\circ}$ 成立，则点 P 又在以 $|AB|$ 为直径的圆上，

$\because P$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点， A， B 是直线 $x+y=m$ 上的两点，

则应满足圆 $x^2+y^2=1$ 上点到直线的最远距离小于等于 5，

原点到直线的距离为 $\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$，

则只需满足 $\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}+1\le 5$，解得 $m\in\left[-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right]$.

故选：C.

【点睛】本题考查只需与圆的位置关系，解题的关键是得出圆 $x^2+y^2=1$ 上点到直线 $x+y=m$ 的最远距离小于等于 5.

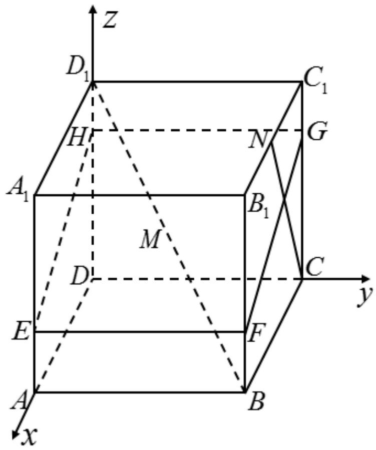
10. 【答案】D

【解析】

【分析】

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以点 D 为坐标原点，分别以 DA 、DC 、DD_1 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，根据 $MP\perp CN$，确定点 P 的轨迹，在逐项判断，即可得出结果.

【详解】



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以点 D 为坐标原点，分别以 DA、DC、DD_1 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，

因为该正方体的棱长为1，M,N 分别为 BD_1,B_1C_1 的中点，

则 $D(0,0,0)$，$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$N\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，$C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{CN}=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，设 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{MP}=\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2},z-\frac{1}{2}\right)$，

因为 $MP\perp CN$，

所以 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+z-\frac{1}{2}=0$，$2x+4z-3=0$，当 $x=1$ 时，$z=\frac{1}{4}$；当 $x=0$ 时，$z=\frac{3}{4}$；

取 $E\left(1,0,\frac{1}{4}\right)$，$F\left(1,1,\frac{1}{4}\right)$，$G\left(0,1,\frac{3}{4}\right)$，$H\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$，

连接 EF，FG，GH，HE，则 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$，

所以四边形 $EFGH$ 为矩形，

则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CN}=0$，$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CN}=0$，即 $EF\perp CN$，$EH\perp CN$，

又 $EF\cap EH=E$，且 $EF\subset$ 平面 $EFGH$，$EH\subset$ 平面 $EFGH$，

所以 $CN\perp$ 平面 $EFGH$，

又 $\overrightarrow{EM}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，$\overrightarrow{MG}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，所以 M 为 EG 中点，则 $M\in$ 平面 $EFGH$，

所以，为使 $MP\perp CN$，必有点 $P\in$ 平面 $EFGH$，又点 P 在正方体的表面上运动，

所以点 P 的轨迹为四边形 $EFGH$，

因此点 P 不可能是棱 BB_1 的中点，即 A 错；

又 $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\left|\overrightarrow{GH}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{EH}\right|=\left|\overrightarrow{FG}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $\left|\overrightarrow{EF}\right|\neq\left|\overrightarrow{EH}\right|$，则点 P 的轨迹不是正方形；

且矩形 $EFGH$ 的周长为 $2+2\times\frac{\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$，故 C 错，D 正确；

因为点 M 为 EG 中点，则点 M 为矩形 $EFGH$ 的对角线交点，所以点 M 到点 E 和点 G 的距离相等，且最大，所以线段 MP 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，故 B 错.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：求解本题的关键在于建立适当的空间直角坐标系，利用空间向量的方法，由 $MP\perp CN$，求出动点轨迹图形，即可求解.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】−1

【解析】

【分析】利用复数代数形式的乘除运算化简，由实部为 0 且虚部不为 0 得答案.

【详解】由（2+i）（a - 2i）=（2a+2）+（a - 4）i 为纯虚数，

得 $\begin{cases}2a+2=0\\ a-4\neq 0\end{cases}$，解得 a= - 1.

故答案为 - 1.

【点睛】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查了复数的基本概念，是基础题.

12. 【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】求出双曲线的渐近线方程，利用点到直线的距离公式列出方程求解即可.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为：$x+ay=0$，

点 $P(2,0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线的距离为 1，

可得：$\frac{|2+0|}{\sqrt{1+a^2}}=1$，解得 $a=\sqrt{3}$.

故答案为 $\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查双曲线的简单性质的应用，渐近线的求法，点到直线的距离公式的应用，考查计算能力.

13. 【答案】　①. $(1,0)$　②. $3x+4y-8=0$ 或 $x=0$.

【解析】

【分析】配方法将一般式方程转化为标准方程可看出圆心坐标；判定点和圆的位置关系，先讨论斜率不存在情况，然后讨论斜率存在情况，设斜率为 k，给出切线方程，为用点到直线的距离等于半径写出关于 k 方程可求 k.

【详解】$x^2-2x+y^2=0,\therefore(x-1)^2+y^2=1,\therefore$ 圆心为：$(1,0)$；

显然点$(0,2)$在圆外，当直线斜率不存在时，即 $x=0$ 恰是圆的切线，

当斜率存在时，设直线斜率为$k,\therefore l:y=kx+2,\therefore kx-y+2=0$，

由直线与圆相切$\therefore d=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 解之 $k=-\dfrac{3}{4},\therefore l:y=-\dfrac{3}{4}x+2$，即$3x+4y-8=0$

故答案为：$(1,0)$；$3x+4y-8=0$ 或 $x=0$.

14. 【答案】 ①. $\dfrac{\pi}{6}$ ②. $\dfrac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】①由已知可得$\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，利用正弦函数的图象及特殊角的三角函数值，结合范围$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，即可得解φ的值；

②化简已知等式可得$\sin(\omega x+2\omega+\varphi)-\sin(\omega x+\varphi)=2$，由正弦函数的性质可得$\omega=(k_1-k_2)\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k_1$，$k_2\in Z$，结合范围$\omega>0$，即可得解$\omega$的最小值.

【详解】解：①$\because$由已知可得$2\sin\varphi=1$，可得$\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，$k\in Z$，

$\because|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$当$k=0$时，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

②$\because\exists x\in R$，使$2\sin[\omega(x+2)+\varphi]-2\sin(\omega x+\varphi)=4$成立，

即$\sin(\omega x+2\omega+\varphi)-\sin(\omega x+\varphi)=2$，

$\therefore\exists x\in R$，使$\omega x+2\omega+\varphi=2k_1\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\omega x+\varphi=2k_2\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in Z$，

$\therefore$解得$\omega=k_1\pi-k_2\pi-\dfrac{\pi}{2}=(k_1-k_2)\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k_1$，$k_2\in Z$，

又$\because\omega>0$，$\therefore\omega$的最小值是$\dfrac{\pi}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$.

15. 【答案】①③

【解析】

【分析】对每个选项中的具体函数，先求定义域和值域，再结合题中函数性质 M 的定义进行判断或特殊值验证进行说明，即可判断得到答案.

【详解】解：由题意，函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $x_1\in D$，存在 $x_2\in D$，使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，则称函数 $y=f(x)$ 具有性质 M．

对于①，函数 $y=x^3-x$，定义域为 R，当 $x_1=0\in R$ 时，显然不存在 $x_2\in R$，使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，故不具备性质 M，故选项①正确；

对于②，函数 $y=f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域为 R，关于原点对称，且满足 $f(-x)=f(x)$，故函数为偶函数，$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geq\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，即值域为 $[1,\ +\infty)$，

对任意 $x_1>0$，$f(x_1)>1$，要使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，则需 $f(x_2)<1$，

而不存在 $x_2\in R$，使得 $f(x_2)<1$，故不具备性质 M，故选项②错误；

对于③，函数 $y=\log_8(x+2)$ 在 $[0,\ t]$ 上是单调递增函数，定义域为 $[0,\ t]$，其值域为 $[\log_8 2,\ \log_8(t+2)]$，

要使得其具有 M 性质，则对任意的 $x_1\in[0,\ t]$，$f(x_1)\in[\log_8 2,\ \log_8(t+2)]$，总存在 $x_2\in[0,\ t]$，

$f(x_2)=\dfrac{1}{f(x_1)}\in[\dfrac{1}{\log_8(t+2)},\dfrac{1}{\log_8 2}]\subseteq[\log_8 2,\ \log_8(t+2)]$，

即 $\begin{cases}\dfrac{1}{\log_8(t+2)}\geqslant\log_8 2\\ \dfrac{1}{\log_8 2}\leqslant\log_8(t+2)\end{cases}$，即 $\begin{cases}\log_8 2\cdot\log_8(t+2)\leqslant 1\\ \log_8 2\cdot\log_8(t+2)\geqslant 1\end{cases}$，所以 $\log_8 2\cdot\log_8(t+2)=1$，

故 $\log_8(t+2)=\dfrac{1}{\log_8 2}=\log_2 8=3$，所以 $t+2=8^3$，故 $t=510$，故选项③正确；

对于④，函数 $y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$ 具有性质 M，定义域为 R，使得 $\sin x\in[-1,\ 1]$，

一方面函数值不可能为零，即 $3\sin x+a\neq 0$ 对任意的 x 恒成立，而 $3\sin x\in[-3,\ 3]$，故 $a>3$ 或 $a<-3$，

另一方面，$y=\dfrac{4}{3\sin x+a}$ 的值域是 $y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$ 值域的子集，$y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$ 的值域为 $[\dfrac{a-3}{4},\dfrac{a+3}{4}]$，

$y=\dfrac{4}{3\sin x+a}$ 的值域为 $[\dfrac{4}{a+3},\dfrac{4}{a-3}]$，

要满足题意，只需 $\begin{cases}\dfrac{4}{a+3}\geq\dfrac{a-3}{4}\\ \dfrac{4}{a-3}\leq\dfrac{a+3}{4}\end{cases}$，

当 $a<-3$ 时，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\leq 1$，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\geq 1$，即 $\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$；

当 $a>3$ 时，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\geq 1$，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\leq 1$，即 $\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$；

故 $\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$，即 $(a-3)(a+3)=16$，即 $a^2-9=16$，解得 $a=\pm5$，故选项④错误.

故正确结论的序号是①③.

故答案为：①③.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出相应文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】（1）$T=\pi;\left[k\pi-\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right],k\in Z$

（2）$\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

【解析】

【分析】（1）先用降幂公式和辅助角共将函数化简后可得；（2）求出 $f(x)$ 的非负零点依次观察可得 a 的范围.

【小问 1 详解】

$f(x)=2\sin x\cos x-2\cos^2 x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z.$

$\therefore T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi;$

解之单调递增区间为：$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right],k\in Z$

【小问 2 详解】

由（1）$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\therefore 2x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi,k\in Z$

则非负零点依次为：$\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{9\pi}{8},\cdots$,

在区间 $[0,a]$ 上有且只有一个零点，$\therefore a\in\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

17. 【答案】（1）$\dfrac{5}{13}$；

（2）存在 $t=2$，使得角 C 为钝角. 此时 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{35}$.

【解析】

【小问 1 详解】

解：当 $t=3$ 时，$a=5$，$b=12$，$c=13$，

所以 $\cos B=\dfrac{25+169-144}{2\times5\times13}=\dfrac{5}{13}$.

【小问 2 详解】

解：当角 C 为钝角时，$\cos C<0$，

所以 $\dfrac{(2t-1)^2+(4t)^2-(4t+1)^2}{2\times(2t-1)(4t)}<0, \therefore 4t^2-12t<0, \therefore 0<t<3$，

因为 $t>1, t\in N^* \therefore t=2$.

当 $t=2$ 时，$a=3$，$b=8$，$c=9$，$\cos C<0, C$ 是钝角.

故存在 $t=2$，使得角 C 为钝角. 此时 $\cos C=\dfrac{9+64-81}{2\times3\times8}=-\dfrac{1}{6}, \therefore \sin C=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times3\times8\times\dfrac{\sqrt{35}}{6}=2\sqrt{35}$.

18. 【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析

【解析】

【分析】选择①.

(1)由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ 可得 $ABCD\Rightarrow PA\perp AD$，$PA\perp CD$ 由勾股定理可得 $CD\perp PD$.再由线面垂直的判定可得 $CD\perp$ 平面 PAD，从而得到 $CD\perp AD$ 进而得到 $AD//BC$.即四边形 $ABCD$ 是直角梯形.

(2)以 A 为坐标系原点建立空间直角坐标系.求出平面 PCD 的法向量与 $\overline{AE}$ 的坐标，再由两向量所成角的余弦值可得直线 AE 与平面 PCD 所成的角的正弦值.

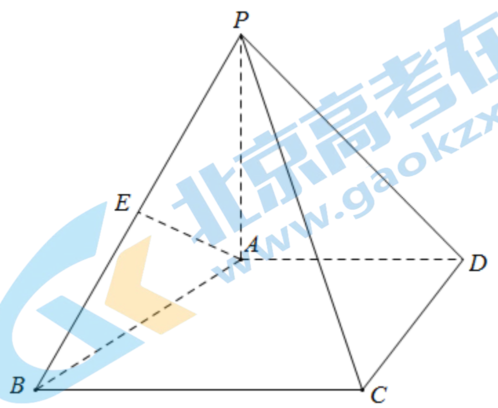
选择②。

(1) 由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ 可得 $ABCD\Rightarrow PA\perp AD$，$PA\perp CD$ 由勾股定理可得 $CD\perp PD$.再由线面垂直的判定可得 $CD\perp$ 平面 PAD，从而得到 $CD\perp AD$，再由 $BC//$ 平面 PAD，得 $BC//AD$，即得四边形 $ABCD$ 是直角梯形.

(2)同(1)

【小问 1 详解】

选择①.



(1) 证明：如图所示

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$， $PA\perp CD$

又因为 $PA=AD=CD=2$，所以 $PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=2\sqrt{2}$

又因为 $PC=2\sqrt{3}$， $PC^2=CD^2+PD^2$，即 $CD\perp PD$

又因为 $PA\bigcap PD=P$

所以 $CD\perp$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AD$

又因为 $CD\perp BC$，所以 $AD//BC$

又因为 $AD\neq BC$

所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形.

选择②.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$， $PA\perp CD$

又因为 $PA=AD=CD=2$，所以 $PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=2\sqrt{2}$

又因为 $PC=2\sqrt{3}$， $PC^2=CD^2+PD^2$，即 $CD\perp PD$

又因为 $PA\bigcap PD=P$

所以 $CD\perp$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AD$

又因为 $BC//$ 平面 PAD，

$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$

所以 $BC//AD$，

又因为 $AD\neq BC$

所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形

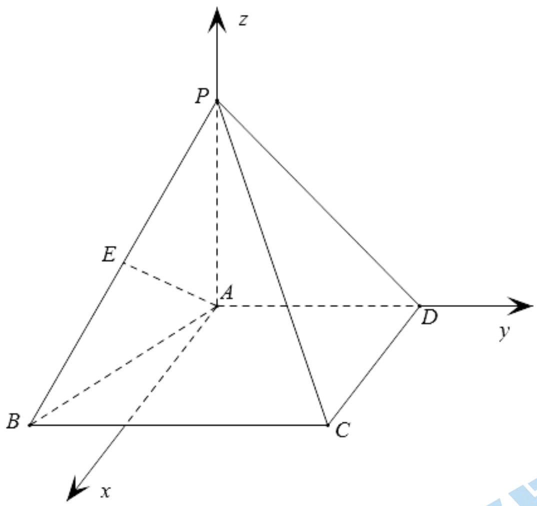
【小问 2 详解】

选择①.

(2)过 A 作 AD 的垂线交 BC 于点 F，由题意易知 $PA\perp AF$， $AF\perp AD$， $AD\perp PA$

故以 A 为坐标系原点，以 AF 、 AD 、 AP 为 Ox 、 Oy 、 Oz 轴建立空间直角坐标系，

如图所示，由题意知 $A(0,0,0)$， $C(2,2,0)$， $D(0,2,0)$， $P(0,0,2)$， $B(2,-1,0)$



因为 E 为 PB 的中点，由中点坐标公式知 $E(1,-\frac{1}{2},1)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,-\frac{1}{2},1)$，

$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，

$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x+2y-2z=0\\ 2y-2z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，得 $\vec{n}=(0,1,1)$

设直线 AE 与平面 PCD 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AE}>|=\dfrac{|-\frac{1}{2}\times1+1\times1|}{\sqrt{2}\times\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

所以直线 AE 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

选择②.

解法同①

19. 【答案】(1) ① $y=\frac{1}{2}x-1$；②证明见解析

(2) $\{-1\}\cup\left(0,e^{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) ①利用导数求出切线的斜率，直接求出切线方程；

②令 $g\left(x\right)=e^{x}+1-xe^{x}$，利用导数判断出 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 x_0，利用列表法证明出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一极大值点；

（2）令 $h(x)=\mathrm{e}^x+a-ax$.对 a 分类讨论：① $a<0$，得到当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 无零点；② $a>0$，$f(x)$ 无零点，符合题意.

【小问 1 详解】

若 $a=1$，则 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}-1$，$f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+1-x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

①在 $x=0$ 处，$f'(0)=\dfrac{1+1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}$，$f(0)=-1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-1$.

②令 $g(x)=\mathrm{e}^x+1-x\mathrm{e}^x$，$g'(x)=-x\mathrm{e}^x$，

在区间 $(0,+\infty)$ 上，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

又 $g(1)=1>0$, $g(2)=-\mathrm{e}^2+1<0$,，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 x_0.

列表得：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一极大值点 x_0.

【小问 2 详解】

$f(x)=\dfrac{ax-\mathrm{e}^x-a}{\mathrm{e}^x+a}$，

令 $h(x)=\mathrm{e}^x+a-ax$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-a$.

①若 $a<0$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 R 上是增函数.

因为 $h\left(\dfrac{1}{a}\right)=\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1\right)+a<0$，$h(1)=\mathrm{e}>0$，

所以 $h(x)$ 恰有一个零点 x_0.

令 $\mathrm{e}^{x_0}+a=0$，得 $x_0=\ln(-a)$.

代入 $h(x_0)=0$，得 $-a+a-a\ln(-a)=0$，

解得 $a=-1$.

所以当 $a=-1$ 时，$h(x)$ 的唯一零点为 0，此时 $f(x)$ 无零点，符合题意.

②若 $a>0$，此时 $f(x)$ 的定义域为 R .

当 $x<\ln a$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 上是减函数；

当 $x>\ln a$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在区间 $(\ln a,+\infty)$ 上是增函数.

所以 $h(x)_{\min}=h(\ln a)=2a-a\ln a$.

又 $h\left(0\right)=1+a>0$，

由题意，当 $2a-a\ln a>0$，即 $0<a<e^2$ 时，$f(x)$ 无零点，符合题意.

综上，a 的取值范围是 $\{-1\}\cup\left(0,e^2\right)$.

【点睛】导数的应用主要有：

（1）利用导函数几何意义求切线方程；

（2）利用导数研究原函数的单调性，求极值（最值）；

（3）利用导数求参数的取值范围.

20. 【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】（1）由题意可得出关于 a、b、c 的方程组，解出这三个量的值，可得出椭圆 C 的方程；

（2）分析可知 $k\neq 0$，将直线 AB 的方程与椭圆 C 的方程联立，列出韦达定理，求出线段 AB 的中点 M 的坐标，求出线段 AB 的垂直平分线的方程，可求得点 N 的坐标，分析可得 $|OM|=|ON|$，利用两点间的距离公式可求得 k 的值.

【小问 1 详解】

解：由题设得 $\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 4\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{5} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

解：若 $k=0$，则 AB 的中点为点 P，则线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，不合乎题意，故 $k\neq 0$，

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ y=kx+m \end{cases}$ 得 $\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

由 $\Delta=(8km)^2-4\left(4k^2+1\right)\left(4m^2-4\right)>0$，得 $4k^2-m^2+1>0$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$， $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{4k^2+1}$，

所以点 M 的横坐标 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4km}{4k^2+1}$，纵坐标 $y_M=\frac{m}{4k^2+1}$，

所以直线 MN 的方程为 $y-\frac{m}{4k^2+1}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{4km}{4k^2+1}\right)$.

令 $x=0$，则点 N 纵坐标 $y_N=-\frac{3m}{4k^2+1}$，则 $N\left(0,-\frac{3m}{4k^2+1}\right)$，

因为 $P(0,m)$，所以点 N、点 P 在原点两侧.

因为 $\angle MOP=2\angle MNP$，所以 $\angle MNO=\angle OMN$，所以 $|OM|=|ON|$.

又因为 $|OM|^2=\left(-\frac{4km}{4k^2+1}\right)^2+\left(\frac{m}{4k^2+1}\right)^2=\frac{16k^2m^2+m^2}{(4k^2+1)^2}$，$|ON|^2=\left(-\frac{3m}{4k^2+1}\right)^2=\frac{9m^2}{(4k^2+1)^2}$，

所以 $\frac{16k^2m^2+m^2}{(4k^2+1)^2}=\frac{9m^2}{(4k^2+1)^2}$，解得 $16k^2+1=9$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于 x（或 y）的一元二次方程，必要时计算 Δ；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为 x_1+x_2、x_1x_2（或 y_1+y_2、y_1y_2）的形式；

（5）代入韦达定理求解.

21. 【答案】（1）$1,0,-1$ 和 $-1,0,1$

（2）$a_n=\begin{cases}9,n\text{为奇数}\\8,n\text{为偶数}\end{cases}$

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据片段和的定义即可求解，

（2）根据 $a_{n+1}-a_n=\pm1$，通过推理即可求解，

（3）先根据反证法证：存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$，使得 a_{N_0}，a_{N_0+1}，a_{N_0+2}，…为单调数列，进而根据迭加法证明存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $n\geq N_0$ 时，都有 $|a_n-a_{N_0}|=n-N_0$.

【小问 1 详解】

$a_3=-1$，包含 a_3 的单调片段有两个，为 $1,0,-1$ 和 $-1,0,1$

【小问 2 详解】

因为$|a_{n+1}-a_n|=1$，

所以$a_{n+1}-a_n=\pm 1$

若$a_1<a_2$，因为包含a_1的“单调片段”长度的最大值为 2，则$a_2>a_3$，

所以$a_2=a_1+1$，$a_3=a_2-1$，故$a_1=9$，$a_2=10$.

因为包含a_3的“单调片段”长度的最大值为 2，所以$a_3<a_4$且$a_4>a_5$，以此类推，可得到$\forall k\in\mathbf{N}^*$，

$a_{2k-1}<a_{2k}$且$a_{2k}>a_{2k+1}$，于是$a_{2k}=a_{2k-1}+1=a_{2k+1}+1$.

所以$a_n=\begin{cases}9,n为奇数\\10,n为偶数\end{cases}$.

若$a_1>a_2$，则同理可得：$a_n=\begin{cases}9,n为奇数\\8,n为偶数\end{cases}$.

小问 3 详解】

首先证明：存在$N_0\in\mathbf{N}^*$，使得a_{N_0}，a_{N_0+1}，a_{N_0+2}，…为单调数列.　（*）

假设结论（*）不成立，不妨设$a_1<a_2$，

因为（*）不成立，所以存在$k\geq 2$，使得$a_1<a_2<\cdots<a_k$且$a_k>a_{k+1}$.

若从a_k开始，一直单调递减下去，则与假设矛盾；

所以存在$s\geq k+1$，使得$a_k>a_{k+1}>\cdots>a_s$且$a_s<a_{s+1}$.

若从a_s开始，一直单调递增下去，则与假设矛盾；

所以存在$t\geq s+1$，使得$a_s<a_{s+1}<\cdots<a_t$且$a_t>a_{t+1}$.

由$s\geq k+1$可知$s\geq 3$，

因为存在包含a_s的长度为s的“单调片段”，所以$t\geq 2s-1$.

考虑a_{t-1}，显然包含a_{t-1}的最长“单调片段”为$a_s<a_{s+1}<\cdots<a_t$，其长度为$t-s+1$.

因为$s\geq 3$，所以$t-s+1\leq t-2$，

这与已知：存在包含a_{t-1}的长度为$t-1$的“单调片段”，矛盾.

故假设不成立，结论（*）成立.

当$a_1>a_2$时，同理可证结论（*）成立.

根据结论（*），a_{N_0}，a_{N_0+1}，a_{N_0+2}，…为单调数列，

则$\forall n\leq N_0$，$a_{n+1}-a_n$的正负号都相同，

于是当$n\geq N_0+2$时，有

$$|a_n-a_{N_0}|=|(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{N_0+1}-a_{N_0})|$$

$$=|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_{N_0+1}-a_{N_0}|=n-N_0$$

当 $n=N_0+1$，N_0 时，显然 $\left|a_n-a_{N_0}\right|=n-N_0$.

综上所述，题目所给结论成立

【点睛】本题考查了数列中的新定义问题，用到了反证法以及迭加法,对于新定义问题，充分理解定义是关键，运用定义中给的约束条件进行推理，对于直接证明比较困难的，常常可采用反证法或者数学归纳法的方式，推理能力要求较高.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯