

2022 北京朝阳高一（上）期末

数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. (5 分) 已知集合 $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
A. $\{1, 3, 5, 7\}$ B. $\{3, 5, 7\}$ C. $\{1, 2, 9\}$ D. $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

2. (5 分) 下列函数在其定义域内是增函数的是()
A. $y = 2^x$ B. $y = -\log_2 x$ C. $y = -\frac{1}{x}$ D. $y = \tan x$

3. (5 分) 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{2}{x}$ 的最小值为()
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

4. (5 分) 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = (\quad)$
A. $-\frac{2}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $-\frac{7}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

5. (5 分) 已知 $a = e^{\frac{1}{3}}, b = \log_3 2, c = \log_{\frac{1}{3}} 2$, 则 a, b, c 的大小关系为()
A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

6. (5 分) 已知 $a > b, c \in \mathbb{R}$, 则下列不等式中恒成立的是()
A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$ C. $ac > bc$ D. $a + c > b + c$

7. (5 分) “ $a < 1$ ”是“关于 x 的方程 $ax^2 - 2x + 1 = 0$ 有实数根”的()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. (5 分) 为了节约水资源，某地区对居民用水实行“阶梯水价”制度：将居民家庭全年用水量（取整数）划分为三档，水价分档递增，其标准如下：

阶梯	居民家庭全年用水量 (立方米)	水价 (元/立方米)	其中		
			水费 (元/立方米)	水资源费 (元/立方米)	污水处理费 (元/立方米)
第一阶梯	0-180 (含)	5	2.07	1.57	1.36
第二阶梯	181-260 (含)	7	4.07		
第三阶梯	260 以上	9	6.07		

如该地区某户家庭全年用水量为 300 立方米，则其应缴纳的全年综合水费（包括水费、水资源费及污水处理费）合计为 $180 \times 5 + (260 - 180) \times 7 + (300 - 260) \times 9 = 1820$ 元。若该地区某户家庭缴纳的全年综合水费合计为 1180 元，则此户家庭全年用水量为()

- A. 170 立方米 B. 200 立方米 C. 220 立方米 D. 236 立方米

9. (5分) 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，其图象是一条连续不断的曲线. 若 $f(-2) = f(1) \neq 0$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 2)$ 内的零点个数至少为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. (5分) 数学可以刻画现实世界中的和谐美，人体结构、建筑物、国旗、绘画、优选法等美的共性与黄金分割相

关. 黄金分割常数 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 也可以表示成 $2\sin 18^\circ$ ，则 $\frac{\omega\sqrt{4-\omega^2}}{\cos 54^\circ} = ()$

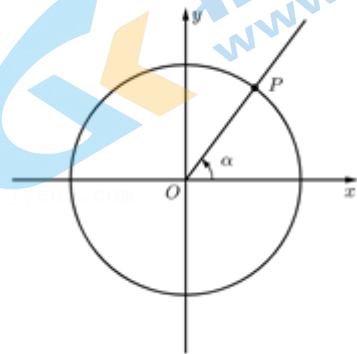
- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{5}-1$ D. $\sqrt{5}+1$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. (5分) 函数 $f(x) = \ln(x-1)$ 的定义域为_____.

12. (5分) $0.25 \times 2^4 + \lg 8 + 3\lg 5 =$ _____.

13. (5分) 如图，若角 α 的终边与单位圆交于点 $P(\frac{3}{5}, y_0)$ ，则 $y_0 =$ _____， $\tan \alpha =$ _____.



14. (5分) 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：① $f(0) = 0$ ；② $f(x)$ 在区间 $[2, 4]$ 上单调递减；③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称，则 $f(x)$ 可以是_____.

15. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (5-a)x - a + 1, & x < 1 \\ a^x, & x \geq 1 \end{cases}$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$ 都有 $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) > 0$ 成立，那么实数 a

的取值范围是_____.

16. (5分) 给出下列四个结论：

①函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$ 是奇函数；

②将函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，可以得到函数 $f(x) = -\cos 2x$ 的图象；

③若 α, β 是第一象限角且 $\alpha < \beta$ ，则 $\tan 2\alpha < \tan 2\beta$ ；

④已知函数 $f(x) = \sin^4 \frac{\omega x}{2} + \cos^4 \frac{\omega x}{2}$ ，其中 ω 是正整数. 若对任意实数 a 都有 $\{f(x) | a < x < a+1\} = \{f(x) | x \in R\}$ ，则

ω 的最小值是 4.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 5 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. (13分) 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x \in R | 2x - 1 \leq 1\}$ ，集合 $B = \{x \in R | -1 < x \leq 2\}$.

(I) 求集合 $A \cap B$ 及 $(\complement_U A) \cup B$;

(II) 若集合 $C = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < 2a, a > 0\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

18. (14分) 已知 α, β 为锐角, $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$.

(I) 求 $\sin \alpha$ 和 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$ 的值;

(II) 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos \beta$ 的值.

19. (14分) 已知函数 $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + a$, 其中 $0 < \omega < 2$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

条件①: $f(0) = \frac{1}{2}$;

条件②: $f(x)$ 的最小正周期为 π ;

条件③: $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$.

20. (15分) 已知函数 $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 - mx + 4 (m \in \mathbb{R})$.

(I) 当 $m = 4$ 时, 求不等式 $g(x) > f(x)$ 的解集;

(II) 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $g(x) > f(x)$ 恒成立, 求 m 的取值范围;

(III) 若对任意 $x_1 \in [1, 2]$, 存在 $x_2 \in [4, 5]$, 使得 $g(x_1) = f(x_2)$, 求 m 的取值范围.

21. (14分) 已知非空数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$, 设 $s(A)$ 为集合 A 中所有元素之和, 集合 $P(A)$ 是由集合 A 的所有子集组成的集合.

(I) 若集合 $A = \{0, 1\}$, 写出 $s(A)$ 和集合 $P(A)$;

(II) 若集合 A 中的元素都是正整数, 且对任意的正整数 $k = 1, 2, 3, \dots, s(A)$, 都存在集合 $B \in P(A)$, 使得 $s(B) = k$, 则称集合 A 具有性质 M .

(i) 若集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, 判断集合 A 是否具有性质 M , 并说明理由;

(ii) 若集合 A 具有性质 M , 且 $s(A) = 100$, 求 n 的最小值及此时 A 中元素的最大值的所有可能取值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【分析】利用交集定义直接求解.

【解答】解：∵ 集合 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ，

$$\therefore A \cap B = \{3, 5, 7\}.$$

故选：B.

【点评】本题考查交集的求法，考查交集定义等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. 【分析】根据题意，依次分析选项中函数的单调性，综合可得答案.

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A， $y = 2^x$ ，是指数函数，在其定义域内是增函数，符合题意，

对于 B， $y = -\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，是对数函数，在其定义域内是减函数，不符合题意，

对于 C， $y = -\frac{1}{x}$ ，是反比例函数，在其定义域中不具有单调性，不符合题意，

对于 D， $y = \tan x$ ，是正切函数，在其定义域中不具有单调性，不符合题意，

故选：A.

【点评】本题考查函数的单调性，注意常见函数的定义域，属于基础题.

3. 【分析】利用基本不等式的性质即可求得答案.

【解答】解：由 $x > 0$ ， $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $x = \frac{2}{x}$ ，即 $x = \sqrt{2}$ 时，取得等号，

故 $x + \frac{2}{x}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ ，

故选：C.

【点评】本题主要考查了基本不等式的性质，属于基础题.

4. 【分析】直接利用二倍角的余弦函数，转化求解即可.

【解答】解： $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ，

则 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ 。

故选：D.

【点评】本题考查二倍角公式的应用，是基础题.

5. 【分析】由已知结合指数函数与对数函数的单调性确定 a ， b ， c ，的范围即可比较大小.

【解答】解：因为 $a = e^{\frac{1}{3}} > 1$ ， $b = \log_3 2 \in (0, 1)$ ， $c = \log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$ ，

所以 $a > b > c$ 。

故选：B.

【点评】本题主要考查了利用指数函数与对数函数的单调性比较函数值大小，属于基础题。

6. 【分析】根据已知条件，结合不等式的性质，以及特殊值法，即可求解。

【解答】解：对于A，令 $a=2$ ， $b=-1$ ，满足 $a>b$ ，但 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ，故A错误，

对于B，令 $a=2$ ， $b=-3$ ，满足 $a>b$ ，但 $a^2<b^2$ ，故B错误，

对于C，令 $c=0$ ， $ac=bc$ ，故C错误，

对于D， $\because a>b$ ， $c=c$ ，

\therefore 由不等式的可加性可得， $a+c=b+c$ ，故D正确。

故选：D。

【点评】本题主要考查了不等式的性质，掌握特殊值法是解本题的关键，属于基础题。

7. 【分析】求出方程有实根的等价条件，利用充分条件和必要条件的定义进行判断即可。

【解答】解：当 $a=0$ 时，方程 $ax^2-2x+1=0$ 等价于 $2x-1=0$ ，得 $x=\frac{1}{2}$ ，满足方程有实数根，

当 $a\neq 0$ 时，要使方程有实数根，则判别式 $\Delta=4-4a\geq 0$ ，得 $a\leq 1$ 且 $a\neq 0$ ，综上 $a\leq 1$ ，

则 $a<1$ 是关于 x 的方程 $ax^2-2x+1=0$ 有实数根的充分不必要条件，

故选：A。

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，利用一元二次方程有根的条件求出 a 的取值范围是解决本题的关键，是基础题。

8. 【分析】先求出该户家庭用水量为260立方米应缴纳的水费，则即可判断所求的用水量在什么范围，进而可以建立方程求解。

【解答】解：若该户家庭全年用水量为 $260m^3$ ，

则应缴纳 $180\times 5+(260-180)\times 7=1460$ 元 >1180 元，

所以该户家庭的全年用水量少于260立方米，

设用水量为 x 立方米，

则应缴纳 $180\times 5+(x-180)\times 7=1180$ ，解得 $x=220$ 立方米，

故选：C。

【点评】本题考查了根据实际问题建立函数模型的应用，考查了学生的理解能力与运算求解能力，属于基础题。

9. 【分析】利用函数的奇偶性，结合函数的零点，判断函数零点个数即可。

【解答】解：奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，其图象是一条连续不断的曲线。若 $f(-2)=f(1)\neq 0$ ，可知 $f(0)=0$ ， $-f(2)=f(1)\neq 0$ ，所以 $f(1)f(2)<0$ ，所以函数在 $(1,2)$ 之间至少一个零点，由奇函数的性质可知函数在 $(-2,-1)$ 之间至少一个零点，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 内的零点个数至少为3个。

故选：C。

【点评】本题考查函数的奇偶性的应用，函数的零点个数的判断，是基础题。

10. 【分析】根据诱导公式，正弦的倍角公式以及正余弦的同角关系化简即可求解。

【解答】解：由已知可得 $\omega=2\sin 18^\circ$ ，

$$\text{则 } \frac{\omega\sqrt{4-\omega^2}}{\cos 54^\circ} = \frac{2\sin 18^\circ \times \sqrt{4-4\sin^2 18^\circ}}{\cos 54^\circ} = \frac{2\sin 18^\circ \times 2\cos 18^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2,$$

故选：A.

【点评】本题考查了三角函数的恒等变换，考查了学生的运算求解能力，属于基础题.

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分.

11. 【分析】函数 $f(x) = \ln(x-1)$ 的定义域为： $\{x|x-1>0\}$ ，由此能求出结果.

【解答】解：函数 $f(x) = \ln(x-1)$ 的定义域为：

$$\{x|x-1>0\},$$

解得 $\{x|x>1\}$ ，

故答案为： $\{x|x>1\}$.

【点评】本题考查对数函数的性质和应用，是基础题. 解题时要认真审题，仔细解答.

12. 【分析】由已知结合对数的运算性质可求.

【解答】解： $0.25 \times 2^4 + \lg 8 + 3\lg 5 = 4 + \lg(8 \times 125) = 4 + \lg 1000 = 4 + 3 = 7.$

故答案为：7.

【点评】本题主要考查了对数的运算性质，属于基础题.

13. 【分析】根据正切函数的定义即可得解.

【解答】解：由角 α 的终边与单位圆交于点 $P(\frac{3}{5}, y_0)$ 知，

$$\text{当点 } P \text{ 在第一象限时， } y_0 = \sqrt{1-x_0^2} = \frac{4}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} = \frac{4}{3};$$

$$\text{当点 } P \text{ 在第四象限时， } y_0 = -\sqrt{1-x_0^2} = -\frac{4}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{4}{3};$$

故答案为： $\frac{4}{3}$ ； $\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{4}{3}$ ； $-\frac{4}{3}$.

【点评】本题考查三角函数的定义，理解正切函数的定义是解题的关键，考查运算求解能力，属于基础题.

14. 【分析】根据题意，结合二次函数的性质分析可得答案.

【解答】解：根据题意，要求函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，且在区间 $[2, 4]$ 上单调递减，

可以考虑 $f(x)$ 为开口向下二次函数，

又由 $f(0)=0$ ，即函数图象经过原点，故 $f(x)$ 可以是 $f(x) = -x^2 + 4x$ （答案不唯一）；

故答案为： $f(x) = -x^2 + 4x$ （答案不唯一）.

【点评】本题考查函数的单调性和对称性，注意二次函数的性质，属于基础题.

15. 【分析】利用求解分段函数单调性的方法举例不等式关系，由此即可求解.

【解答】解：由已知可得函数 $f(x)$ 在 R 上为单调递增函数，

$$\text{则需满足 } \begin{cases} 5-a > 0 \\ a > 1 \\ (5-a) \times 1 - a + 1 \leq a \end{cases}, \text{ 解得 } 2 \leq a < 5,$$

所以实数 a 的取值范围为 $[2, 5)$ ，

故答案为: [2, 5).

【点评】本题考查了分段函数的单调性, 考查了学生的运算求解能力, 属于基础题.

16. 【分析】直接利用三角函数的关系式的变换, 函数的图象的平移变换, 象限角, 正弦型函数的性质的应用判断①②③④的结论.

【解答】解: 对于①函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 2x$, 故函数 $f(x)$ 是奇函数, 故①正确;

②将函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可以得到函数 $f(x) = \cos(2x - \pi) = -\cos 2x$ 的图象, 故②正确;

③若 α, β 是第一象限角且满足 $\frac{\pi}{6} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{3}$, 则 $\tan 2\alpha < \tan 2\beta$ 错误, 故③错误;

④已知函数 $f(x) = \sin^4 \frac{\omega x}{2} + \cos^4 \frac{\omega x}{2} = (\sin^2 \frac{\omega x}{2} + \cos^2 \frac{\omega x}{2})(\sin^2 \frac{\omega x}{2} - \cos^2 \frac{\omega x}{2}) = 1 - \frac{1}{4} \sin 2\omega x$, 其中 ω 是正整数. 若对任意实数 a 都有 $\{f(x) | a < x < a+1\} = \{f(x) | x \in R\}$,

所以 $2\omega x = 2k\pi$, 解得 $x = \frac{k\pi}{\omega}$, ($k \in Z$), 当 $k=1$ 时, 所以 $\frac{\pi}{\omega} < 1$, 即 $\omega > \pi$, 则 ω 的最小值是 4, 故④正确.

故答案为: ①②④.

【点评】本题考查的知识要点: 三角函数的关系式的变换, 函数的图象的平移变换, 象限角, 正弦型函数的性质的应用, 主要考查学生的运算能力和数学思维能力, 属于中档题.

三、解答题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 【分析】(I) 求出集合 A , 进而求出 $\complement_U A$, 再求出集合 B , 由此能求出 $A \cap B$, $(\complement_U A) \cup B$.

(II) 由 $C \subseteq B$, 且 $a > 0$, 得 $2a \leq 2$, 由此能求出 a 的取值范围.

【解答】解: (I) 由 $2x - 1 \leq 1$ 得 $x \leq 1$,

所以 $A = (-\infty, 1]$, $\complement_U A = (1, +\infty)$,

由 $B = (-1, 2]$, 所以 $A \cap B = (-1, 1]$.

所以 $(\complement_U A) \cup B = (-1, +\infty)$.

(II) 因为 $C \subseteq B$, 且 $a > 0$,

所以 $2a \leq 2$, 解得 $a \leq 1$.

所以 a 的取值范围是 $(0, 1]$.

【点评】本题考查集合的运算, 考查交集、并集、补集定义、不等式的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

18. 【分析】(I) 由同角正余弦的平方和为 1 可得 $\sin \alpha$, 再利用两角和的正弦公式可求 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$;

(II) 由同角正余弦的平方和为 1 可得 $\sin(\alpha + \beta)$, 再利用 $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha]$ 可求得结果.

【解答】解: (I) 因为 α 为锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$,

所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{14}$$

(II) 因为 α, β 为锐角, 所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$.

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - (\frac{11}{14})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

$$\text{所以 } \cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta)\cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin \alpha = -\frac{11}{14} \times \frac{1}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{2}.$$

【点评】本题考查了三角函数的定义以及求解三角函数值, 考查了学生的运算能力, 属于基础题.

19. 【分析】 $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} + a$, 分别就选择①②: 选择②③: 选择①③: 三种情况进行计算即可.

$$\text{【解答】解: } f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + a = \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + a = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} + a,$$

选择①②:

$$(I) \text{ 因为 } f(0) = 1 + a = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a = -\frac{1}{2},$$

又因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 1$,

$$\text{所以 } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}).$$

$$(II) \text{ 依题意, 令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z,$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi] (k \in Z)$,

选择②③:

$$(I) \text{ 因为 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } \frac{2\pi}{2\omega} = \pi, \text{ 所以 } \omega = 1,$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} + a,$$

$$\text{又因为 } f(\frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{1}{2} + a = 1, \text{ 所以 } a = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}).$$

(II) 同上.

选择①③:

$$(I) \text{ 因为 } f(0) = 1 + a = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}),$$

$$\text{又因为 } f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}) = 1, \text{ 所以 } \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z,$$

所以 $\omega = 1 + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$. 又因为 $0 < \omega < 2$, 所以 $\omega = 1$,

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

(II) 同上.

【点评】本题考查三角函数的恒等变换及图象性质, 属于中档题.

20. 【分析】(I) 当 $m = 4$ 时, 化简不等式 $x^2 - 5x + 6 > 0$, 然后求解即可.

(II) 由 $g(x) > f(x)$, 得到不等式 $x^2 - (m+1)x + 6 > 0$ 的解集是 \mathbb{R} . 利用判别式转化求解即可.

(III) $g(x) = x^2 - mx + 4 = (x - \frac{m}{2})^2 + 4 - \frac{m^2}{4}$. 通过 m 的取值, 转化求解即可.

【解答】解: (I) 当 $m = 4$ 时, 由 $x^2 - 4x + 4 > x - 2$ 得 $x^2 - 5x + 6 > 0$,

即 $(x-3)(x-2) > 0$, 解得 $x < 2$ 或 $x > 3$.

所以不等式 $g(x) > f(x)$ 的解集为 $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$. (5分)

(II) 由 $g(x) > f(x)$ 得 $x^2 - mx + 4 > x - 2$,

即不等式 $x^2 - (m+1)x + 6 > 0$ 的解集是 \mathbb{R} .

所以 $(m+1)^2 - 24 < 0$, 解得 $-2\sqrt{6} - 1 < m < 2\sqrt{6} - 1$.

所以 m 的取值范围是 $(-2\sqrt{6} - 1, 2\sqrt{6} - 1)$. (10分)

(III) 当 $x_2 \in [4, 5]$ 时, $f(x_2) = x_2 - 2 \in [2, 3]$.

又 $g(x) = x^2 - mx + 4 = (x - \frac{m}{2})^2 + 4 - \frac{m^2}{4}$.

① 当 $\frac{m}{2} \leq 1$, 即 $m \leq 2$ 时,

对任意 $x_1 \in [1, 2]$, $g(x_1) \in [5-m, 8-2m] \subseteq [2, 3]$.

所以 $\begin{cases} m \leq 2, \\ 5-m \geq 2, \\ 8-2m \leq 3, \end{cases}$ 此时不等式组无解.

② 当 $1 < \frac{m}{2} \leq \frac{3}{2}$, 即 $2 < m \leq 3$ 时,

对任意 $x_1 \in [1, 2]$, $g(x_1) \in [4 - \frac{m^2}{4}, 8-2m] \subseteq [2, 3]$.

所以 $\begin{cases} 2 < m \leq 3, \\ 4 - \frac{m^2}{4} \geq 2, \\ 8-2m \leq 3, \end{cases}$ 解得 $\frac{5}{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

③ 当 $\frac{3}{2} < \frac{m}{2} < 2$, 即 $3 < m < 4$ 时,

对任意 $x_1 \in [1, 2]$, $g(x_1) \in [4 - \frac{m^2}{4}, 5-m] \subseteq [2, 3]$.

$$\text{所以} \begin{cases} 3 < m < 4, \\ 4 - \frac{m^2}{4} \geq 2, \text{此时不等式组无解.} \\ 5 - m \leq 3, \end{cases}$$

④当 $\frac{m}{2} \geq 2$, 即 $m \geq 4$ 时,

对任意 $x_1 \in [1, 2]$, $g(x_1) \in [8 - 2m, 5 - m] \subseteq [2, 3]$.

$$\text{所以} \begin{cases} m \geq 4, \\ 5 - m \leq 3, \text{此时不等式组无解.} \\ 8 - 2m \geq 2, \end{cases}$$

综上, 实数 m 的取值范围是 $[\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}]$. (15分)

【点评】本题考查函数恒成立条件的转化, 考查分类讨论思想的应用, 二次函数的最值的求法, 考查转化思想以及计算能力, 是中档题.

21. 【分析】(I) 根据已知对应即可求解; (II) (i) 分析出 $k=1$ 到 $k=15$ 的所有值即可; (ii) 设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 不妨设 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 然后根据已知新定义逐个分析即可.

【解答】解: (I) $s(A) = 0 + 1 = 1$, $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$,

(II) (i) 集合 A 具有性质 M , 理由如下:

因为 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, 所以 $s(A) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$,

当 $k=1$ 时, 取集合 $B = \{1\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=2$ 时, 取集合 $B = \{2\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=3$ 时, 取集合 $B = \{1, 2\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=4$ 时, 取集合 $B = \{4\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=5$ 时, 取集合 $B = \{1, 4\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=6$ 时, 取集合 $B = \{2, 4\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=7$ 时, 取集合 $B = \{1, 2, 4\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=8$ 时, 取集合 $B = \{8\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=9$ 时, 取集合 $B = \{1, 8\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=10$ 时, 取集合 $B = \{2, 8\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=11$ 时, 取集合 $B = \{1, 2, 8\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=12$ 时, 取集合 $B = \{4, 8\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=13$ 时, 取集合 $B = \{1, 4, 8\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=14$ 时, 取集合 $B = \{2, 4, 8\}$, 则 $s(B) = k$;

当 $k=15$ 时, 取集合 $B = \{1, 2, 4, 8\}$, 则 $s(B) = k$,

综上所述, 集合 A 具有性质 M ;

(ii) 设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 不妨设 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$,

因为 $a_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 为正整数, 所以 $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2$,

因为存在 B 使得 $s(B) = 1$,

所以此时 B 中不能包含元素 a_2, a_3, \dots, a_n 且 $B \neq \emptyset$,

所以 $B = \{a_1\}$. 所以 $a_1 = 1$,

因为存在 B 使得 $s(B) = 2$,

所以此时 B 中不能包含元素 a_1 及 a_3, a_4, \dots, a_n 且 $B \neq \emptyset$,

所以 $B = \{a_2\}$. 所以 $a_2 = 2$,

若 $a_3 \geq 5$, 则 $a_4 \geq 5, \dots, a_n \geq 5$, 而 $a_1 + a_2 = 3$,

所以不存在 $B \in P(A)$, 使得 $s(B) = 4$,

所以 $a_3 \leq 4$,

若 $a_4 \geq 9$, 则 $a_5 \geq 9, \dots, a_n \geq 9$, 而 $a_1 + a_2 + a_3 \leq 7$,

所以不存在 $B \in P(A)$, 使得 $s(B) = 8$,

所以 $a_4 \leq 8$,

同理可知 $a_5 \leq 16, a_6 \leq 32, a_7 \leq 64$,

若 $n \leq 6$, 则 $s(A) \leq 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$,

所以 $n \geq 7$,

当 $n = 7$ 时, 若 $a_7 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_6 + 2$,

则取 $k = a_1 + a_2 + \dots + a_6 + 1$, 可知不存在 $B \in P(A)$, 使得 $s(B) = k$,

所以 $a_7 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_6 + 1 = 100 - a_7 + 1$,

解得 $a_7 \leq 50$,

又因为 $100 - a_7 = a_1 + a_2 + \dots + a_6 \leq 63$, 所以 $a_7 \geq 37$,

经检验, 当 $k = 0, 1, 2, \dots, 13$ 时, 集合 $\{1, 2, 4, 8, 16, 19+k, 50-k\}$ 符合题意,

所以 n 的最小值为 7,

且集合 A 中元素的最大值的所有可能取值是 37, 38, \dots , 50.

【点评】 本题考查了元素与集合的关系, 涉及到新定义的应用, 考查了学生的运算求解能力, 属于中档题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯