北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试(文史类)

2018.5

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2<0\}$,$B=\{x|x\geqslant 1\}$,则 $A\cup B=$

A. $(-\infty,2]$ B. $(1,+\infty)$ C. $(1,2)$ D. $[1,+\infty)$

2. 计算 $(1-\mathrm{i})^2=$

A. $2\mathrm{i}$ B. $-2\mathrm{i}$ C. $2-\mathrm{i}$ D. $2+\mathrm{i}$

3. 已知 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}2x-y-2\leqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ y\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=y-3x$ 的最小值是

A. 1 B. -3 C. -1 D. $-\dfrac{7}{2}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中,$a=1$,$\angle A=\dfrac{\pi}{6}$,$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$,则 $c=$

A. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. "$0<a<1$ 且 $0<b<1$"是"$\log_a b>0$"的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

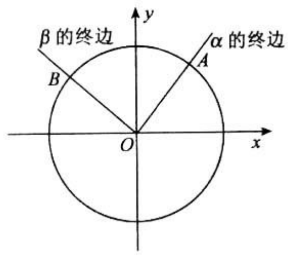
C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 如图,角 α,β 均以 Ox 为始边,终边与单位圆 O 分别交于点 A,B,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

A. $\sin(\alpha-\beta)$ B. $\sin(\alpha+\beta)$

C. $\cos(\alpha-\beta)$ D. $\cos(\alpha+\beta)$



(第 6 题图)

7. 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，且 $a+b>0,b+c>0,a+c>0$，则 $f(a)+f(b)+f(c)$ 的值

A. 恒为正　　B. 恒为负　　C. 恒为 0　　D. 无法确定

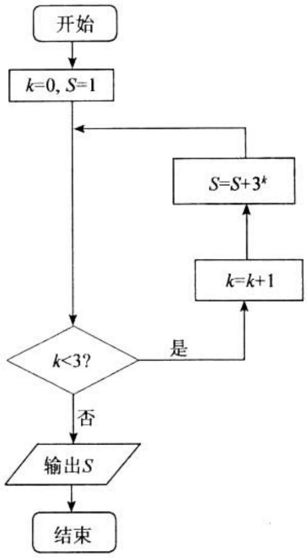
8. 某校中国象棋社团组织比赛．采用单循环赛制，即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场，胜者得 2 分，负者得 0 分，平局两人各得 1 分．若冠军获得者得分比其他人都多，且获胜场次却比其他人都少．则本次比赛的参赛人数至少为

A. 5　　B. 6 人　　C. 7　　D. 8

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 执行如图所示的程序框图，则输出的 $S=$________．

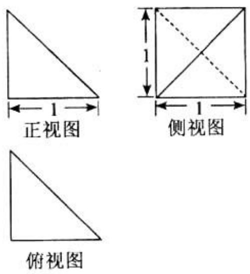


（第 9 题图）

10. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标是________；渐近线方程是________．

11. 已知 $x>0,y>0$，且满足 $x+y=4$，则 $\lg x+\lg y$ 的最大值为________．

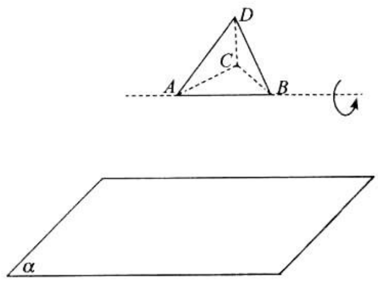
12. 已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积是________.



（第 12 题图）

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P（不过原点）到 x 轴，y 轴的距离之和的 2 倍等于点 P 到原点距离的平方．则点 P 的轨迹所围成的图形的面积是________.

14. 如图，已知四面体 $ABCD$ 的棱 AB // 平面 α，且 $AB=\sqrt{2}$，其余的棱长均为 1. 四面体 $ABCD$ 以 AB 所在的直线为轴旋转 x 弧度，且四面体 $ABCD$ 始终在水平放置的平面 α 的上方．如果将四面体 $ABCD$ 在平面 α 内正投影面积看成关于 x 的函数，记为 $S(x)$，则函数 $S(x)$ 的最小正周期为________；$S(x)$ 的最小值为________.



（第 14 题图）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2},1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求 a 的值，并求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值.

16.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=pn^2+qn(p,q\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=3,S_4=24$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17.（本小题满分 13 分）

某市的一个义务植树点，统计了近 10 年栽种侧柏和银杏的数据（单位：株），制表如下：

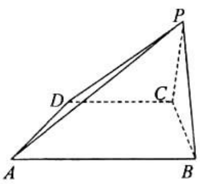
年份	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
侧柏	3200	3600	3300	3900	3500	3300	3900	3600	4100	4000
银杏	3400	3300	3600	3600	3700	4200	4400	3700	4200	4200

（Ⅰ）根据表中数据写出这 10 年内栽种银杏数量的中位数，并计算这 10 年栽种银杏数量的平均数；

（Ⅱ）从统计的数据中，在栽种侧柏与银杏数量之差的绝对值不小于 300 株的年份中，任意抽取 2 年，恰有 1 年栽种侧柏的数量比银杏数量多的概率.

18.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle PBC$ 是等腰三角形，且 $PB=PC=3$. 四边形 $ABCD$ 是直角梯形，$AB\parallel DC$，$AD\perp DC$，$AB=5$，$AD=4$，$DC=3$.



（Ⅰ）求证：$AB\parallel$ 平面 PDC；

（Ⅱ）当平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$ 时，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（Ⅲ）请在图中所给的五个点 P,A,B,C,D 中找出两个点，使得这两点所在的直线与直线 BC 垂直，并给出证明.

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，其左顶点 A 在圆 $O:x^2+y^2=4$ 上（O 为坐标原点）.

（Ⅰ）求椭圆 W 的方程；

（Ⅱ）过点 A 作直线 AQ 交椭圆 W 于另外一点 Q，交 y 轴于点 R. P 为椭圆 W 上一点，且 $OP\parallel AQ$，求证：$\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}$为定值.

20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=xe^x$，$g(x)=ax+1$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $y=g(x)$ 垂直，求 a 的值；

（Ⅱ）若方程 $f(x)-g(x)=0$ 在 $(-2,2)$ 上恰有两个不同的实数根，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若对任意 $x_1\in[-2,2]$，总存在唯一的 $x_2\in(-\infty,2)$，使得 $f(x_2)=g(x_1)$，求 a 的取值范围.

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试答案（文史类） 2018．5

一、选择题（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	A	A	C	B	B

二、填空题（本题满分 30 分）

题号	9	10		11	
答案	40	$(\pm\sqrt{7},0)$，	$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$	$2\lg 2$	
题号	12	13		14	
答案	$\frac{1}{6}$	$4\pi+8$		π	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

三、解答题（本题满分 80 分）

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）根据题意得

$2\sin\frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2})-a=1$，即 $2(1+0)-a=1$，

解得 $a=1$．

$$f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-1$$

$$=2\sin^2 x+2\sin x\cos x-1$$

$$=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4}).$$

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），得

$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le 2x\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，

所以 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$． ……………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$．

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{4})\le 1$.

所以$-1\le f(x)\le\sqrt{2}$.

所以当$2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即$x=0$时，$f(x)$取得最小值$-1$. ……………13分

16.（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）根据题意得

$\begin{cases}p+q=3,\\16p+4q=24.\end{cases}$即$\begin{cases}p+q=3,\\4p+q=6.\end{cases}$

解得$\begin{cases}p=1,\\q=2.\end{cases}$

所以$S_n=n^2+2n$.

当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+2n)-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$.

因为$a_1=3=2\times1+1$也适合上式，

所以$a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………7分

（Ⅱ）因为$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{2n+3}}{2^{2n+1}}=4$，且$b_1=2^{a_1}=2^3=8$，

所以数列$\{b_n\}$是以8为首项，4为公比的等比数列，

所以$T_n=\frac{8(1-4^n)}{1-4}=\frac{8}{3}(4^n-1)$. ……………… 13分

17.（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）这10年中栽种银杏数量的中位数为3700株.

设平均数为$\bar{x}$，

则$\bar{x}=\frac{3400+3300+3600+3600+3700+4200+4400+3700+4200+4200}{10}$=3830株.

……… 4分

（Ⅱ）根据表中数据，满足条件的年份有2009，2010，2011，2013，2014共5年.从这5年中抽取2年，有2009，2010；2009，2011；2009，2013；2009，2014；2010，2011；2010，2013；2010，2014；2011，2013；2011，2014；2013，2014共10种情况.

设事件A表示“任取2年，恰有1年栽种侧柏的数量比银杏的数量多”.则事件A包括2009，2010；2009，2013；2009，2014；2010，2011；2011，2013；2011，2014共6种情况.

所以 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

答：任取 2 年，恰有 1 年栽种侧柏的数量比银杏的数量多的概率为 $\frac{3}{5}$ ………………13 分

18. （本小题满分 14 分）

证明：（Ⅰ）因为 $AB \parallel DC$，

又因为 $AB \not\subset$ 平面 PDC，$DC \subset$ 平面 PDC，

所以 $AB \parallel$ 平面 PDC． ……3 分

（Ⅱ）取 BC 中点 F，连接 PF．

又因为 $PB=PC$，所以 $PF \perp BC$，又因为平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD=BC$，所以 $PF \perp$ 平面 $ABCD$．

在直角梯形 $ABCD$ 中，因为 $AB \parallel DC$，且 $AD \perp DC$，$AD=4, DC=3$，$AB=5$，

所以 $BC=2\sqrt{5}$，且 $S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(3+5)\times 4=16$．

又因为 $PB=3$，$BF=\sqrt{5}$，所以 $PF=2$．

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{梯形ABCD}\cdot PF=\frac{1}{3}\cdot 16\cdot 2=\frac{32}{3}$． ……………… 9 分

（Ⅲ）A, P 点为所求的点．

证明如下：连接 AF, AC．

在直角梯形 $ABCD$ 中，因为 $AB \parallel DC$，且 $AD \perp DC$，$AD=4, DC=3$，

所以 $AC=5$．

因为 $AB=5$，点 F 为 BC 中点，所以 $AF \perp BC$．

又因为 $BC \perp PF$，$AF \cap PF=F$，所以 $BC \perp$ 平面 PAF．

又 $PA \subset$ 平面 PAF，所以 $PA \perp BC$．…………14 分

19. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为椭圆 W 的左顶点 A 在圆 $O: x^2+y^2=4$ 上，

令 $y=0$，得 $x=\pm 2$，所以 $a=2$．

又离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，

所以 $b^2=a^2-c^2=1$，所以 W 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． …………5 分

(II)证明：设$P(x_0,y_0),x_0\neq 0$时，有$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,即$x_0^2+4y_0^2=4$，

设$Q(x_Q,y_Q)$，直线AQ的方程为$y=\frac{y_0}{x_0}(x+2)$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=\frac{y_0}{x_0}(x+2).\end{cases}$

即 $(x_0^2+4y_0^2)x^2+16y_0^2x+16y_0^2-4x_0^2=0$，

即$x^2+4y_0^2x+4y_0^2-x_0^2=0$， 所以$-2+x_Q=-4y_0^2$，即$x_Q=2-4y_0^2$，

所以，$x_Q+2=2-4y_0^2+2=4-4y_0^2$.

故有：$\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}=\frac{|AQ|}{|OP|}\cdot\frac{|AR|}{|OP|}=\frac{|x_Q+2|}{|x_0|}\cdot\frac{2}{|x_0|}=\frac{(4-4y_0^2)\times 2}{x_0^2}=2$. …………14分.

20. （本小题满分13分）

解:（I） $f'(x)=(x+1)e^x$， $f'(0)=1$，

曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与直线$y=g(x)$垂直，所以$a=-1$.

………………3分

（II）令$h(x)=f(x)-g(x)$，$x\in(-2,2)$.则

$h'(x)=(x+1)e^x-a,h''(x)=(x+2)e^x>0$

所以，$h'(x)$在区间$(-2,2)$上单调递增.

依题意，$\begin{cases}h'(-2)<0\\ h'(2)>0\end{cases}$，解得$a\in(-\frac{1}{e^2},3e^2)$.

所以$\exists x_0\in(-2,2)$，使得$h'(x_0)=0$，即$(x_0+1)e^{x_0}-a=0$，

于是$h(x)$的最小值为$h(x_0)=x_0e^{x_0}-ax_0-1$.

依题意，$\begin{cases}h(-2)>0,\\ h(2)>0,\\ h(x_0)<0,\end{cases}$

因为$h(x_0)=x_0e^{x_0}-ax_0-1=x_0e^{x_0}-(x_0+1)e^{x_0}x_0-1=-x_0^2e^{x_0}-1<0$，

所以，解得$a\in(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2},e^2-\frac{1}{2})$………………8分

（III）

$f'(x)=(x+1)\cdot e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数；

当 $x\in(-1,2)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数.

所以函数 $f(x)$ 的最小值 $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

又 $f(2)=2e^2$.

显然当 $x<0$ 时，$f(x)<0$.

令 $t(x)=x^2e^x,x<-1$.

则 $t'(x)=(x^2+2x)e^x$. 令 $t'(x)=0$，得 $x=-2$ 或 0.

所以 $t(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 内为增函数，在 $(-2,-1)$ 内为减函数.

所以 $t(x)_{\max}=t(-2)=\dfrac{4}{e^2}<1$. 所以 $x^2e^x<1$.

又 $x<-1$，所以 $xe^x>\dfrac{1}{x}$.

而当 $x<-1$ 时，$\dfrac{1}{x}\in(-1,0)$，

所以当 $x\in(-\infty,-1]$ 时，$f(x)\in\left[-\dfrac{1}{e},0\right)$；

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)\in\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$.

(1) 当 $a=0$ 时，$g(x)=1$，符合题意；

(2) 当 $a>0$ 时，易得 $g(x)\in[-2a+1,2a+1]$. 依题意 $\begin{cases}-2a+1\ge 0,\\ 2a+1<2e^2,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a\le\dfrac{1}{2},\\ a<e^2-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以此时 $0<a\le\dfrac{1}{2}$.

(3) 当 $a<0$，则 $g(x)\in[2a+1,-2a+1]$，依题意 $\begin{cases}2a+1\ge 0,\\ -2a+1<2e^2,\end{cases}$

所以$\begin{cases} a \geq -\dfrac{1}{2}, \\ a > -e^2 + \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 所以$-\dfrac{1}{2} \leq a < 0$.

综上$a \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$. ……………13 分