2018 北京通州区高三一模考试

数　　学（理）

2018. 4

本试卷分第一部分和第二部分两部分，共 150 分．考试时间长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

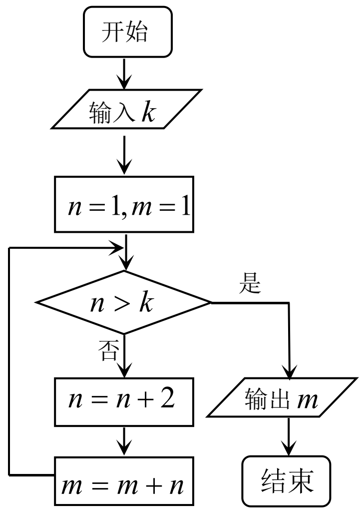
1．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x-1<0\}$，$B=\{0,1,2\}$，那么 $(\complement_U A)\cap B$ 等于

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{2\}$

2．已知 x，y 满足 $\begin{cases} x+y\ge 0, \\ x\le 1, \\ x-y\ge -2, \end{cases}$ 那么 $z=2x+y$ 的最小值是

A．-1　　B．0

C．1　　D．2



3．执行如右图所示的程序框图，若输出 m 的值是 25，则输入 k 的值可以是

A．4　　B．6

C．8　　D．10

4．设 $a=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{6}$，$b=\log_3\dfrac{1}{2}$，$c=3^{-\frac{1}{2}}$，那么

A．$c>b>a$　　B．$c>a>b$　　C．$a>b>c$　　D．$a>c>b$

5．“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-bx+1>0$ 成立”是“$b\in[0,1]$”的

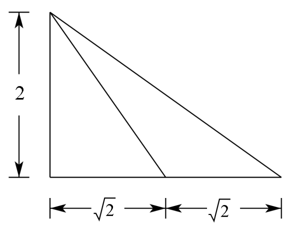
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知抛物线 $y^2=8x$ 的准线与圆心为 C 的圆 $x^2+y^2+2x-8=0$ 交于 A，B 两点，那么 $|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$ 等于

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$4\sqrt{2}$

7．已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且它的正视图如图所示，则该四棱锥侧视图的面积是



A．$4\sqrt{2}$　　B．4

C．$2\sqrt{2}$　　D．2

8．描金又称泥金画漆，是一种传统工艺美术技艺．起源于战国时期，在漆器表面，用金色描绘花纹的装饰方法，常以黑漆作底，也有少数以朱漆为底．描金工作分为两道工序，第一道工序是上漆，第二道工序是描绘花纹．现甲、乙两位工匠要完成 A，B，C 三件原料的描金工作，每件原料先由甲上漆，再由乙描绘花纹．每道工序所需的时间（单位：小时）如下：

原料 / 时间 / 工序	原料 A	原料 B	原料 C
上漆	9	16	10

描绘花纹	15	8	14

则完成这三件原料的描金工作最少需要

A．43 小时　　　B．46 小时　　　C．47 小时　　　D．49 小时

第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9．已知复数 $(1-\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})$ 是纯虚数，那么实数 $a=$______.

10．若直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=-1+t \end{cases}$（$t$ 为参数），则点 $P(4,0)$ 到直线 l 的距离是______.

11．已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_3=4$，$a_6=32$，那么 $\dfrac{a_8}{a_6}=$______；记数列 $\{a_n-2n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=$______.

12．2 位教师和 4 名学生站成一排合影，要求 2 位教师站在中间，学生甲不站在两边，则不同排法的种数为______（结果用数字表示）.

13．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=60°$，$b=4$，下列判断：

①若 $c=\sqrt{3}$，则角 C 有两个解；

②若 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=12$，则 AC 边上的高为 $3\sqrt{3}$；

③ $a+c$ 不可能是 9.

其中判断正确的序号是______.

14．设函数 $f(x)=x^2+a\cos x$，$a\in\mathbf{R}$，非空集合 $M=\{x\,|\,f(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$.

① M 中所有元素之和为______；

②若集合 $N=\{x\,|\,f(f(x))=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $M=N$，则 a 的值是______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．（本题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)\cos\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\cos^2\dfrac{x}{2}$.

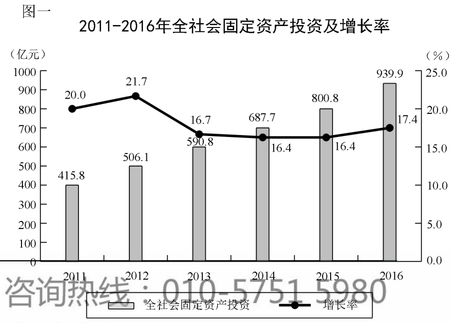
（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,0]$ 上的最大值和最小值.

16．（本题满分 13 分）

作为北京副中心，通州区的建设不仅成为京津冀协同发展战略的关键节点，也肩负着医治北京市“大城市病”的历史重任，因此，通州区的发展备受瞩目. 2017 年 12 月 25 日发布的《北京市通州区统计年鉴（2017）》显示：2016 年通州区全区完成全社会固定资产投资 939.9 亿元，比上年增长 17.4%，下面给出的是通州区 2011-2016 年全社会固定资产投资及增长率，如图一.

图一



又根据通州区统计局 2018 年 1 月 25 日发布：2017 年通州区全区

完成全社会固定资产投资 1054.5 亿元，比上年增长 12.2%.

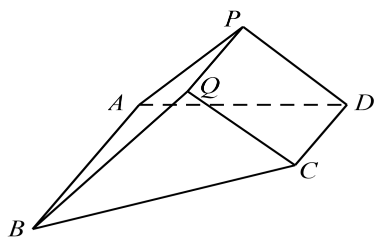
（Ⅰ）在图二中画出 2017 年通州区全区完成全社会固定资产投资（柱状图），标出增长率并补全折线图；

（Ⅱ）通过计算 2011-2017 这 7 年的平均增长率约为 17.2%，现从 2011-2017 这 7 年中随机选取 2 个年份，记 X 为“选取的 2 个年份中，增长率高于 17.2%的年份个数”，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）设 2011-2017 这 7 年全社会固定资产投资总额的中位数为 x_0，平均数为 $\overline{x}$，比较 x_0 与 $\overline{x}$ 的大小（只需写出结论）.

17.（本题满分 14 分）

如图所示的几何体中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，$\angle APD=90^\circ$，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//DC$，$AB\perp AD$，$AB=AD=2$，$PQ//DC$，$PQ=DC=1$.



（Ⅰ）求证：$PD//$ 平面 QBC；

（Ⅱ）求二面角 $Q-BC-A$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 QB 上是否存在点 M，使得 $AM\perp$ 平面 QBC，若存在，求 $\dfrac{|QM|}{|QB|}$ 的值；若不存在，请说明理由.

18.（本题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=xe^x$，$g(x)=a(e^x-1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求证：$f(x)\geq g(x)$；

（Ⅱ）当 $a>1$ 时，求关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数.

19.（本题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的上、下顶点分别为 A，B，且 $AB=2$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，O 为坐标原点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 P，Q 是椭圆 C 上的两个动点（不与 A，B 重合），且关于 y 轴对称，M，N 分别是 OP，BP 的中点，直线 AM 与椭圆 C 的另一个交点为 D. 求证：D，N，Q 三点共线.

20.（本题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$，设 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n\left(n=1,2,3,\cdots\right)$，若数列 $\{\Delta a_n\}$ 为单调增数列或常数列时，则 $\{a_n\}$ 为凸数列.

（Ⅰ）判断首项 $a_1>0$，公比 $q>0$，且 $q\neq1$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 是否为凸数列，并说明理由；

（Ⅱ）若 $\{a_n\}$ 为凸数列，求证：对任意的 $1\leq k<m<n$，且 k，m，$n\in\mathbf{N}$，

均有 $\dfrac{a_n-a_m}{n-m}\geq a_{m+1}-a_m\geq\dfrac{a_m-a_k}{m-k}$，且 $a_m\leq\max\{a_1,a_n\}$；

其中 $\max\{a_1, a_n\}$ 表示 a_1， a_n 中较大的数；

（III）若 $\{a_n\}$ 为凸数列，且存在 $t\left(1<t<n, t\in\mathbf{N}\right)$，使得 $a_0 \le a_t$， $a_n \le a_t$，

求证：$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

数学试题答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	D	B	D	C	B

二、填空题

9. -1 10. $\sqrt{2}$ 11. 4，2^n-1-n^2-n

12. 24 13. ②③14. 0， 0

三、解答题

15. **解：**（Ⅰ）因为 $f\left(x\right)=\sin\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)\cos\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\cos^2\dfrac{x}{2}$

$$=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ ························4 分

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.························6 分

（Ⅱ）因为 $x\in\left[-\pi,0\right]$，所以 $x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$.

所以当 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 $\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

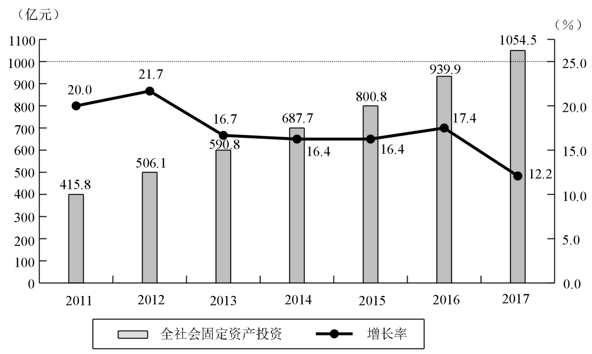
当 $x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=-\dfrac{5\pi}{6}$ 时，函数　　取得最小值 $-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\pi,0\right]$ 上的最大值和最小值分别为 $\sqrt{3}$ 和 $-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.··················13 分

16. **解：**（Ⅰ）

图二

2011-2017年全社会固定资产投资及增长率



························4 分

（Ⅱ）依题意，X 的可能取值为0，1，2．　……………………5 分

$P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}=\dfrac{4}{7}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{7}$．……………………8 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

……………………9 分

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$．……………………10 分

（Ⅲ）$x_0<$ ．……………………13 分

17．**解：**（Ⅰ）因为 $PQ//CD$，$PQ=CD$，所以四边形 $PQCD$ 是平行四边形.

所以 $PD//QC$.

因为 $PD\not\subset$ 平面 QBC，$QC\subset$ 平面 QBC，

所以 $PD//$ 平面 QBC.……………………4 分

（Ⅱ）取 AD 的中点为 O，

因为 $PA=PD$，所以 $OP\perp AD$.

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$OP\subset$ 平面 PAD，

所以 $OP\perp$ 平面 $ABCD$.……………………5 分

以点 O 为坐标原点，分别以直线 OD，OP 为 y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$，则 x 轴在平面 $ABCD$ 内．

因为 $\angle APD=90°$，$AB=AD==2$，$PQ=CD=1$，

所以 $A(0,-1,0)$，$B(2,-1,0)$，$C(1,1,0)$，$Q(1,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BQ}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{CQ}=(0,-1,1)$．……………………7 分

设平面 QBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y+z=0,\\ -y+z=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=y+z,\\ y=z.\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $y=1$，$x=2$．

所以 $\vec{n}=(2,1,1)$．……………………8 分

设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，所以 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{6}\times1}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

又因为二面角 $Q-BC-A$ 为锐角，

所以二面角 $Q-BC-A$ 的余弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ························10 分

（Ⅲ）存在. 设点 $M\left(a,b,c\right)$，$\frac{|QM|}{|QB|}=\lambda$，$\lambda\in[0,1]$.

所以 $\overrightarrow{QM}=\left(a-1,b,c-1\right)$，$\overrightarrow{QB}=\left(1,-1,-1\right)$.

所以 $a=\lambda+1$，$b=-\lambda$，$c=-\lambda+1$. 所以点 $M\left(\lambda+1,-\lambda,-\lambda+1\right)$.

所以 $\overrightarrow{AM}=\left(\lambda+1,-\lambda+1,-\lambda+1\right)$.

又平面 QBC 的法向量为 $\vec{n}=\left(2,1,1\right)$，$AM\perp$ 平面 QBC，所以 $\frac{\lambda+1}{2}=\frac{-\lambda+1}{1}$.

所以 $\lambda=\frac{1}{3}$.

所以在线段 QB 上存在点 M，使 $AM\perp$ 平面 QBC，且 $\frac{|QM|}{|QB|}$ 的值是 $\frac{1}{3}$. ··············14 分

18. **解**：（Ⅰ）设函数 $F(x)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=xe^{x}-ae^{x}+a$.

当 $a=1$ 时，$F(x)=xe^{x}-e^{x}+1$，所以 $F'(x)=xe^{x}$.

所以 $x\in(-\infty,0)$ 时，$F'(x)<0$；$x\in(0,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$.

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=0$ 时，$F(x)$ 取得最小值 $F(0)=0$.

所以 $F(x)\geq 0$，即 $f(x)\geq g(x)$. ························4 分

（Ⅱ）当 $a>1$ 时，$F'(x)=(x-a+1)e^{x}$，

令 $F'(x)>0$，即 $(x-a+1)e^{x}>0$，解得 $x>a-1$；

令 $F'(x)<0$，即 $(x-a+1)e^{x}<0$，解得 $x<a-1$.

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty，a-1)$ 上单调递减，在 $(a-1,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=a-1$ 时，$F(x)$ 取得极小值，即 $F(a-1)=a-e^{a-1}$. ························6 分

令 $h(a)=a-e^{a-1}$，则 $h'(a)=1-e^{a-1}$.

因为 $a>1$，所以 $h'(a)<0$. 所以 $h(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $h(a)<h(1)<0$. 所以 $F(a-1)<0$.

又因为 $F(a)=a>0$，所以 $F(x)$ 在区间 $(a-1,a)$ 上存在一个零点.

所以在 $[a-1,+\infty)$ 上存在唯一的零点. ························10 分

又因为 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,a-1)$ 上单调递减，且 $F(0)=0$，

所以 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,a-1)$ 上存在唯一的零点 0. ························12 分

所以函数 $h(x)$ 有且仅有两个零点，即使 $f(x)=g(x)$ 成立的 x 的个数是两个.

························13 分

19. 解：（Ⅰ）因为椭圆的焦点在 x 轴上，$AB=2$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $b=1$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以由 $a^2=b^2+c^2$，得 $a^2=4$.

所以椭圆 C 的标准方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ························3 分

（Ⅱ）设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，所以 Q 的坐标为 $(-x_0,y_0)$.

因为 M，N 分别是 OP，BP 的中点，

所以 M 点的坐标为 $\left(\dfrac{x_0}{2},\dfrac{y_0}{2}\right)$，$N$ 点的坐标为 $\left(\dfrac{x_0}{2},\dfrac{y_0-1}{2}\right)$. ························4 分

所以直线 AD 的方程为 $y=\dfrac{y_0-2}{x_0}x+1$. ························6 分

代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，整理得 $\left[x_0^{\ 2}+4(y_0-2)^2\right]x^2+8x_0(y_0-2)x=0$.

所以 $x=0$，或 $x=\dfrac{8x_0(2-y_0)}{x_0^{\ 2}+4(y_0-2)^2}=\dfrac{2x_0(2-y_0)}{5-4y_0}$.

所以 $y=\dfrac{y_0-2}{x_0}\cdot\dfrac{2x_0(2-y_0)}{5-4y_0}+1=\dfrac{-2y_0^{\ 2}+4y_0-3}{5-4y_0}$.

所以 D 的坐标为 $\left(\dfrac{2x_0(2-y_0)}{5-4y_0},\dfrac{-2y_0^{\ 2}+4y_0-3}{5-4y_0}\right)$. ························10 分

所以 $k_{QN}=\dfrac{\dfrac{y_0-1}{2}-y_0}{\dfrac{x_0}{2}+x_0}=-\dfrac{y_0+1}{3x_0}$. 又 $k_{QD}=\dfrac{\dfrac{-2y_0^{\ 2}+4y_0-3}{5-4y_0}-y_0}{\dfrac{2x_0(2-y_0)}{5-4y_0}+x_0}=-\dfrac{y_0+1}{3x_0}$.

所以 D， N， Q 三点共线. ……………………13 分

20. 解：（Ⅰ）因为 $\Delta a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$， $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$，

所以 $\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=a_nq^2+a_n-2a_nq=a_n\left(q^2+1-2q\right)=a_n\left(q-1\right)^2$.

因为　　　，公比　　　，且　　　，所以 $a_n>0$，$\left(q-1\right)^2>0$.

所以 $a_n\left(q-1\right)^2>0$.

所以等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 为凸数列. ……………………3 分

（Ⅱ）因为数列 $\{a_n\}$ 为凸数列，

所以 $a_{m+1}-a_m=a_{m+1}-a_m$， $a_{m+2}-a_{m+1}\ge a_{m+1}-a_m$， $a_{m+3}-a_{m+2}\ge a_{m+1}-a_m$， …，

$a_{m+n-m}-a_{m+n-m-1}\ge a_{m+1}-a_m$.

叠加得 $a_n-a_m\ge(n-m)\left(a_{m+1}-a_m\right)$.　所以 $\dfrac{a_n-a_m}{n-m}\ge a_{m+1}-a_m$.

同理可证 $\dfrac{a_m-a_k}{m-k}\le a_{m+1}-a_m$.

综上所述， $\dfrac{a_n-a_m}{n-m}\ge a_{m+1}-a_m\ge\dfrac{a_m-a_k}{m-k}$. ……………………7 分

因为 $\dfrac{a_n-a_m}{n-m}\ge\dfrac{a_m-a_k}{m-k}$， 所以 $(m-k)a_n+(k-m)a_m\ge(n-m)a_m+(m-n)a_k$.

所以 $(m-k)a_n+(n-m)a_k\ge(n-k)a_m$.

令 $k=1$， $\left(m-1\right)a_n+(n-m)a_1\ge\left(n-1\right)a_m$. 所以 $a_m\le\dfrac{m-1}{n-1}a_n+\left(\dfrac{n-m}{n-1}\right)a_1$.

若 $a_1\le a_n$， 则 $a_m\le\dfrac{m-1}{n-1}a_n+(\dfrac{n-m}{n-1})a_1\le\dfrac{m-1}{n-1}a_n+(\dfrac{n-m}{n-1})a_n=a_n$.

若 $a_1\ge a_n$， 则 $a_m\le\dfrac{m-1}{n-1}a_n+(\dfrac{n-m}{n-1})a_1\le\dfrac{m-1}{n-1}a_1+(\dfrac{n-m}{n-1})a_1=a_1$.

所以 $a_m\le\max\left\{a_1,a_n\right\}$. ……………………10 分

（Ⅲ）设 a_p 为凸数列 $\{a_n\}$ 中任意一项，

由（Ⅱ）可知， $a_p\le\max\{a_1,a_n\}\le a_t$.

再由（II）可知，对任意的$1\le p<m<n$均有$\dfrac{a_n-a_m}{n-m}\ge a_{m+1}-a_m\ge\dfrac{a_m-a_p}{m-p}$，

（1）当$1\le p<t<n$时，$\dfrac{a_n-a_t}{n-t}\ge\dfrac{a_t-a_p}{t-p}$.

又因为$a_n\le a_t$，所以$0\ge\dfrac{a_n-a_t}{n-t}\ge\dfrac{a_t-a_p}{t-p}$. 所以$a_p\ge a_t$.

（2）当$1<t<p\le n$时，$\dfrac{a_p-a_t}{p-t}\ge\dfrac{a_t-a_1}{t-1}$.

又因为$a_1\le a_t$，所以$\dfrac{a_p-a_t}{p-t}\ge\dfrac{a_t-a_1}{t-1}\ge 0$. 所以$a_p\ge a_t$.

（3）当$p=t$时，$a_p=a_t$.

所以$a_p\ge a_t$.

综上所述，$a_p=a_t$.

所以$a_1=a_2=\cdots=a_n$. ……………………14 分