南充市高 2022 届第一次诊断性考试

理科数学评分细则

一．选择题： 本题共 12 小题， 每小题 5 分， 共 60 分．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	A	A	C	B	A	C	D	B	C

二．填空题：本题共 4 小题， 每小题 5 分， 共 20 分．

13．-2　　14．$(4,-4)$　　15．2　　16．①②③④

三． 解答题

17．（1）因为 $S_{n+1}=S_n+a_n+1$，所以 $S_{n+1}-S_n=a_n+1$，即 $a_{n+1}=a_n+1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公差为 1 的等差数列……………………………………2 分

选①．由 $a_4+a_7=13$，得 $a_1+3d+a_1+6d=13$，即 $2a_1=13-9d$，

所以 $2a_1=13-9\times1=4$，解得 $a_1=2$．

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times1=n+1$，

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$……………………………………………………6 分

选②．由 a_1，a_3，a_7 成等比数列，得 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+6d)$，

则 $a_1^2+4a_1d+4d^2=a_1^2+6a_1d$，所以 $a_1=2$．

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times1=n+1$……………………………………………6 分

选③．因为 $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}\times d=10a_1+45d$，

所以 $10a_1+45\times1=65$，所以 $a_1=2$．

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)1=n+1$………………………………………………6 分

（2）由题可知 $\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{n+1}{2^n}$，所以 $T_n=\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}$，

所以 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$，

两式相减，得 $\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$，

所以 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}.\left(n\in N^*\right)$……………………………………………………8 分

$T_{n+1}-T_n=\left(3-\frac{n+4}{2^{n+1}}\right)-\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)=\frac{n+2}{2^{n+1}}>0$

故 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$ 于 $n\in N^*$ 单调递增……………………………………9 分

则 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}\geq T_1=1$.

显然 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}<3$.

综上：$1\leq T_n<3$ ………………………………………………………………………12 分

18．解：（1）按分层抽样抽取 8 个口罩，则其中二级、一级口罩个数分别为 6，2．故 X 的可能取值为 0，1，2．

$P(X=0)=\frac{C_6^3\cdot C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$， ……………………………………………………………………2 分

$P(X=1)=\frac{C_6^2\cdot C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$， ……………………………………………………………………3 分

$P(X=2)=\frac{C_6^1\cdot C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$， ……………………………………………………………………4 分

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

……………………………………………………5 分

所以 $E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$. ……………………………………………………6 分

（2）由题知 Y 的可能取值为 0，1，2．

$P(Y=0)=(1-p_1)(1-p_2)=1-p_1-p_2+p_1p_2$; ……………………………7 分

$P(Y=1)=p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2=p_1+p_2-2p_1p_2$；……………………8 分

$P(Y=2)=p_1p_2$. ……………………………………………………………………………………9 分

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$1-p_1-p_2+p_1p_2$	$p_1+p_2-2p_1p_2$	p_1p_2

……………………………………………………………………………………………………10 分

所以 $E(Y)=p_1+p_2$ ……………………………………………………………………………12 分

19.（1）取 D_1E 的中点 N，连 AN、NF，则 $NE=\frac{1}{2}EC$，$NE//EC$

∵ $EC=\frac{1}{2}AB=2$，存在点 M，当 $AM=\frac{1}{4}AB=1$ 时，$AM=\frac{1}{2}EC$，$AM//EC$

则 $NF=AM$ 且 $NF//AM$，则 $AMFN$ 是平行四边形，$AN//MF$.

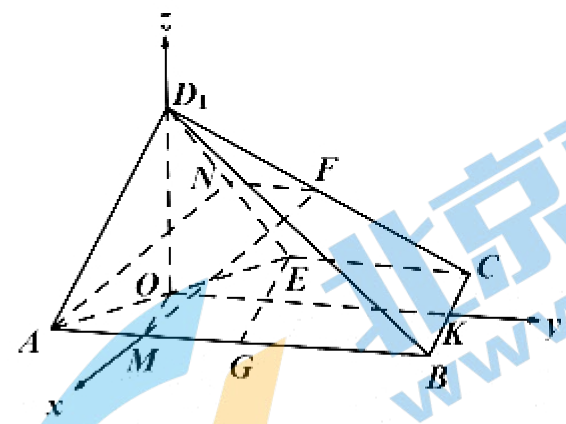
又 $MF\not\subset$ 平面 D_1AE，$AN\subset$ 平面 D_1AE，则 $MF//$ 平面 D_1AE…………………………6 分

（2）分别取 AE、AB、BC 的中点 O、G、K，连 OD_1、OM、OK、EG，

∵ $AD_1=ED_1=2$，∴ $OD_1\perp AE$，又平面 $D_1AE\perp$ 平面 $ABCE$ 且交于 AE，

∴ $OD_1\perp$ 平面 $ABCE$. 易知 $OK//AB$，$OM//EG//BC$，又 $AB\perp BC$，∴ $OM\perp OK$，

故如图建系 $O-xyz$.



设平面 CD_1E 的一个法向量 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

∵ $EC//y$ 轴，∴ $\overrightarrow{EC}=(0,2,0)$，

∵ $OD_1=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$，

∴ D_1 为（0，0，$\sqrt{2}$），又 E 为（－1，1，0），则 $\overrightarrow{ED_1}=(1,-1,\sqrt{2})$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=2y=0\\ \overrightarrow{ED_1}\cdot\vec{n}=x-y+\sqrt{2}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=-\sqrt{2}z\end{cases}$

取 $z=1$，则 $\vec{n}=(-\sqrt{2},\ 0,\ 1)$ …………………………………………………9 分

又 B 为（1，3，0），则 $\overrightarrow{BD_1}=(-1,-3,\sqrt{2})$，

记直线 BD_1 与平面 CD_1E 所成角的大小为 φ，

则 $\sin\varphi=\frac{|\overrightarrow{BD_1}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ……………………………………11 分

直线 BD_1 与平面 CD_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ……………………………………………12 分

20.解：(1)因为 $|B_1B_2|=2$，所以 $2b=2$，即 $b=1$，因为离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，设 $c=\sqrt{3}m$，

则 $a=2m,m>0$，又 $c^2=a^2-b^2$，即 $3m^2=4m^2-b^2$，解得 $m=1$ 或 -1（舍去），

所以 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………4 分

(2) 设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由直线的点斜式方程可知，直线 l 的方程为 $y=x+2$，

与椭圆方程联立，$\begin{cases} y=x+2 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，

整理得 $5x^2+16x+12=0$，

则 $\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{16}{5} \\ x_1x_2=\dfrac{12}{5} \end{cases}$，……………………………………………………………………………6 分

所以 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+1^2}\times\sqrt{\left(-\dfrac{16}{5}\right)^2-4\times\dfrac{12}{5}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，

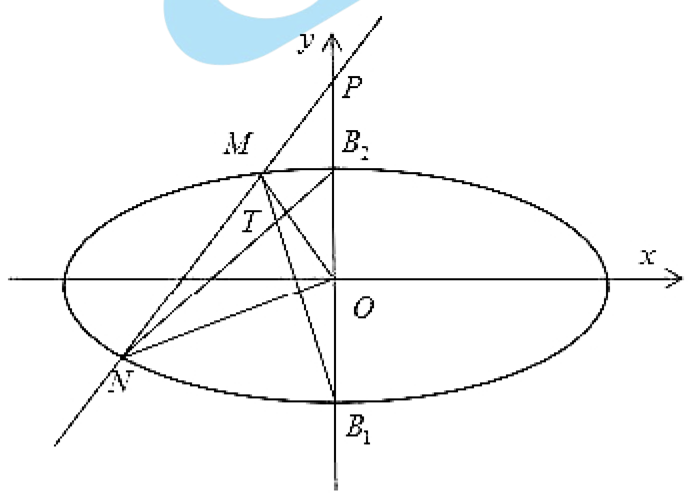
由原点到 l 的距离 $d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1^2}}=\sqrt{2}$，

所以 ΔOMN 的面积

$S=\dfrac{1}{2}d|MN|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\times\sqrt{2}=\dfrac{4}{5}$ ……………………………………………………8 分

(3)由题意知，直线 l 的方程为 $y=kx+2$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，



整理得 $(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$，

则 $\begin{cases} \Delta=(16k)^2-4\times12(1+4k^2)>0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{16k}{4k^2+1} \\ x_1x_2=\dfrac{12}{4k^2+1} \end{cases}$，

因为直线和椭圆有两个交点，所以 $\Delta=(16k)^2-48(4k^2+1)>0$，则 $k^2>\frac{3}{4}$，……………9 分

设 $T(m,n)$，因为 B_1,T,M 在同一条直线上，则 $\frac{n+1}{m}=\frac{y_1+1}{x_1}=\frac{kx_1+3}{x_1}=k+\frac{3}{x_1}$，

因为 B_2,T,N 在同一条直线上，则 $\frac{n-1}{m}=\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{kx_2+1}{x_2}=k+\frac{1}{x_2}$，

由于 $\frac{n+1}{m}+3\cdot\frac{n-1}{m}=4k+\frac{3(x_1+x_2)}{x_1x_2}=4k+\frac{3\cdot\left(-\frac{16k}{4k^2+1}\right)}{\frac{12}{4k^2+1}}=0$，所以 $n=\frac{1}{2}$，

则交点 T 恒在一条直线 $y=\frac{1}{2}$ 上，

故交点 T 的纵坐标为定值 $\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………12 分

21. （Ⅰ）$f'(x)=(x-a)-\frac{(x-a)}{e^x}=(x-a)\frac{e^x-1}{e^x}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=a$ 或 $x=0$，……………………………………………………1 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>a$ 或 $x<0$，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减；

当 $a=0$ 时，由 $f'(x)=\frac{x(e^x-1)}{e^x}>0$，得 $x>0$，由 $f'(x)<0$，得 $x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<a$ 或 $x>0$，由 $f'(x)<0$，得 $a<x<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,0)$ 上单调递减，……………4 分

综上所述：当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减；

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,0)$ 上单调递减……………5 分

（Ⅱ）（ⅰ）当 $a\in(0,1)$ 时，$g(x)=f(x)-f(0)=f(x)+a-1$，

$g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同，

由（Ⅰ）知，当 $a\in(0,1)$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(a)<g(0)=f(0)-f(0)=0$，

当 $x>a$ 时 $g(x)=f(x)-f(0)=\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{x-a+1}{e^x}-(1-a)>\frac{1}{2}x^2-ax-(1-a)$.

法一：$g(a+\sqrt{a^2+2(1-a)})>\frac{1}{2}\left[a+\sqrt{a^2+2(1-a)}\right]^2-a\left[a+\sqrt{a^2+2(1-a)}\right]-(1-a)=0$.

存在唯一的 $x_0\in(a,a+\sqrt{a^2-2a+2})$，使得 $g(x_0)=0$.

故函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一的一个零点……………………………………8 分

法二：

$g(x)=f(x)-f(0)=\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{x-a+1}{e^x}-(1-a)>\frac{1}{2}x^2-ax-(1-a)>\frac{1}{2}x^2-ax-1=\frac{1}{2}x(x-2a)-1$

$g(2a+2)>\frac{1}{2}(2a+2)\times 2-1=2a+1>0$.

存在唯一的 $x_0\in(a,2a+2)$，使得 $g(x_0)=0$.

故函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一的一个零点……………………………………8 分

法三：

$g(x)=f(x)-f(0)=\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{x-a+1}{e^x}-(1-a)>\frac{1}{2}x^2-ax+a-1$

$g(2)>\frac{1}{2}\times 2^2-2a+a-1=1-a>0$.

存在唯一的 $x_0\in(a,2)$，使得 $g(x_0)=0$.

故函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一的一个零点……………………………………8 分

说明：若给出解法为：当 $a\in(0,1)$ 时，$g(x)=f(x)-f(0)=f(x)+a-1$，

$g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同，

由（Ⅰ）知，当 $a\in(0,1)$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(a)<g(0)=f(0)-f(0)=0$，

当 $x>a$ 时 $x\to+\infty$，$g(x)\to+\infty$.（扣 2 分）.

（ii）证明：要证 $e^{x_0}<\frac{x_0}{1-a}+1$.

只需证 $\frac{x_0+1-a}{e^{x_0}}>1-a$……………………………………9 分

由于 $g(x_0)=0$，得 $f(x_0)=f(0)$，故 $\frac{1}{2}x_0^2-ax_0+\frac{x_0+1-a}{e^{x_0}}=1-a$，

只需证 $\frac{1}{2}x_0^2-ax_0+\frac{x_0+1-a}{e^{x_0}}<\frac{x_0+1-a}{e^{x_0}}$，

只需证 $x_0<2a$，

因为 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，所以只需证明 $f(x_0)<f(2a)$，

因为 $f(x_0)=f(0)$，所以只需证明 $f(2a)>f(0)$，……………………………………10 分

法一：由 $f(2a)-f(0)=\frac{a+1}{e^{2a}}-(1-a)=\frac{a+1}{e^{2a}}+a-1$，

设 $h(a)=\frac{a+1}{e^{2a}}+a-1$，$a\in(0,1)$.

则 $h'(a)=\frac{e^{2a}-2a-1}{e^{2a}}$ ……………………………………………………………………10 分

令 $2a=t$，则 $t\in(0,2)$，设 $k(t)=e^{t}-t-1$.

则 $k'(t)=e^{t}-1>0$

所以 $k(t)=e^{t}-t-1$ 在 $(0,2)$ 单调递增，$k(t)=e^{t}-t-1>k(0)=0$.

则 $h'(a)=\frac{e^{2a}-2a-1}{e^{2a}}>0$ ……………………………………………………………………11 分

所以 $h(a)=\frac{a+1}{e^{2a}}+a-1$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $h(a)>h(0)=0$.

所以 $f(2a)>f(0)$，

故原不等式得证……………………………………………………………………………………12 分

法二：由 $f(2a)-f(0)=\frac{a+1}{e^{2a}}-(1-a)=(1-a)\left[\frac{a+1}{(1-a)e^{2a}}-1\right]$，

设 $\varphi(a)=\frac{a+1}{(1-a)e^{2a}}-1$，$a\in(0,1)$……………………………………………………10 分

则 $\varphi'(a)=\frac{(1-a)e^{2a}-(a+1)\left[-e^{2a}+2(1-a)e^{2a}\right]}{(1-a)^{2}e^{2a}}=\frac{2a^{2}}{(1-a)^{2}e^{2a}}>0$，……………………11 分

所以 $\varphi(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $\varphi(a)>\varphi(0)=0$，

所以 $f(2a)>f(0)$，

故原不等式得证……………………………………………………………………………………12 分

法三：由 $f(2a)-f(0)=\frac{a+1}{e^{2a}}-(1-a)=\frac{1-a}{e^{2a}}\bullet\left(\frac{1+a}{1-a}-e^{2a}\right)=\frac{1-a}{e^{2a}}\bullet\left(e^{\ln\frac{1+a}{1-a}}-e^{2a}\right)$，

设 $p(a)=\ln\frac{1+a}{1-a}-2a=\ln(1+a)-\ln(1-a)-2a$，$a\in(0,1)$……………………………10 分

则 $p'(a)=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}-2=\frac{2-2(1-a^{2})}{(1+a)\bullet(1-a)}=\frac{2a^{2}}{(1+a)\bullet(1-a)}>0$，…………………………11 分

$p(a)=\ln\frac{1+a}{1-a}-2a$ 于 $(0,1)$ 单调递增，

因为 $1>a>0$，所以 $p(a)>p(0)=0$.

所以 $f(2a)>f(0)$.

故原不等式得证……………………………………………………………………………………12 分

22. 解析：（Ⅰ）将 C_1 化为普通方程为 $(x-a)^2+y^2=a^2$，其极坐标方程为 $\rho=2a\cos\theta$.

由题可得当 $\theta=0$ 时，$|OA|=\rho=1$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$.

将 C_2 化为普通方程为 $x^2+(y-b)^2=b^2$，其极坐标方程为 $\rho=2b\sin\theta$.

由题可得当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|OB|=\rho=2$，$\therefore b=1$. ………………………………………………………5 分

（Ⅱ）由 a，b 的值可得 C_1，C_2 的方程分别为 $\rho=\cos\theta$，$\rho=2\sin\theta$.

$\therefore 2|OA|^2+\sqrt{3}|OA|\cdot|OB|=2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cdot\cos\theta=1+\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta=2\sin\left|2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right|+1$

$\because 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \dfrac{\pi}{6}\le 2\theta+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{6}$，$2|OA|^2+\sqrt{3}|OA|\cdot|OB|$ 最大值为 3……………………………9 分

当 $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 时，即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 取到………………………………………………………………………10 分

23. 解：（1）$f(x)=\begin{cases}-3x, & x\le -1\\ -x+2, & -1<x\le\dfrac{1}{2}\\ 3x, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

当 $x\le -1$ 时，$f(x)\ge f(-1)=3$，

当 $-1<x\le\dfrac{1}{2}$，$3>f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$，

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$，

所以 $m=[f(x)]_{\min}=f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………………………5 分

（2）由 $abc=\dfrac{2}{3}m=1$ 可得，$ab+bc+ca=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，

因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，所以要证明不等式 $(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge 9$，

只需证明 $\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b+c)\ge 9$，

因为 $\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=9$， ……………………………………9 分

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，等号成立.

故原不等式成立. ……………………………………………………………………………………10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。