姓名＿＿＿＿＿＿＿＿　　　座位号＿＿＿＿＿＿＿＿

（在此卷上答题无效）

绝密 ★ 启用前

2022 届“江南十校”一模联考

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、准考证号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x \mid |x-1|>2\}$，$B=\{x \mid \log_4 x<1\}$，则 $A\cap B=$

A. $(3,4)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(3,4)$　　C. $(1,4)$　　D. $(-\infty,4)$

2. 已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(2,1)$，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $\frac{\bar{z}}{z}=$

A. $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$　　B. $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　C. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$　　D. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

3. 已知函数 $f(x)=2^{|x|}$，$a=f(\log_{0.5}3)$，$b=f(\log_4 5)$，$c=f(\cos\frac{\pi}{3})$，则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

4. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，若 $3a_2$ 是 a_3 与 a_4 的等差中项，且 $a_3-a_1=3$，则 $a_5=$

A. $\frac{81}{8}$　　B. 16　　C. $\frac{243}{8}$　　D. 32

5. $(x-2y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为

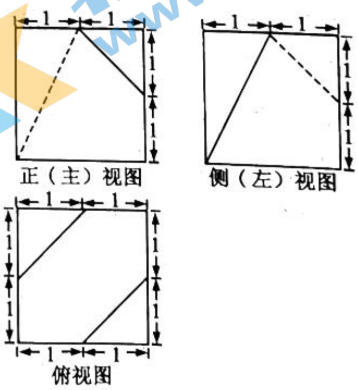
A. -80　　B. 80

C. -40　　D. 40

6. 某正方体被截去部分后得到的空间几何体的三视图如图所示，则该空间几何体的体积为

A. $\frac{13}{2}$　　B. $\frac{22}{3}$

C. $\frac{15}{2}$　　D. $\frac{23}{3}$



（第 6 题图）

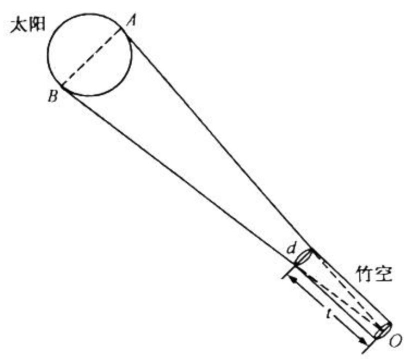
7. 安徽省 2021 年高考综合改革实施方案中规定：高考考试科目按照“3+1+2”的模式设置，“3”为语文、数学、外语 3 门必考科目；“1”为由考生在物理、历史 2 门中选考 1 门作为首选科目；“2”为由考生在思想政治、地理、化学、生物 4 门中选考 2 门作为再选科目. 现有甲、乙两位同学选科，若他们的首选科目均为物理，在再选科目中，两人选择每科目的可能性相同，且他们的选择互不影响，则这两名同学的再选科目中至多有一门相同的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

8. 已知实数 a,b 满足 $2a^2-b^2=1$，则 $|2a-b|$ 的最小值为

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

9.《周髀算经》中“侧影探日行”一文有记载：“即取竹空，径一寸，长八尺，捕影而视之，空正掩日，而日应空之孔。”意谓：“取竹空这一望筒，当望筒直径 d 是一寸，筒长 t 是八尺时(注：一尺等于十寸)，从筒中搜捕太阳的边缘观察，则筒的内孔正好覆盖太阳，而太阳的外缘恰好填满竹管的内孔。”如图所示，O 为竹空底面圆心，则太阳角 $\angle AOB$ 的正切值为



（第 9 题图）

A. $\frac{320}{160^2-1}$　　B. $\frac{1}{160}$

C. $\frac{160}{80^2-1}$　　D. $\frac{1}{80}$

10. 声音是由物体振动产生的声波，我们听到的声音中包含着正弦函数. 若某声音对应的函数可近似为 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$，则下列叙述正确的是

A. $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的对称轴　　B. $(\frac{3\pi}{2},0)$ 为 $f(x)$ 的对称中心

C. $f(x)$ 在区间 $[0,10]$ 上有 3 个零点　　D. $f(x)$ 在区间 $[\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}]$ 上单调递增

11. 设 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，O 为坐标原点，点 P 在椭圆 C 上，延长 PF_2 交椭圆 C 于点 Q，且 $|PF_1|=|PQ|$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}b^2$，则 $\frac{|PQ|}{|F_1F_2|}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=ae^{|x|-2}-\frac{1}{2}x^2-\ln(x+1)+\ln a$，若 $f(x)\geqslant 3$ 恒成立，则 a 的取值范围为

A. $[e,+\infty)$　　B. $[2e,+\infty)$　　C. $[e^2,+\infty)$　　D. $[2e^2,+\infty)$

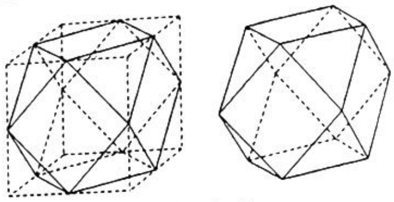
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(t,2)$，$\boldsymbol{b}=(-t,1)$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，则 $t=$______.

14. 设 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 是 C 右支上一点. 若 $|PF_2|=|F_1F_2|$，点 F_2 到直线 PF_1 的距离为 $2a$，则 C 的离心率为______.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n\cdot\sin\dfrac{2n\pi}{3}$，其前 n 项和为 S_n，则 $S_{2022}=$______.

16. 半正多面体亦称阿基米德多面体，是由边数不全相同的正多边形为面的多面体. 如图所示，将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，如此共可截去八个三棱锥，得到一个有十四个面的半正多面体，其中八个面为正三角形，六个面为正方形，它们的边长都相等，称这样的半正多面体为二十四等边体. 现有一个体积为 V_1 的二十四等边体，其外接球体积为 V_2，则 $\dfrac{V_2}{V_1}=$______.



（第 16 题图）

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\tan C=\dfrac{\sin A}{2-\cos A}$.

（1）求 $\dfrac{b}{c}$ 的值；

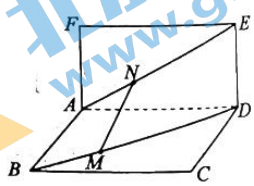
（2）设 M 和 N 分别是 $\triangle ABC$ 的重心和内心，若 $MN/\!/BC$ 且 $c=2$，求 a 的值.

18.（12 分）

如图所示，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在的平面互相垂直，$AD=2AF=2AB=2$，M,N 分别是对角线 BD,AE 上异于端点的动点，且 $BM=AN$.

（1）求证：直线 $MN/\!/$平面 CDE；

（2）当 MN 的长最小时，求二面角 $A-MN-D$ 的余弦值.



（第 18 题图）

19.（12 分）

已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 P,A 两点，且 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{FA}$.

（1）若 $\lambda=4$，求直线 l 的方程；

（2）设点 $E(a,0)$，直线 PE 与抛物线 C 的另一个交点为 B，且 $\overrightarrow{PE}=\mu\overrightarrow{EB}$. 若 $\lambda=4\mu$，求 a 的值.

20. (12 分)

2021 年 10 月 12 日中华人民共和国主席习近平在《生物多样性公约》第十五次缔约方大会领导人峰会视频讲话中提出:"'万物各得其和以生,各得其养以成。'生物多样性使地球充满生机,也是人类生存和发展的基础。保护生物多样性有助于维护地球家园,促进人类可持续发展。"中国大力推进生物多样性保护和恢复,完善政策法规,改善生态环境质量,划定生态保护红线,建立国家公园体系,实施长江十年禁渔,不断加大监管和执法力度,积极履行国际公约义务,全社会生物多样性保护意识不断增强,参与度不断提升,生物多样性下降势头得到基本控制,生态系统稳定性明显增强。某兴趣小组在开展昆虫研究时,设计了如下实验:在一个不透明的密封盒子中装有蝴蝶、蜜蜂等多种昆虫共 $2n(n\geq 4, n\in \mathbf{N})$ 只. 现在盒子上开一小孔,每次只能飞出一只昆虫,且任意一只昆虫都等可能地飞出.

(1)若盒子中共有 8 只昆虫,从中任意飞出 2 只昆虫时,飞出的恰好有 1 只是蜜蜂的概率为 $\frac{4}{7}$.

①求蜜蜂的只数;

②从盒子中任意飞出 3 只昆虫,记飞出蜜蜂的只数为 X,求随机变量 X 的分布列与期望 $E(X)$;

(2)若盒子中的昆虫有一半是蝴蝶时,求"从盒子中任意飞出 2 只昆虫,至少有 1 只蝴蝶飞出"的概率最大值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=(2a-1)x-2a\ln x-\frac{1}{x}, a\in \mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时,求证: $f(x)>\frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=|\sin\theta|+|\cos\theta|$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程;

(2)求曲线 C 围成的图形的面积.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|2x+a|, g(x)=|2x-1|$.

(1)当 $a=2$ 时,求不等式 $f(x)+g(x)\geq 4$ 的解集;

(2)若存在 $x_0\in \mathbf{R}$,使得 $f(x_0)<4-g(x_0+a)$,求 a 的取值范围.

2022 届“江南十校”一模联考

理科数学参考答案、解析及评分细则

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	B	A	C	D	C	A	D	B	C

1.【答案】A.

【解析】$A=\{x|x<-1\text{或}x>3\}$，$B=\{x|0<x<4\}$，$\therefore A\cap B=\{x|3<x<4\}$. 选 A.

2.【答案】D.

【解析】由题知 $z=2+i$，$\bar{z}=2-i$ 则 $\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{2-i}{2+i}=\dfrac{(2-i)^2}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$. 选 D.

3.【答案】B.

【解析】函数 $f(x)=2^{|x|}$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$\because \log_2 3>\log_4 5>1, \cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a=f(\log_{0.5}3)=f(\log_2 3)>b>c$. 选 B.

4.【答案】B.

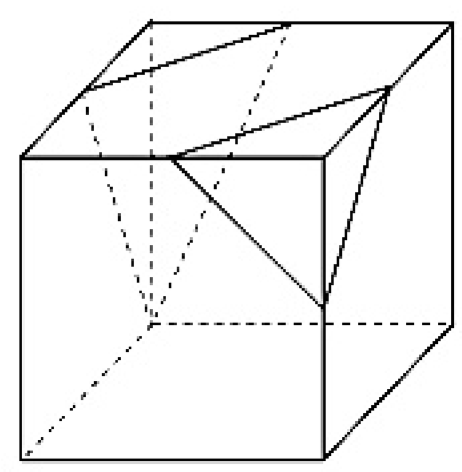
【解析】由等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_2$ 是 a_3 与 a_4 的等差中项，$\therefore 6a_2=a_3+a_4$，即 $q^2+q-6=0$，得 $q=2$ 或 $q=-3$，又 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $q=2$，$\because a_3-a_1=3, \therefore a_1=1$，得 $a_5=a_1q^4=16$. 选 B.

5.【答案】A.

【解析】$(x-2y)^5$ 展开式的第 $r+1$ 项为 $C_5^r x^{5-r}(-2y)^r$，令 $r=3$，可得第 4 项为 $(-2)^3C_5^3x^2y^3$，则 x^2y^3 的系数是 $(-2)^3C_5^3=-80$. 选 A.

6.【答案】C.

【解析】该空间几何体的直观图如图所示，正方体体积为 8，截去的部分为两个三棱锥，由图示可知空间几何体体积为 $V=8-\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1^2\times 1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1^2\times 2\right)=\dfrac{15}{2}$. 选 C.



7.【答案】D.

【解析】甲、乙两位同学在再选科目中没有相同科目的情况有 $C_4^2C_2^2$ 种，在再选科目中恰有一门相同科目的情况有 $C_4^1A_3^2$ 种，因此，他们的再选科目中至多有一门相同科目的概率是 $\dfrac{C_4^2C_2^2+C_4^1A_3^2}{(C_4^2)^2}=\dfrac{5}{6}$. 选 D.

8.【答案】C.

【解析】$\because |2a-b|^2=4a^2+b^2-4ab$，又 $2ab\le a^2+b^2$，则 $4a^2+b^2-4ab\ge 2a^2-b^2=1$，

$\therefore (|2a-b|)_{\min}=1$．选 C.

9.【答案】A.

【解析】由题意可知：$\dfrac{d}{t}=\dfrac{1}{80}$，$\tan\dfrac{\angle AOB}{2}=\dfrac{\frac{d}{2}}{t}=\dfrac{1}{160}$，所以 $\tan\angle AOB=\dfrac{2\tan\frac{\angle AOB}{2}}{1-\tan^2\frac{\angle AOB}{2}}=$

$\dfrac{\frac{1}{80}}{1-\frac{1}{160^2}}=\dfrac{320}{160^2-1}$．选 A.

10.【答案】D.

【解析】$\because f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\dfrac{1}{2}\sin 2(\pi-x)=\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$，$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$，

$\therefore f(\pi-x)\ne f(x)$．故 A 选项错误；而 $f(\dfrac{3\pi}{2})=\sin\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 3\pi=-1\ne 0$．故 B 选项错误；又

$f(x)=\sin x\cdot(1+\cos x)$，令 $f(x)=0$ 得 $x=k\pi(k\in Z)$，所以该函数在区间 $[0,10]$ 内有 4 个零点，

故 C 选项错误；而 $f'(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1$，由 $x\in[\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}]$ 得 $f'(x)\ge 0$，可

知 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}]$ 上单调递增．选 D.

11.【答案】B.

【解析】由 $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\cdot\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$，得 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$，$\therefore \angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，又 $|PF_1|=|PQ|$，

所以 ΔF_1PQ 为等边三角形，由椭圆对称性可知 $PQ\perp x$ 轴，所以 $\dfrac{|PQ|}{|F_1F_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．选 B.

12.【答案】C.

【解析】由题设可知，要使 $f(x)\ge 3$ 成立，则 $f(0)\ge 3$，即 $a\cdot e^{-2}+\ln a\ge 3$，$\therefore a\ge e^2$．下证：当 $a\ge e^2$ 时，

$f(x)\ge 3$ 恒成立，$\because a\ge e^2$，$\therefore f(x)\ge e^{|x|}-\dfrac{1}{2}x^2-\ln(x+1)+2$，易知 $e^{|x|}\ge 1+|x|+\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(x+1)\le x$.（当

$x=0$ 时，两式等号成立）则 $f(x)\ge 1+|x|-x+2=3+|x|-x\ge 3$，得证.所以 $a\in[e^2,+\infty)$．选 C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】$\pm\sqrt{2}$

【解析】由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$ 可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore -t^2+2=0$，得 $t=\pm\sqrt{2}$．

14.【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】由双曲线性质易知$|F_1P|=4b,|F_2P|=2c$，又由双曲线定义可知$|F_1P|-|F_2P|=2a$，即$4b-2c=2a$，

而$b^2=c^2-a^2$，可得$5a^2+2ac-3c^2=0$，即$(a+c)(5a-3c)=0$，所以C的离心率$e=\frac{5}{3}$.

15. 【答案】$-337\sqrt{3}$

【解析】$\{\sin\frac{2n\pi}{3}\}$的最小正周期为3，则$a_{3n-2}=(3n-2)\sin\frac{2\pi(3n-2)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}(3n-2)$；

$a_{3n-1}=(3n-1)\sin\frac{2\pi(3n-1)}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(3n-1)$；$a_{3n}=3n\sin\frac{2\pi\cdot 3n}{3}=0$.$\therefore a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$S_{2022}=\frac{2022}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-337\sqrt{3}$.

16. 【答案】$\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}$

【解析】设该半多面体是由棱长为2的正方体沿正方体各棱的中点截去8个三棱锥所得，内侧即为二十四等边体，其体积$V_1=2\times2\times2-8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{20}{3}$；

由二十四等边体的对称性可知，其外接球的球心即为正方体中心，半径为中心到一个顶点的距离，则

$R=\sqrt{2}$，故$V_2=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$，从而$\frac{V_2}{V_1}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}$.

三、解答题：共70分.

（一）必考题：共60分

17. 【解析】(1) 由已知得，$\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin A}{2-\cos A}$，即$\sin A\cos C=2\sin C-\cos A\sin C$，

得$\sin(A+C)=2\sin C$，……………………………………………3分

即$\sin B=2\sin C$，

由正弦定理得$b=2c$，所以$\frac{b}{c}=2$. ……………………………………………6分

(2) 由 (1) 知$\frac{b}{c}=2$，因为$c=2$，所以$b=4$，……………………………………………7分

设ΔABC的内切圆半径为r，则内心N到BC边的距离为r，因为$MN//BC$，所以重心M到BC边的距离为r，根据重心的性质，顶点A到BC边的距离为$3r$，

根据面积关系得$\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=\frac{1}{2}a\cdot(3r)$，……………………………………………10分

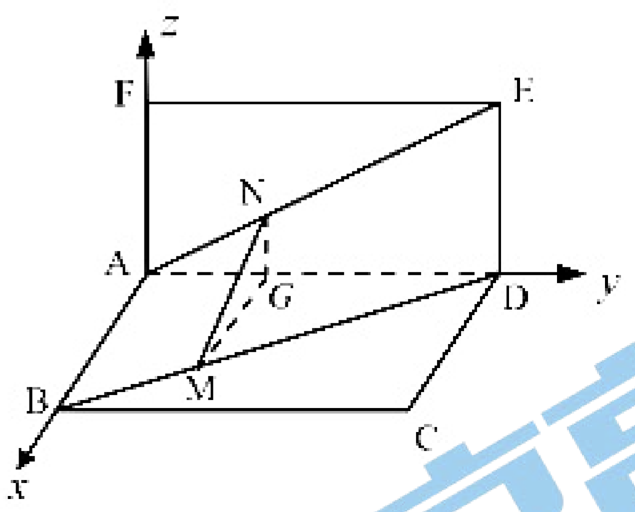
即$\frac{1}{2}(a+4+2)\cdot r=\frac{1}{2}a\cdot(3r)$，所以$a=3$. ……………………………………………12 分

18.【解析】（1）过N作$NN'//AD$与ED交于N'点，过M作$MM'//AD$与CD交于M'点. 连接$M'N'$.

由$BM=AN$，易知$NN'=MM'$，又$NN'//AD//MM'$，则四边形$MNN'M'$为平行四边形，所以$MN//M'N'$，

$\because MN\not\subset$平面CDE，$M'N'\subset$平面CDE，$\therefore MN//$平面CDE. ……………………………4 分

（2）方法一：由平面$ABCD\perp$平面$ADEF$，平面$ABCD\cap$平面$ADEF=AD$，$AF\subset$平面$ADEF$，$AF\perp AD$，可得$AF\perp$平面$ABCD$.如图所示，建立空间直角坐标系，过M点作$MG\perp AD$，垂足为G，连接NG，易知$NG\perp AD$.设$AG=a(0<a<2)$，



可得$M(\frac{2-a}{2},a,0),N(0,a,\frac{a}{2})$，$\therefore |MN|=\sqrt{(\frac{2-a}{2})^2+(\frac{a}{2})^2}=\sqrt{\frac{(a-1)^2+1}{2}}$，

可知当$a=1$时，MN长最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………6 分

此时$M(\frac{1}{2},1,0),N(0,1,\frac{1}{2})$，又$A(0,0,0),D(0,2,0)$，$\therefore \overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},1,0),\overrightarrow{MN}=(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),\overrightarrow{DM}=(\frac{1}{2},-1,0)$，

设平面AMN的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$可得$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1+y_1=0\\ -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}z_1=0\end{cases}$令$x_1=2$，可得

$\vec{m}=(2,-1,2)$， ……………………………………8 分

设平面MND的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$可得$\begin{cases}\frac{1}{2}x_2-y_2=0\\ -\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}z_2=0\end{cases}$令$x_2=2$，可得

$\vec{n}=(2,1,2)$， ……………………………………10 分

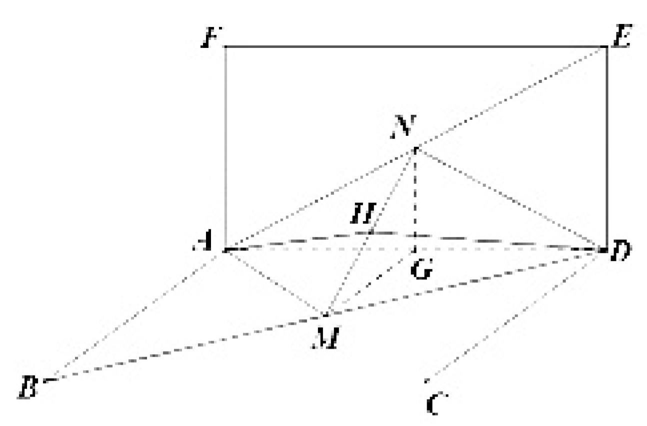
$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{7}{9}$，

易知二面角$A-MN-D$为钝二面角，则二面角$A-MN-D$的余弦值为$-\frac{7}{9}$. ……………………12 分

方法二：过N作$NG\perp AD$，连接MG，由平面$ABCD\perp$平面$ADEF$，平面$ABCD\cap$平面$ADEF=AD$，$NG\subset$平面$ADEF$，$NG\perp AD$，可得$NG\perp$平面$ABCD$，$\therefore NG\perp MG$，

设$NG=\lambda ED=\lambda(0<\lambda<1)$，则$MG=(1-\lambda)AB=1-\lambda$，

所以$MN=\sqrt{\lambda^2+(1-\lambda)^2}=\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1}$，当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$MN$取得最小值. ……………………………6 分



此时 M,N 分别为 BD,AE 的中点，计算得 $AN=AM=DM=DN=\frac{\sqrt{5}}{2}$， $MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

取 MN 的中点 H，连接 AH,DH，则 $AH\perp MN,DH\perp MN$，所以 $\angle AHD$ 为二面角 $A-MN-D$ 的平面角.

计算得 $AH=DH=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. ……………………………9 分

$\cos\angle AHD=\frac{AH^2+DH^2-AD^2}{2AH\cdot DH}=\frac{\frac{9}{8}+\frac{9}{8}-4}{2\times\frac{9}{8}}=-\frac{7}{9}$，则二面角 $A-MN-D$ 的余弦值为 $-\frac{7}{9}$. ……….12 分

19. 【解析】（1）易知焦点 $F(1,0)$，设 $P(x_0,y_0),A(x_1,y_1)$ 由 $\overrightarrow{PF}=4\overrightarrow{FA}$ 得 $y_0=-4y_1$① .

设直线 $l:x=my+1$，与抛物线 $C:y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my-4=0$，其中 $\Delta=16m^2+16>0$，

所以 $y_0y_1=-4$②. ……………………………………2 分

由①②可得 $\begin{cases}y_0=4\\y_1=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y_0=-4\\y_1=1\end{cases}$， ……………………………………3 分

又 $y_0+y_1=4m$，所以 $m=\frac{3}{4}$ 或 $m=-\frac{3}{4}$，

所以直线 l 的方程为 $x=\frac{3}{4}y+1$或$x=-\frac{3}{4}y+1$.

化简得 $4x-3y-4=0$或$4x+3y-4=0$. ……………………………………5 分

（2）由 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{FA}$ 得 $\lambda=-\frac{y_0}{y_1}$③.

又②③可得 $\lambda=\frac{y_0^2}{4}$， ……………………………………7 分

设点 $B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{PE}=\mu\overrightarrow{EB}$ 得 $\mu=-\frac{y_0}{y_2}$④.

设直线 $PB:x=ny+a$，与抛物线 $C:y^2=4x$ 联立得 $y^2-4ny-4a=0$.

所以 $\Delta=16(n^2+a)>0$， $y_0y_2=-4a$⑤.

由④⑤可得 $\mu=\frac{y_0^2}{4a}$， ……………………………………………………10 分

又 $\lambda=4\mu$，所以 $\frac{y_0^2}{4}=4\cdot\frac{y_0^2}{4a}$，考虑到点 P 异于原点，所以 $y_0\neq 0$，

解得 $a=4$，此时 $\Delta=16(n^2+a)=16(n^2+4)>0$，

所以 a 的值为 4. ……………………………………12 分

20.【解析】(1) ①记“从盒子中先后任意飞出两只昆虫，恰有1只蜜蜂”为事件 A，设盒子中蜜蜂的只数为 $x(x\in N^*)$，则 $P(A)=\dfrac{C_x^1\cdot C_{8-x}^1}{C_8^2}=\dfrac{4}{7}$，解得：$x=4$，故蜜蜂共有 4 只. ……………………2 分

②随机变量 X 的取值为 0，1，2，3

$P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{4}{56}=\dfrac{1}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}=\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}=\dfrac{3}{7}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{14}$

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

……………………………6 分

$E(X)=1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{3}{2}$. ……………………………………7 分

(2) 解：记“任意飞出两只昆虫，至少有1只是蝴蝶”为事件 B，则事件 $\overline{B}$ 为“任意飞出两只昆虫，其中没有蝴蝶”；

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{C_n^2}{C_{2n}^2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4(2n-1)}\ (n\geq 4,n\in N)$. ……………………………10 分

当 $n=4$ 时，$(P(B))_{\max}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{28}=\dfrac{11}{14}$. ……………………………………12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=2a-1-\dfrac{2a}{x}+\dfrac{1}{x^2},(x>0)$

$=\dfrac{(2a-1)x^2-2ax+1}{x^2}=\dfrac{[(2a-1)x-1](x-1)}{x^2}$. ……………………………2 分

①若 $a\leq\dfrac{1}{2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………………3 分

②若 $\dfrac{1}{2}<a<1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,\dfrac{1}{2a-1})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\dfrac{1}{2a-1},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ……………………………4 分

③若 $a=1$，则 $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$，$f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调递增. ……………………………5 分

④若 $a>1$，当 $x\in(0,\frac{1}{2a-1})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\frac{1}{2a-1},1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上：当 $a\le\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 单增区间为 $(0,1)$，$f(x)$ 单减区间为 $(1,+\infty)$；

当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，$f(x)$ 单增区间为 $(0,1)$，$(\frac{1}{2a-1},+\infty)$；$f(x)$ 单减区间为 $(1,\frac{1}{2a-1})$；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 单增区间为 $(0,+\infty)$，$f(x)$ 无单减区间；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 单增区间为 $(0,\frac{1}{2a-1})$，$(1,+\infty)$；$f(x)$ 单减区间为 $(\frac{1}{2a-1},1)$. …………6 分

（2）由（1）可知当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2a-1}$ 时取得最小值 $f(\frac{1}{2a-1})$. ……………………7 分

要证：$f(x)>\frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，等价于求证：$f(\frac{1}{2a-1})>\frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$，

即证：$1-2a\ln(\frac{1}{2a-1})-(2a-1)>\frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$.

法一：设 $g(x)=\ln x-(x-1)\ (x>1)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}<0$，$\therefore g(x)<g(1)=0$，即 $\ln x<x-1(x>1)$

$\therefore \ln(\frac{1}{2a-1})<\frac{1}{2a-1}-1=\frac{2-2a}{2a-1}$. ………… ……………………9 分

则 $1-2a\ln(\frac{1}{2a-1})-(2a-1)>1-2a\frac{2-2a}{2a-1}-(2a-1)=\frac{2(a-1)}{2a-1}$.

而 $\frac{1}{2}<a<1$，则 $\frac{2(a-1)}{2a-1}<0$，$\therefore \frac{2(a-1)}{2a-1}>\frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$，即得 $f(\frac{1}{2a-1})>\frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$，

$\therefore f(x)>\frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立. …………………… …… ……………………12 分

法二：即证：$-2a\ln(\frac{1}{2a-1})>\frac{2(a-1)a(a^2+2)}{2a-1}$，化简即证：$\ln(2a-1)>\frac{(a-1)(a^2+2)}{2a-1}$.

设 $2a-1=t(0<t<1)$，即证：$\ln t>\frac{t^3+t^2+7t-9}{8t}=\frac{1}{8}(t^2+t+7-\frac{9}{t})$. ………………9 分

构造函数 $g(t)=8\ln t-t^2-t-7+\frac{9}{t}(0<t<1)$，则 $g'(t)=\frac{8}{t}-2t-1-\frac{9}{t^2}=\frac{-2t^3-t^2+8t-9}{t^2}$，

设函数 $h(t)=-2t^3-t^2+8t-9(0<t<1)$，则 $h'(t)=-6t^2-2t+8=(-t+1)(6t+8)>0$，所以函数 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，$h(t)<h(1)<0$，则 $g'(t)<0$，所以函数 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，所以 $g(t)>g(1)=0$

即 $\ln t > \frac{1}{8}(t^2 + t + 7 - \frac{9}{t})$，原式得证. ……………………………12 分

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程]（10 分）

【解析】（1）由 $\rho = |\sin\theta| + |\cos\theta|$，可知 $\rho > 0$. ……………………………1 分

所以 $\rho^2 = |\rho\sin\theta| + |\rho\cos\theta|$，

又 $\rho^2 = x^2 + y^2, x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$，

则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$（x, y 不同时为 0）. ……………………………4 分

（2）当 $x > 0, y > 0$ 时，得曲线 C 的第一象限内的直角坐标方程：$x^2 + y^2 = x + y$，配方得

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$， ……………………………………………………5 分

则曲线 C 在第一象限内的图形由一个直角边为 1 的等腰直角三角形和一个半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的半圆组成. ……7 分

易知，曲线 C 在第一象限内的围成的图形面积为 $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$，

结合对称性可知曲线 C 围成的图形的面积为 $2 + \pi$. ……………………………………10 分

23. [选修 4-5:不等式选讲]（10 分）

【解析】（1）当 $a = 2$ 时，则 $|2x + 2| + |2x - 1| \geq 4$，当 $x < -1$ 时，不等式化为 $-4x - 1 \geq 4$，可得 $x \leq -\frac{5}{4}$；

当 $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ 时，不等式化为 $3 \geq 4$，不成立；

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时，不等式化为 $4x + 1 \geq 4$，可得 $x \geq \frac{3}{4}$. ……………………………3 分

综上可得不等式的解集为 $\{x | x \leq -\frac{5}{4}$ 或 $x \geq \frac{3}{4}\}$. ……………………………………5 分

（1）因为存在 $x_0 \in \mathbf{R}$，使得 $f(x_0) < 4 - g(x_0 + a)$ 成立，即使得 $|2x_0 + a| < 4 - |2x_0 + 2a - 1|$ 成立，

$\therefore (|2x_0 + a| + |2x_0 + 2a - 1|)_{\min} < 4$， ……………………………………7 分

由绝对值不等式可知：$|2x_0 + a| + |2x_0 + 2a - 1| \geq |2x_0 + a - 2x_0 - 2a + 1|$

$= |-a + 1|$， ……………………………………………9 分

即 $|a - 1| < 4$ 可得 a 的取值范围为 $\{a | -3 < a < 5\}$. ……………………………………10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯