# 2013年全国高中数学联合竞赛

## 第一试

**一、填空题（每小题 8 分，共 64 分）**

1. 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A,\ 2-x^2\notin A\}$．则集合 $B$ 中所有元素的和为__________．

**解：** 易知 $B\subseteq\{-2,0,-1,-3\}$．当 $x=-2,-3$ 时，$2-x^2=-2,-7$，有 $2-x^2\notin A$；而当 $x=0,-1$ 时，$2-x^2=2,1$，有 $2-x^2\in A$．因此，根据 $B$ 定义可知 $B=\{-2,-3\}$．

所以，集合 $B$ 中所有元素的和为 $-5$．

2. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $A$、$B$ 在抛物线 $y=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，$F$ 是抛物线的焦点，则 $S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=$__________．

**解** 点 $F$ 坐标为 $(1,0)$．设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1=\dfrac{y_1^2}{4}$，$x_2=\dfrac{y_2^2}{4}$，故

$$-4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2,$$

即 $\dfrac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$，故 $y_1y_2=-8$．

$$S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=\left(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|\right)\cdot\left(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2|\right)=\frac{1}{4}\cdot|OF|^2\cdot|y_1y_2|=2.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=10\sin B\sin C$，$\cos A=10\cos B\cos C$，则 $\tan A$ 的值为__________．

**解：** $\sin A-\cos A=10(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=-10\cos(B+C)=10\cos A$，

所以 $\sin A=11\cos A$，故 $\tan A=11$．

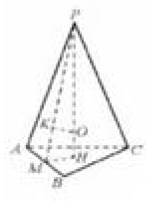
4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为__________．

**答案** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$．

**解** 如图，设球心 $O$ 在面 $ABC$ 与面 $ABP$ 内的射影分别为 $H$ 和 $K$，$AB$ 中点为 $M$，内切球半径为 $r$，则 $P$、$K$、$M$ 共线，$P$、$O$、$H$ 共线，$\angle PHM=\angle PKO=\dfrac{\pi}{2}$，且

$$OH=OK=r,\ PO=PH-OH=\sqrt{2}-r,$$

$$MH=\frac{\sqrt{3}}{6}AB=\frac{\sqrt{3}}{6},\quad PM=\sqrt{MH^2+PH^2}=\sqrt{\frac{1}{12}+2}=\frac{5\sqrt{3}}{6},$$




于是有

$$\frac{r}{\sqrt{2}-r}=\frac{OK}{PO}=\sin\angle KPO=\frac{MH}{PM}=\frac{1}{5},$$

解得 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$．

5. 设 $a,b$ 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\le 1$．则 $ab$ 的最大值为__________．

解：易知$a=f(1)-f(0),b=f(0)$，则

$$ab=f(0)\cdot\left(f(1)-f(0)\right)=-\left(f(0)-\frac{1}{2}f(1)\right)^2+\frac{1}{4}\left(f(1)\right)^2\le\frac{1}{4}\left(f(1)\right)^2\le\frac{1}{4}.$$

当$2f(0)=f(1)=\pm\frac{1}{2}$时，$ab=\frac{1}{4}$．故$ab$的最大值为$\frac{1}{4}$．

6. 从$1,2,\cdots,20$中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为

**解** 设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$取自1,2，…，20，若$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$互不相邻，则

$$1\le a_1<a_2-1<a_3-2<a_4-3<a_5-4\le16,$$

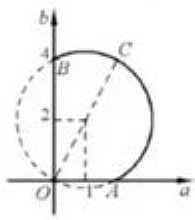
由此知从$1,2,\cdots,20$中取 5 个互不相邻的数的选法与从$1,2,\cdots,16$中取 5 个不同的数的选法相同，即$C_{16}^5$种．所以，从$1,2,\cdots,20$中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为

$$\frac{C_{20}^5-C_{16}^5}{C_{20}^5}=1-\frac{C_{16}^5}{C_{20}^5}=\frac{232}{323}.$$

7. 若实数$x,y$满足$x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则$x$的取值范围是__________．

**解** 令$\sqrt{y}=a,\ \sqrt{x-y}=b\ (a,b\ge0)$，此时$x=y+(x-y)=a^2+b^2$，且条件中等式化为$a^2+b^2-4a=2b$，从而$a,b$满足方程

$$(a-2)^2+(b-1)^2=5\ (a,b\ge0).$$




如图所示，在$aOb$平面内，点$(a,b)$的轨迹是以$(1,2)$为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆在$a,b\ge0$的部分，即点$O$与弧$\overset{\frown}{ACB}$的并集．因此$\sqrt{a^2+b^2}\in\{0\}\cup\left[2,2\sqrt{5}\right]$，从而$x=a^2+b^2\in\{0\}\cup[4,20]$．

8. 已知数列$\{a_n\}$共有 9 项，其中$a_1=a_9=1$，且对每个$i\in\{1,2,\cdots,8\}$，均有$\frac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为__________．

**解** 令$b_i=\frac{a_{i+1}}{a_i}\ (1\le i\le8)$，则对每个符合条件的数列$\{a_n\}$，有

$$\prod_{i=1}^{8}b_i=\prod_{i=1}^{8}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{a_9}{a_1}=1,\ \text{且}\ b_i\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}(1\le i\le8).\qquad ①$$

反之，由符合条件①的 8 项数列$\{b_n\}$可唯一确定一个符合题设条件的 9 项数列$\{a_n\}$．

记符合条件①的数列$\{b_n\}$的个数为$N$．显然$b_i\ (1\le i\le8)$中有偶数个$-\frac{1}{2}$，即$2k$个$-\frac{1}{2}$；继而有$2k$个 2，$8-4k$个 1．当给定$k$时，$\{b_n\}$的取法有$C_8^{2k}C_{8-2k}^{2k}$种，易见$k$的可能值只有$0,1,2$，所以

$$N=1+C_8^2C_6^2+C_8^4C_4^4=1+28\times15+70\times1=491.$$

因此，根据对应原理，符合条件的数列$\{a_n\}$的个数为 491．

## 二、解答题（3 小题，共 56 分）

9. （本题满分 16 分）给定正数数列$\{x_n\}$满足$S_n \ge 2S_{n-1}, n=2,3\cdots$，这里

$S_n = x_1 + \cdots + x_n$．证明：存在常数$C>0$，使得

$$x_n \ge C\cdot 2^n, n=1,2,\cdots.$$

**解** 当$n\ge 2$时，$S_n \ge 2S_{n-1}$等价于

$$x_n \ge x_1 + \cdots + x_{n-1}. \qquad ①$$

……………………4 分

对常数$C=\frac{1}{4}x_1$，用数学归纳法证明：

$$x_n \ge C\cdot 2^n,\ n=1,2,\cdots. \qquad ②$$

……………………8 分

$n=1$时结论显然成立．又$x_2 \ge x_1 = C\cdot 2^2$．

对$n\ge 3$，假设$x_k \ge C\cdot 2^k$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则由①式知

$$\begin{aligned} x_n &\ge x_1 + \left(x_2 + \cdots + x_{n-1}\right) \\ &\ge x_1 + \left(C\cdot 2^2 + \cdots + C\cdot 2^{n-1}\right) \\ &= C\left(2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}\right) = C\cdot 2^n, \end{aligned}$$

所以，由数学归纳法知，②式成立．

……………………16 分

10. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系$xOy$中，椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

$A_1, A_2$分别为椭圆的左、右顶点，$F_1, F_2$分别为椭圆的左、右焦点，$P$为椭圆上不

同于$A_1$和$A_2$的任意一点．若平面中两个点$Q$、$R$满足$QA_1 \perp PA_1$，$QA_2 \perp PA_2$，

$RF_1 \perp PF_1$，$RF_2 \perp PF_2$，试确定线段$QR$的长度与$b$的大小关系，并给出证明．

**解** 令$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则$A_1(-a,\ 0), A_2(a,\ 0), F_1(-c,\ 0), F_2(c,\ 0)$．

设$P(x_0,\ y_0), Q(x_1,\ y_1), R(x_2,\ y_2)$，其中$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\ y_0 \ne 0$．

由$QA_1 \perp PA_1, QA_2 \perp PA_2$可知

$$\overrightarrow{A_1Q}\cdot\overrightarrow{A_1P}=(x_1+a)(x_0+a)+y_1y_0=0\,, \qquad ①$$

$$\overrightarrow{A_2Q}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(x_1-a)(x_0-a)+y_1y_0=0\,. \qquad ②$$

……………………5 分

将①、②相减，得 $2a(x_1+x_0)=0$，即 $x_1=-x_0$，将其代入①，得 $-x_0^2+a^2+y_1y_0=0$，故 $y_1=\dfrac{x_0^2-a^2}{y_0}$，于是 $Q\left(-x_0,\ \dfrac{x_0^2-a^2}{y_0}\right)$. ……………………10 分

根据 $RF_1\perp PF_1$、$RF_2\perp PF_2$，同理可得 $R\left(-x_0,\ \dfrac{x_0^2-c^2}{y_0}\right)$. ……………………15 分

因此

$$|QR|=\left|\frac{x_0^2-a^2}{y_0}-\frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right|=\frac{b^2}{|y_0|},$$

由于 $|y_0|\in(0,b]$，故 $|QR|\geq b$（其中等号成立的充分必要条件是 $|y_0|=b$，即点 $P$ 为 $(0,\pm b)$）. ……………………20 分

11. （本题满分 20 分）求所有的正实数对 $(a,b)$，使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足：对任意实数 $x,y$，有

$$f(xy)+f(x+y)\geq f(x)f(y)\,.$$

**解** 已知条件可转化为：对任意实数 $x$, $y$，有

$$(ax^2y^2+b)+(a(x+y)^2+b)\geq(ax^2+b)(ay^2+b)\,. \qquad ①$$

先寻找 $a$, $b$ 所满足的必要条件.

在①式中令 $y=0$，得 $b+(ax^2+b)\geq(ax^2+b)\cdot b$，即对任意实数 $x$，有

$$(1-b)ax^2+b\,(2-b)\geq 0\,.$$

由于 $a>0$，故 $ax^2$ 可取到任意大的正值，因此必有 $1-b\geq 0$，即 $0<b\leq 1$.

……………………5 分

在①式中再令 $y=-x$，得 $(ax^4+b)+b\geq(ax^2+b)^2$，即对任意实数 $x$，有

$$(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2)\geq 0\,. \qquad ②$$

将②的左边记为 $g(x)$．显然 $a-a^2\neq 0$（否则，由 $a>0$ 可知 $a=1$，此时 $g(x)=-2bx^2+(2b-b^2)$，其中 $b>0$，故 $g(x)$ 可取到负值，矛盾），于是

$$g(x)=(a-a^2)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2-\frac{(ab)^2}{a-a^2}+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$$

对一切实数 $x$ 成立，从而必有 $a-a^2>0$，即 $0<a<1$．　……………………10 分

进一步，考虑到此时 $\frac{b}{1-a}>0$，再根据 $g\left(\sqrt{\frac{b}{1-a}}\right)=\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，可得 $2a+b\leq 2$．

至此，求得 $a, b$ 满足的必要条件如下：

$$0<b\leq 1,\ 0<a<1,\ 2a+b\leq 2. \qquad ③$$

……………………15 分

下面证明，对满足③的任意实数对 $(a,b)$ 以及任意实数 $x, y$，总有①成立，即

$$h(x,y)=(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+(2b-b^2)$$

对任意 $x,y$ 取非负值．

事实上，在③成立时，有 $a(1-b)\geq 0,\ a-a^2>0$，$\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，再结合 $x^2+y^2\geq -2xy$，可得

$$h(x,y)\geq (a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)x^2y^2+2abxy+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0.$$

综上所述，所求的正实数对 $(a,b)$ 全体为 $\{(a,b)\mid 0<b\leq 1,\ 0<a<1,\ 2a+b\leq 2\}$．

……………………20 分