2019 北京房山高二（下）期末

数　学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回，试卷自行保存。

第一部分　（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）抛物线$x^2=8y$的焦点坐标为

A. （0，2）　　B. （2，0）　　C. （0，4）　　D. （4，0）

（2）复数$\frac{2}{1-i}$的共轭复数是

A. $-1+i$　　B. $-1-i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

（3）已知双曲线$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{2}=1$的离心率为$\sqrt{2}$，则 m=

A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

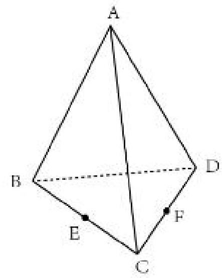
（4）如图，在空间四边形 ABCD 中，设 E，F 分别是 BC，CD 的中点，则$\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})$等于

A. $\overrightarrow{AD}$

B. $\overrightarrow{FA}$

C. $\overrightarrow{AF}$

D. $\overrightarrow{EF}$



（5）若$\vec{d}=(4,2,3)$是直线 l 的方向向量，$\vec{n}=(-1,3,0)$是平面 α 的法向量，则直线 l 与平面 α 的位置关系是

A. 垂直　　B. 平行

C. 直线 l 在平面 α 内　　D. 相交但不垂直

（6）“m≠0”是“方程$x^2-y^2=m$表示的曲线为双曲线”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

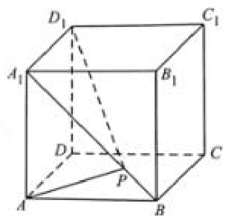
（7）如图，棱长为 1 的正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，P 为线段A_1B上的动点，则下列结论错误的是

A. 平面$D_1A_1P\perp$平面A_1AP

B. $\angle APD_1$的取值范围是$(0,\frac{\pi}{2}]$

C. 三棱锥B_1-D_1PC的体积为定值

D. $DC_1\perp D_1P$



（8）设 F 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的右焦点，椭圆上至少有 21 个不同的点$P_i$（i=1, 2, 3, ···）

$|P_1F|$，$|P_2F|$，$|P_3F|$，···组成公差为 d（d>0）的等差数列，则 d 的最大值为

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{10}$

第二部分　（非选择题　共 110 分）

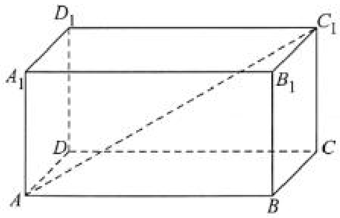
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知 a, b∈R, i 是虚数单位，（a+bi）i=2+3i，则 a=________, b=________

（10）在空间直角坐标系中，已知点 M（1，0，1），N（-1，1，2），则线段 MN 的长度为________

（11）若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$，则满足条件的一个双曲线的方程为________

（12）如图，在长方形 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，设 AD=AA_1=1，AB=2，则$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}$等于________



（13）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的离心率为 e，$F_1$，$F_2$分别为椭圆的两个焦点，若椭圆上存在点 P 使得∠$F_1PF_2$是钝角，则满足条件的一个 e 的值为________

（14）已知曲线 W 的方程为$|y|+x^2-5x=0$

①请写出曲线 W 的一条对称轴方程________

②曲线 W 上的点的横坐标的取值范围是________

三、解答题共 6 题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 15 分）

已知复数$z_1=a+2i, z_2=3-4i$（a∈R, i 为虚数单位）

（I）若$z_1\cdot z_2$是纯虚数，求实数 a 的值；

（II）若复数$\frac{z_1}{z_2}$在复平面上对应的点在第二象限，求实数 a 的取值范围

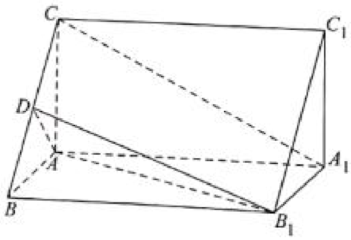
（16）（本小题 15 分）

如图，三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$中，CC_1⊥平面 ABC，AC⊥AB，AB=AC=2，CC_1=4，D 为 BC 的中点

（I）求证：AC⊥平面 ABB_1A_1；

（II）求证：A_1C∥平面 ADB_1；

（III）求平面 ADB_1与平面 ACC_1A_1所成锐二面角的余弦值



（17）（本小题 13 分）

已知抛物线 C：$y^2=2Px$（P>0）的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，F 为抛物线的焦点

（I）求抛物线 C 的方程；

（II）若 P 是抛物线 C 上一点，点 A 的坐标为（$\frac{7}{2}$，2），求$|PA|+|PF|$的最小值；

（III）若过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线 C 交于 M，N 两点，求线段 MN 的中点坐标。

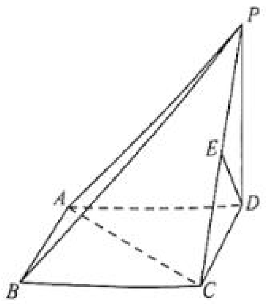
（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 为正方形，平面 PAD⊥底面 ABCD，PD⊥AD，PD=AD，E 为棱 PC 的中点

（I）证明：平面 PBC⊥平面 PCD；

（II）求直线 DE 与平面 PAC 所成角的正弦值；

（III）若 F 为 AD 的中点，在棱 PB 上是否存在点 M，使得 FM⊥BD？若存在，求$\frac{PM}{MB}$的值，若不存在，说明理由。



（19）（本小题 13 分）

已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>c）的一个顶点坐标为（0，1），焦距为 $2\sqrt{2}$. 若直线 y=x+m 与椭圆 M 有两个不同的交点 A，B

（I）求椭圆 M 的方程；

（II）将|AB|表示为 m 的函数，并求△OAB 面积的最大值（O 为坐标原点）

（20）（本小题 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 与两定点 A（-2，0），B（2，0）连线的斜率之积为$-\frac{1}{2}$，记点 P 的轨迹为曲线 C

（I）求曲线 C 的方程；

（II）若过点（$-\sqrt{2}$，0）的直线 l 与曲线 C 交于 M，N 两点，曲线 C 上是否存在点 E 使得四边形 OMEN 为平行四边形？若存在，求直线 l 的方程，若不存在，说明理由

2019 北京房山高二（下）期末数学参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	D	C	B	B

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分，有两空的第一空 3 分，第二空 2 分）

（9）3；-2

（10）$\sqrt{6}$

（11）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$（答案不唯一）

（12）1

（13）$\frac{\sqrt{3}}{2}$（答案不唯一，$\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$）

（14）y=0（或 $x=\frac{5}{2}$）；[0,5]

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（本小题 15 分）

解：

（I）由复数$z_1=a+2i, z_2=3-4i$得$z_1\cdot z_2=(a+2i)(3-4i)$=3a+8+（6-4a）i・・・・・・・・・4 分

若$z_1\cdot z_2$是纯虚数，则 3a+8=0，（6-4a）≠0，解得 $a=-\frac{8}{3}$・・・・・・3 分

（II）$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+2i}{3-4i}=\frac{(a+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3a-8}{25}+\frac{6+4a}{25}i$・・・・・・・・・・・4 分

若$\frac{z_1}{z_2}$在复平面上对应的点在第二象限，则有$\begin{cases}3a-8<0\\6+4a>0\end{cases}$・・・・・・・・・・・・・2 分

解得$-\frac{3}{2}<a<\frac{8}{3}$・・・・・・・・・・・・・2 分

（16）（本小题 15 分）

解：

（I）∵$CC_1\perp$平面 ABC，$AA_1\parallel CC_1$

∴$AA_1\perp$平面 ABC，・・・・・・・・・1 分

∴$AA_1\perp AC$・・・・・・・・・1 分

又 $AC\perp AB$，$AB\cap AA_1=A$・・・・・・・・・1 分

∴$AC\perp$平面 ABB_1A_1・・・・・・・・・1 分

（最后 1 分式在 $AA_1\perp AC$ 和 $AC\perp AB$ 都有的前提下才给）

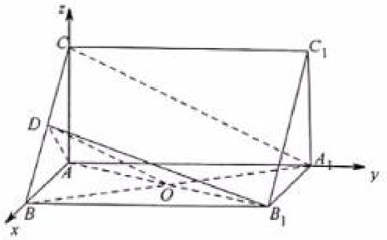
（II）连接A_1B，与 AB_1相交于点 O，连接 DO

∵D 是 BC 中点，O 是A_1B中点，・・・・・・・・・1 分

则 $DO\parallel A_1C$，・・・・・・・・・1 分

$A_1C\not\subset$平面 ADB_1，$DO\subset$平面 ADB_1・・・・・・・・・1 分

∴A_1C∥平面 ADB_1



（III）由（I）知，$AC\perp$平面 ABB_1A_1，$AA_1\perp AB$

如图建立空间直角坐标系 A-xyz·········1 分

则 A（0，0，0），B（2，0，0），B_1（2，4，0），D（1，0，1），$\overrightarrow{AD}$=（1，0，1），$\overrightarrow{AB_1}$=（2，4，0）

设平面 ADB_1 的法向量为$\vec{n}$=（x, y, z），则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}\end{cases}$，即$\begin{cases}x+z=0\\ 2x+4y=0\end{cases}$·········2 分

取 y=1，得$\vec{n}$=（−2，1，2）·········1 分

平面 ACC_1A_1 的法向量为$\overrightarrow{AB}$=（2，0，0）·········1 分

$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AB}|}=-\frac{2}{3}$·········1 分

则平面 ADB_1 与平面 ACC_1A_1 所成锐二面角的余弦值为$\frac{2}{3}$·········1 分

（求角公式 1 分，结果 1 分）

（17）（本小题 13 分）

解：

（I）∵准线方程 $x=-\frac{1}{2}$，得 P=1，·········2 分

∴抛物线 C 的方程为$y^2=2x$·········1 分

（II）过点 P 作准线的垂线，垂直为 B，则|PB|=|PF|·········2 分

要使|PA|+|PF|的最小，则 P，A，B 三点共线·········1 分

此时$|PA|+|PF|=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$·········2 分

（III）直线 MN 的方程为 $y=x-\frac{1}{2}$·········1 分

设 M（x_1,y_1），N（x_2,y_2），把 $y=x-\frac{1}{2}$代入抛物线方程$y^2=2x$，得$x^2-3x+\frac{1}{4}=0$

∵$\triangle=9-4\times1\times\frac{1}{4}=8>0$

∴$x_1+x_2=3$，$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}$

线段 MN 中点的横坐标为$\frac{3}{2}$，纵坐标为$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

线段 MN 中点的坐标为（$\frac{3}{2}$，1）

（18）（本小题 14 分）

解：

（I）∵平面 PAD⊥底面 ABCD，又 PD⊥AD，

∴PD⊥底面 ABCD

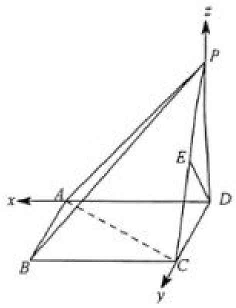
∴PD⊥BC

又∵底面 ABCD 为正方形，BC⊥CD

∴BC⊥平面 PCD

∴平面 PBC⊥平面 PCD，

（II）由（I）知，PD⊥底面 ABCD，AD⊥CD



如图以点 D 为原点建立空间直角坐标系

不妨设 PD=AD=2，可得 D（0，0，0），A（2，0，0，），C（0，2，0），P（0，0，2），

由 E 为棱 PC 的中点，得 E（0，1，1），$\overrightarrow{DE}=$（0，1，1）

向量$\overrightarrow{AC}$=（-2，2，0），$\overrightarrow{PA}$=（2，0，-2），设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面 PAC 的法向量，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x+2y=0\\ 2x-2z=0\end{cases}$

不妨令 x=1，可得$\vec{n}$=（1，1，1）为平面 PAC 的一个法向量

设直线 DE 与平面 PAC 所成角为 θ

所以 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{DE},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

（求角公式 1 分，结果 1 分）

（III）向量$\overrightarrow{BP}$=（-2，-2，2），$\overrightarrow{DB}$=（2，2，0），$\overrightarrow{FB}$=（1，2，0）

由点 M 在棱 PB 上，设$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BP}$（0≤λ≤1）

故$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}$=（1-2λ，2-2λ，2λ）

由 FM⊥DB，得$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{DB}$=0

因此（1-2λ）×2+（2-2λ）×2=0

解得 $\lambda=\frac{3}{4}$，所以$\frac{PM}{MB}=\frac{1}{3}$

（19）（本小题 13 分）

解：

（I）由题意可知：$c=\sqrt{2}, b=1$

由$a^2=b^2+c^2$得：$a=\sqrt{3}$

所以椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$

（II）设点 A 坐标为（x_1，y_1）、点 B 坐标为（x_2，y_2）

联立直线与椭圆的方程$\begin{cases} y=x+m \\ x^2+3y^2=3 \end{cases}$，消去 y

整理得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$

由直线与椭圆相交可得：$\triangle=36m^2-16(3m^2-3)>0$，即$m^2<4$

解得：$-2<m<2$

$x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{4}$

$$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\sqrt{(-\frac{3m}{2})^2-(3m^2-3)}=\sqrt{-\frac{3}{2}m^2+6}$$

点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$

所以

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{2}m^2+6}\,\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4m^2-m^4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-(m^2-2)^2}\ (-2<m<2)$$

当$m^2=2$，即 $m=\pm\sqrt{2}$时，$\triangle OAB$ 面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（20）（本小题 10 分）

解：

（1）设 P（x, y），有$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{2}$

得$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$

整理得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$（$x\neq\pm2$）

∴曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$（$x\neq\pm2$）

（II）假设存在符合条件的点 E（x_0，y_0）由题意知直线 l 的斜率不为零

设直线 l 的方程为 $x=my-\sqrt{2}$

点 M 坐标为（x_1，y_1）、点 N 坐标为（（x_2，y_2））

由$\begin{cases} x=my-\sqrt{2} \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$得：$(m^2+2)y^2-2\sqrt{2}my-2=0$，$\triangle>0$

$\therefore y_1+y_2=\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}$

则$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2\sqrt{2}=-\frac{4\sqrt{2}}{m^2+2}$

由四边形 OMEN 为平行四边形，得到$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$

$\therefore E\left(-\frac{4\sqrt{2}}{m^2+2},\ \frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}\right)$

把点 E 坐标代入曲线 C 的方程得：$m^4-4=0$，解得$m^2=2$

$\therefore$直线 l 的方程为 $x\pm\sqrt{2}y-\sqrt{2}$

说明：每道解答题基本提供一种解题方法，如有其他解法请仿此标准给分。