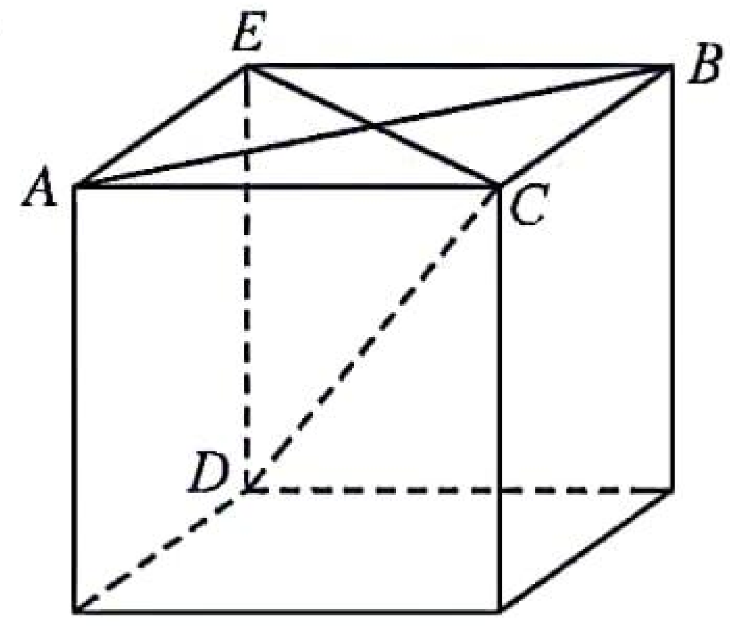
高三数学参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $z^2+1=0$,所以 $z=\pm\mathrm{i}$,所以 $|z+1|=|1\pm\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(\pm1)^2}=\sqrt{2}$. 故选 C.

2. B　由 $x^2-3x-4\geqslant0$,得 $x\leqslant-1$,或 $x\geqslant4$,所以 $A=\{x|x\leqslant-1$,或 $x\geqslant4\}$. 所以 $\complement_{\mathrm{R}}A=(-1,4)$,由 $(x-2)(5-x)>0$,得 $2<x<5$,所以 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=(2,4)$. 故选 B.

3. D　将表面展开图还原为正方体,AB 与 CD 在正方体中的位置如图所示,易证 $AB\perp$ 平面 DCE,所以 $AB\perp CD$,故直线 AB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{2}$. 故选 D.



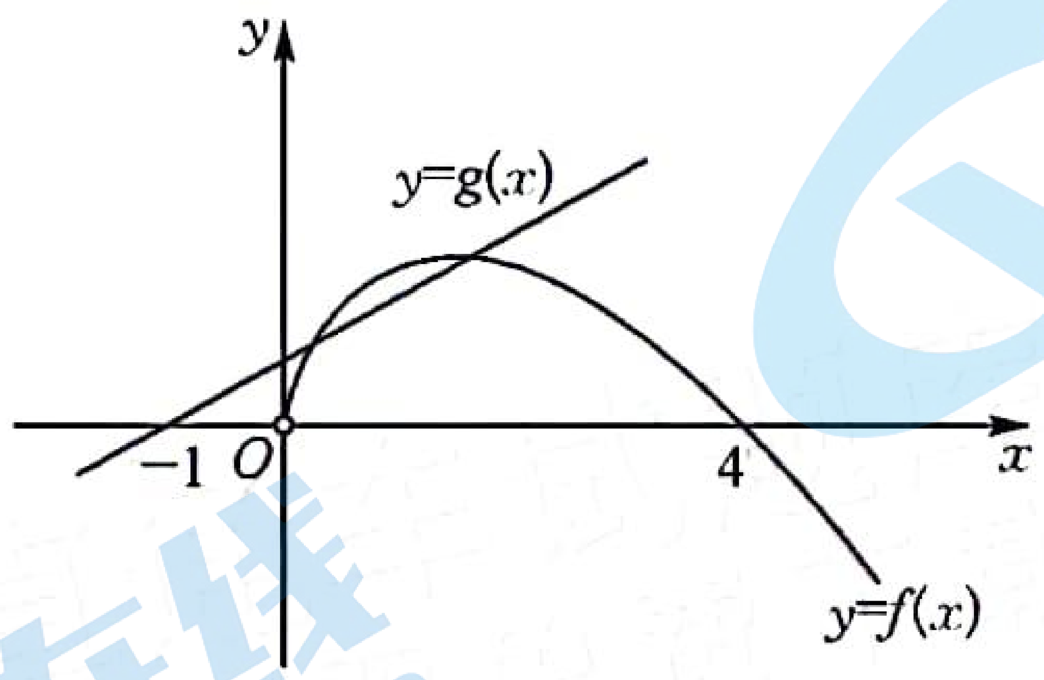
4. C　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $\log_2 3\times\log_3 8+m\sin\frac{4\pi}{3}=0$,所以 $\log_2 8-\frac{\sqrt{3}}{2}m=0$,所以 $m=2\sqrt{3}$. 故选 C.

5. A　由题意得 $\bar{x}=3.5$,$\bar{y}=\frac{7\,929}{6}=1\,321.5$,所以 $\hat{a}=\bar{y}+156.66\times3.5=1\,321.5+548.31=1\,869.81$,所以 $\hat{y}=-156.66x+1\,869.81$,当 $x=7$ 时,$\hat{y}=-156.66\times7+1\,869.81=773.19\approx773.2$. 故选 A.

6. C　因为每次只取一球,故 A_1,A_2 是互斥的事件,故 A 正确;由题意得 $P(A_1)=\frac{1}{3}$,$P(A_2)=\frac{2}{3}$,$P(B|A_1)=\frac{5}{7}$,$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{13}{21}$,故 B,D 均正确;因为 $P(A_2B)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$,故 C 错误. 故选 C.

7. B　设 $|EF_1|=m$,$|EF_2|=n$,$|F_1F_2|=2c$,由题意知 $m-n=2a$,$F_2E\perp EP$,$\frac{c}{a}=\sqrt{5}$,所以 $m^2+n^2-2mn=4a^2$,$c=\sqrt{5}a$,$m^2+n^2=4c^2$,所以 $mn=2c^2-2a^2=8a^2$,又 $m-n=2a$,所以 $n^2+2an-8a^2=0$,解得 $n=2a$,所以 $\sin\angle F_2F_1E=\frac{|EF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{2a}{2\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

8. A　原不等式等价于 $k(x+1)<x\ln4-x\ln x$,设 $g(x)=k(x+1)$,$f(x)=x\ln4-x\ln x$,则 $f'(x)=\ln4-(1+\ln x)=\ln\frac{4}{x}-1$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{4}{\mathrm{e}}$. 当 $0<x<\frac{4}{\mathrm{e}}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x>\frac{4}{\mathrm{e}}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减. 又 $f(4)=0$,$x\to0$ 时,$f(x)\to0$,因此 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象如图,



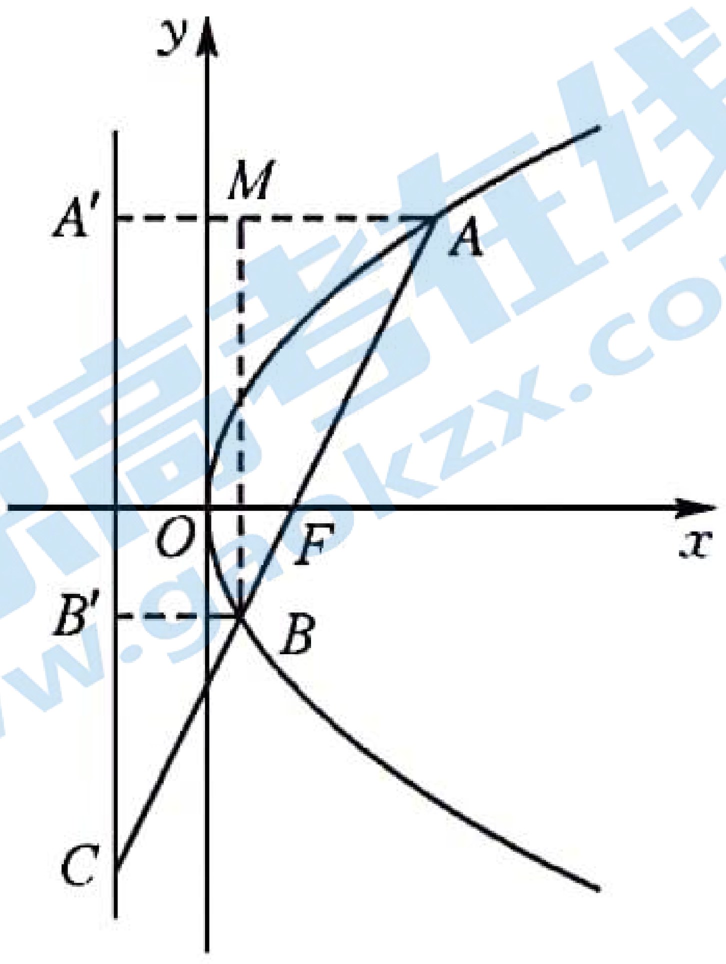
当 $k\leqslant0$ 时,显然不满足题意;当 $k>0$ 时,当且仅当 $\begin{cases}g(1)<f(1),\\g(2)<f(2),\\g(3)\geqslant f(3),\end{cases}$ 或 $\begin{cases}g(1)\geqslant f(1),\\g(2)<f(2),\\g(3)<f(3).\end{cases}$

由第一个不等式组,得 $\begin{cases}2k<\ln4,\\3k<2\ln4-2\ln2,\\4k\geqslant3\ln4-3\ln3,\end{cases}$ 即 $\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln2$,

由第二个不等式组,得 $\begin{cases}2k\geqslant\ln4,\\3k<2\ln4-2\ln2,\\4k<3\ln4-3\ln3.\end{cases}$ 该不等式组无解.

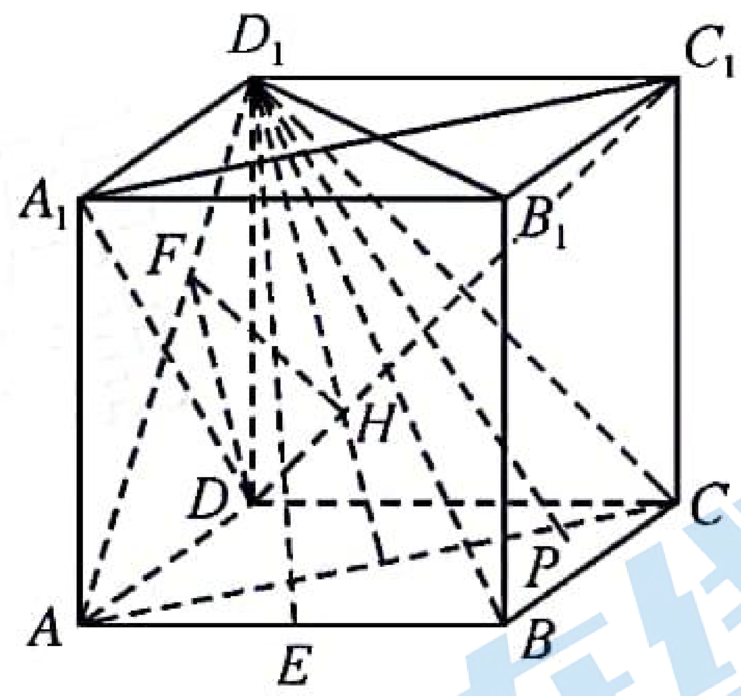
综上所述，$\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln 2$. 故选 A.

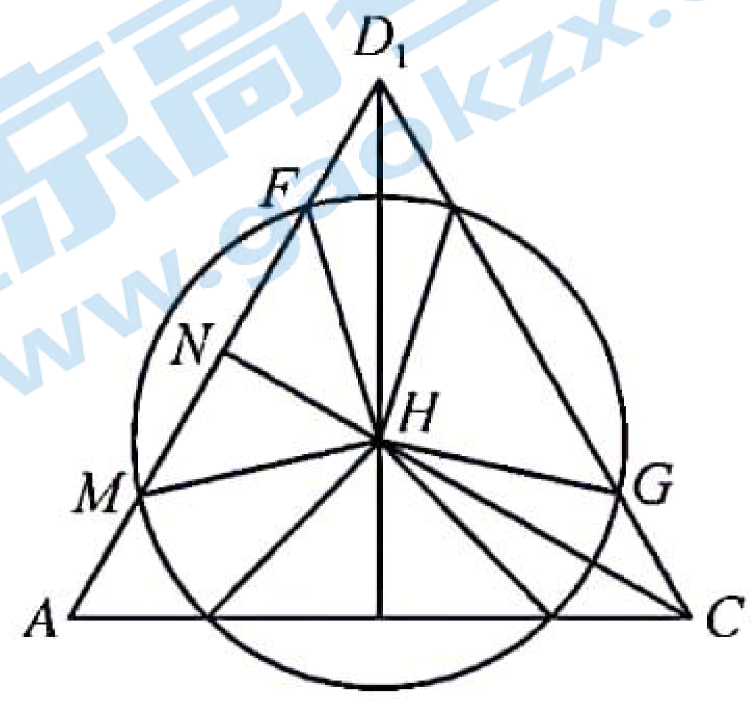
9. BC　当 l 的倾斜角为锐角时，如图所示，由抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，分别过 A,B 作准线的垂线，垂足为 A',B'，直线 l 交准线于 C，作 $BM\perp AA'$，垂足为 M，则 $|AA'|=|AF|$，$|BB'|=|BF|$，$|FA|=3|FB|$，所以 $|AM|=2|BF|$，$|AB|=4|BF|=2|AM|$，所以 $\angle ABM=30°$，则 l 的倾斜角 $\angle AFx=60°$，同理可得当直线 l 的倾斜角为钝角时，其大小为 $120°$. 故选 BC.

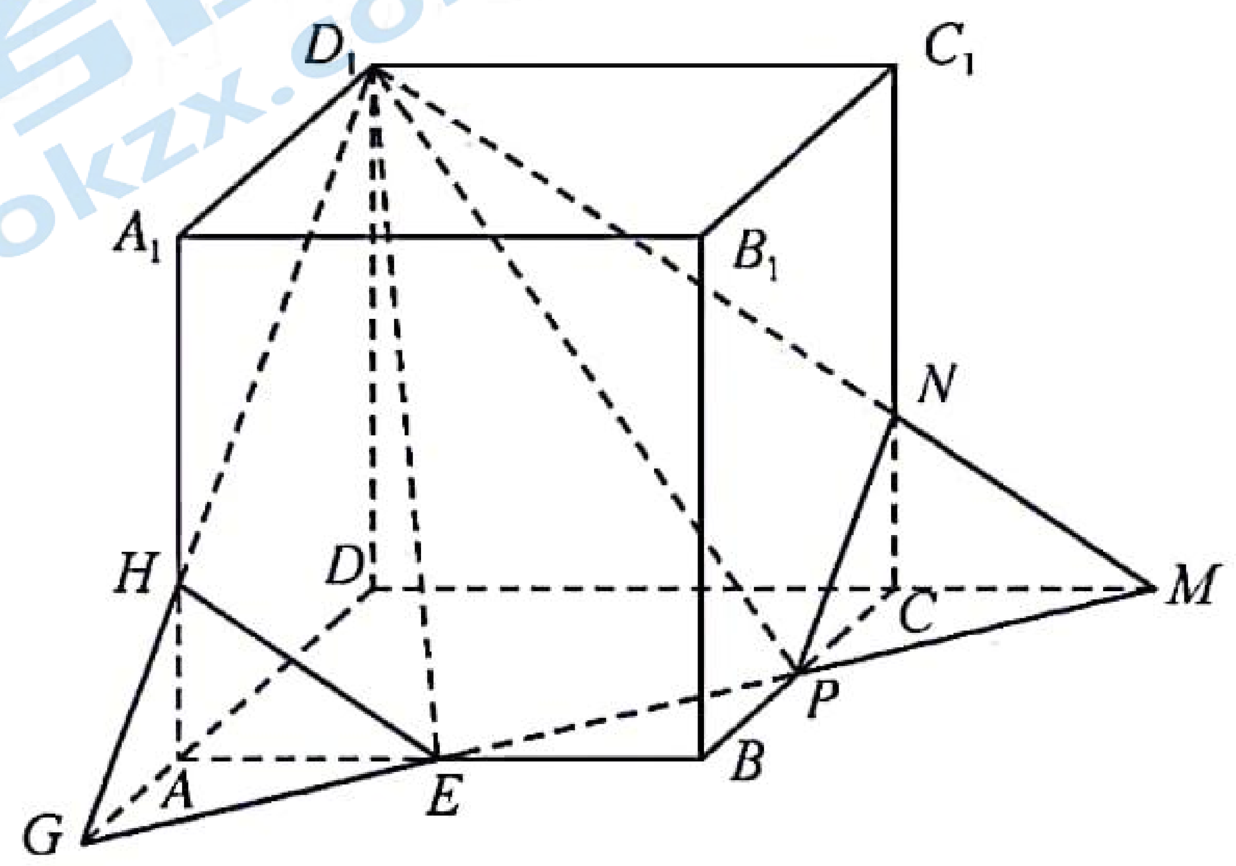


10. BC　由题意得 $a=2$，$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\omega=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+4\varphi\right)$，$f'(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+4\varphi\right)$. 由 $f(0)=1$，$f'(0)>0$，得 $2\sin 4\varphi=1$，$\cos 4\varphi>0$，所以 $4\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}$. 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{3}$，只可能 $k=0$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{24}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 错误，B 正确；因为 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，故 C 正确；令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=-2$，得 $-\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant-\frac{7\pi}{6}$，又 $\left[-\frac{5\pi}{3},-\pi\right]$ 包含 $\left[-\frac{5\pi}{3},-\frac{7\pi}{6}\right]$ 但不是其子集，故 D 错误. 故选 BC.

11. ABC　由正方体的性质，易证 $D_1B\perp$ 平面 A_1C_1D，若点 P 不与 B 重合，因为 $D_1P\perp$ 平面 A_1C_1D，则 $D_1P/\!/D_1B$，与 $D_1P\cap D_1B=D_1$ 矛盾，故当 $D_1P\perp$ 平面 A_1C_1D 时，点 P 与 B 重合，故 A 正确；由题意知三棱锥 $D-ACD_1$ 为正三棱锥，故顶点 D 在底面 ACD_1 的射影为 $\triangle ACD_1$ 的中心 H，连接 DH，由 $V_{D\text{-}ACD_1}=V_{D_1\text{-}ACD}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}DH$，所以 $DH=\frac{2}{\sqrt{3}}$，因为球的半径为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以截面圆的半径 $r=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，所以球面与截面 ACD_1 的交线是以 H 为圆心，$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 为半径的圆在 $\triangle ACD_1$ 内部部分，如图所示，$HN=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $MF=2\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. $HF^2+HM^2=MF^2$，所以 $\angle MHF=\frac{\pi}{2}$，同理，其余两弦所对圆心角也等于 $\frac{\pi}{2}$，所以球面与截面 ACD_1 的交线的长度为 $2\pi\times\frac{2}{\sqrt{3}}-3\times\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$，故 B 正确；对于 C，过 E,P 的直线分别交 DA、DC 的延长线于点 G,M，连接 D_1M、D_1G，分别交侧棱 C_1C 于点 N，交侧棱 A_1A 于点 H，连接 EH 和 NP，如图所示：





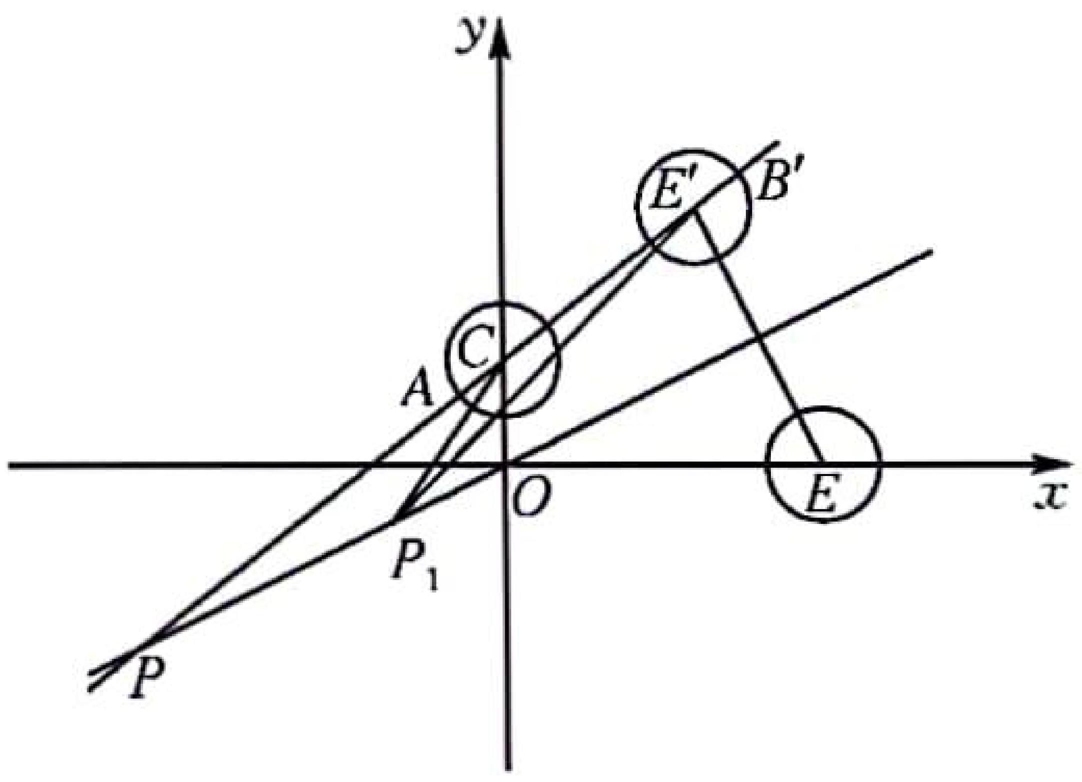


则截面为五边形 D_1HEPN，易求 $D_1G=D_1M=\sqrt{13}$，$GM=3\sqrt{2}$，$GE=\sqrt{2}$，$GH=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$\cos\angle D_1GM=\frac{\frac{1}{2}GM}{D_1G}=\frac{3}{\sqrt{26}}$，故 $\sin\angle D_1GM=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$，所以 $S_{\triangle D_1GM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$，$S_{\triangle GEH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{17}}{6}$，所以五边形 D_1HEPN 的面积 $S=S_{\triangle D_1GM}-2S_{\triangle GEH}=\frac{3\sqrt{17}}{2}-2\times\frac{\sqrt{17}}{6}=\frac{7\sqrt{17}}{6}$，故 C 正确；因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $PB_1\perp A_1B_1$. 因为平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 CDD_1C_1，故点 P 到平面 CDD_1C_1 的距离为点 P 到 CC_1 的距离，由题意知点 P 到点 B_1 的距离等于点 P 到 CC_1 的距离，故点 P 的轨迹是以 B_1 为焦点，以 CC_1 为准线的抛物线在侧面 BCC_1B_1 内的部分，故 D 错误. 故选 ABC.

12. -672 $T_{r+1}=C_9^r(\sqrt{x})^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^rC_9^rx^{\frac{9-3r}{2}}$，令 $\frac{9-3r}{2}=0$，解得 $r=3$，故常数项为 $(-2)^3C_9^3=-672$.

13. $\frac{\sqrt{130}}{5}+1$ 设 $E(3,0)$ 关于直线 $y=\frac{1}{2}x$ 的对称点为 $E'(m,n)$，则

$$\begin{cases}\frac{n}{m-3}\cdot\frac{1}{2}=-1,\\ \frac{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m+3}{2},\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}m=\frac{9}{5},\\ n=\frac{12}{5},\end{cases}$$ 故 $E'\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$. 要使 $|PB|-|PA|$ 的值最大，则 P,A,B'（其中 B' 为 B 关于直线 $y=\frac{1}{2}x$ 的对称点）三点共线，且该直线过 C,E' 两点，如图，其最大值为 $|AB'|=|CE'|+1=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}-1\right)^2}+1=\frac{\sqrt{130}}{5}+1$.



14. $a_n=\frac{3^n+1}{2}$ 因为 $a_n=\log_3(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_{2^n-1}\times3)$，所以 $a_{n+1}=\log_3[1\cdot(1\cdot x_1)x_1(x_1x_2)x_2\cdot\cdots\cdot x_{2^n-1}(x_{2^n-1}\cdot3)\cdot3]$ $=\log_3(1^2\cdot x_1^3x_2^3\cdots x_{2^n-2}^3x_{2^n-1}^3\cdot3^2)=3a_n-1$，所以 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$，又 $a_1=\log_3(1\times3\times3)=2$，所以 $a_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $a_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$，所以 $a_n=\frac{3^n+1}{2}$.

15. 解：(1)因为 X 服从正态分布 $N(60,144)$，所以 $\mu=60$，$\sigma=12$，$72=\mu+\sigma$，………………………… 1 分

所以 $P(X\geqslant72)\approx\frac{1-0.683}{2}=0.158\ 5$. ………………………………………………… 4 分

进入面试的人数 $Z\sim B(100,0.158\ 5)$，$E(Z)=100\times0.1585\approx16$.

因此，进入面试的人数大约为 16. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由题意可知，Y 的可能取值为 0,2,4,6,8,10，………………………………………………… 6 分

则 $P(Y=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{1}{75}$；$P(Y=2)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$；

$P(Y=4)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_2^1\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{75}$； ………………………………………… 9 分

$P(Y=6)=\frac{2}{3}\times C_2^1\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{75}$；

$P(Y=8)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{75}$；$P(Y=10)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{75}$. ……………………………… 12 分

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{75}+2\times\frac{2}{75}+4\times\frac{8}{75}+6\times\frac{16}{75}+8\times\frac{16}{75}+10\times\frac{32}{75}=\frac{580}{75}=\frac{116}{15}$. ……………………… 13 分

16. 解：(1)在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\alpha=20-16\cos\alpha$， ………………… 2 分

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理，得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\beta=8-8\cos\beta$，………………

所以 $20-16\cos\alpha=8-8\cos\beta$，所以 $8(2\cos\alpha-\cos\beta)=12$， …………………………………………………… 5 分

即 $2\cos\alpha-\cos\beta=\frac{3}{2}$. …………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由题意知 $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=4\sin\alpha$，$S_2=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=2\sin\beta$， ………………………… 8 分

所以 $S_1^2+S_2^2=16\sin^2\alpha+4\sin^2\beta=16(1-\cos^2\alpha)+4(1-\cos^2\beta)$

$=20-16\cos^2\alpha-4\cos^2\beta$， …………………………………………………………………………… 10 分

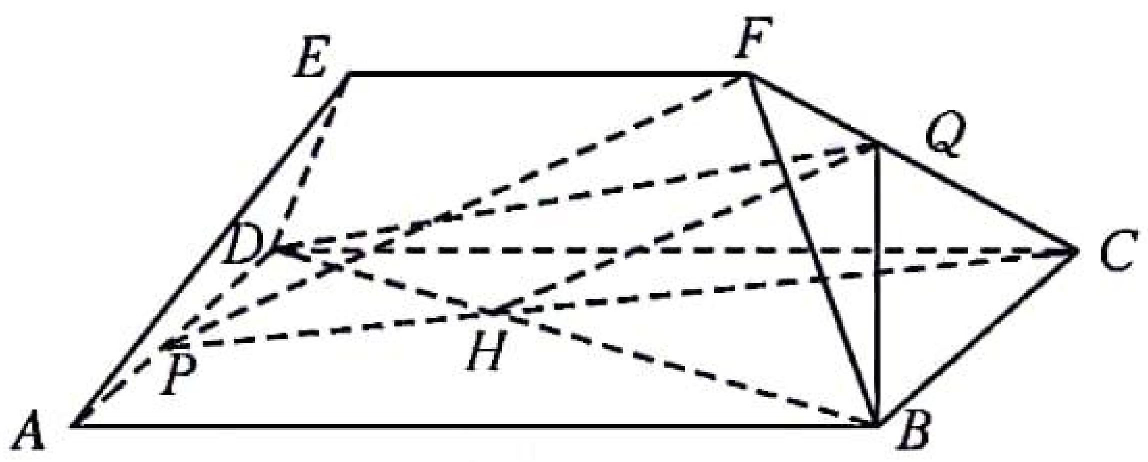
由(1)知 $2\cos\alpha-\cos\beta=\frac{3}{2}$，所以 $\cos\beta=2\cos\alpha-\frac{3}{2}$，$\cos\alpha\in\left(\frac{1}{4},1\right)$， …………………………………… 12 分

所以 $S_1^2+S_2^2=20-16\cos^2\alpha-4\left(2\cos\alpha-\frac{3}{2}\right)^2=-32\cos^2\alpha+24\cos\alpha+11$

$=-32\left(\cos\alpha-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{31}{2}$， ……………………………………………………………………… 14 分

所以当 $\cos\alpha=\frac{3}{8}\in\left(\frac{1}{4},1\right)$时，$S_1^2+S_2^2$ 取得最大值，最大值为$\frac{31}{2}$. …………………………………………… 15 分

17. (1)证明：连接 CP 交 BD 于点 H，连接 HQ，



因为 $AD/\!/BC$，且 $PD=\frac{2}{3}AD$，所以$\frac{PH}{HC}=\frac{PD}{BC}=\frac{PD}{AD}=\frac{2}{3}$， …………… 2 分

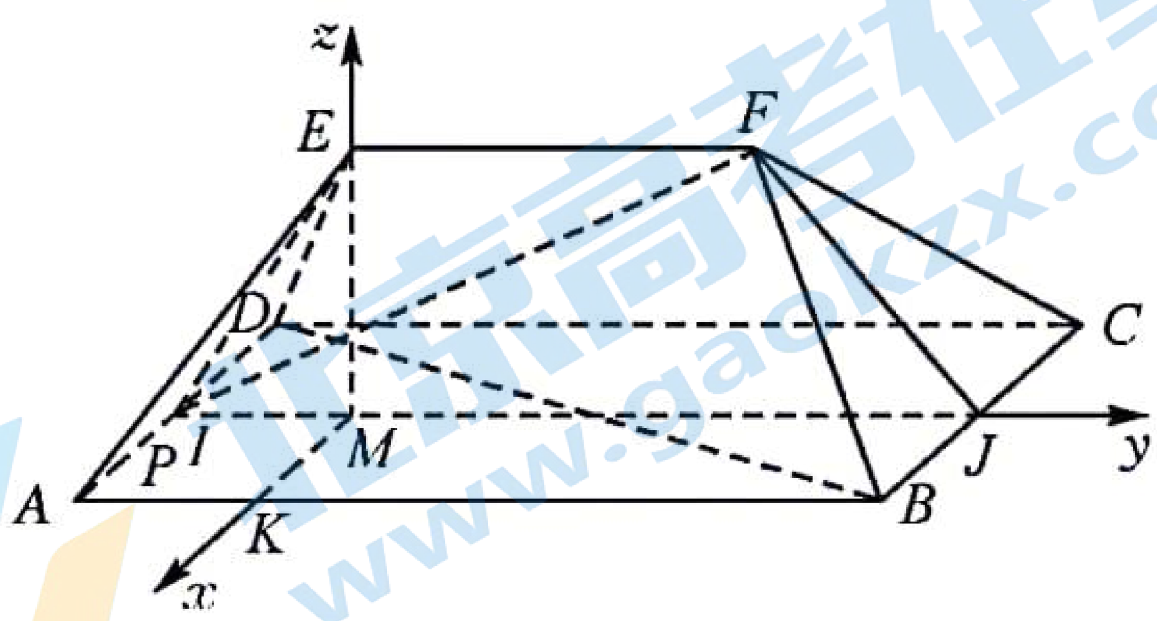
因为$\overrightarrow{FQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}$，所以$\frac{FQ}{QC}=\frac{2}{3}$， ………………………………………… 3 分

所以$\frac{FQ}{QC}=\frac{PH}{HC}$，所以 $PF/\!/HQ$， ………………………………………… 4 分

因为 $HQ\subset$平面 BDQ，$PF\not\subset$平面 BDQ，

所以 $PF/\!/$平面 BDQ. …………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：分别取 AD，BC 的中点 I，J，连接 EI，IJ，FJ，则 $IJ/\!/AB$，且 $IJ=AB$， ………………………… 7 分



因为四边形 $ABFE$ 与四边形 $CDEF$ 为全等的等腰梯形，所以 $EA=ED=FB$

$=FC$，四边形 $EIJF$ 为等腰梯形，且 $EF/\!/IJ$，$EF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}IJ$，

$EI\perp AD$，$FJ\perp BC$，又 $AD/\!/BC$，所以 $FJ\perp AD$， ………………………… 8 分

因为 EI，$FJ\subset$平面 $EIJF$，且 EI，FJ 为两条相交直线，

所以 $AD\perp$平面 $EIJF$，所以平面 $ABCD\perp$平面 $EIJF$.

过 E 在平面 $EIJF$ 内作 IJ 的垂线，垂足为 M，则 $EM\perp$平面 $ABCD$，

$EM=\frac{3}{2}$，$IM=\frac{1}{2}(IJ-EF)=1$. …………………………………………………………………………… 9 分

过 M 作 $MK/\!/AD$，易得 MK，MJ，ME 两两垂直，以 M 为坐标原点，MK，MJ，ME 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系(如图所示)，则 $F\left(0,2,\frac{3}{2}\right)$，$B(1,3,0)$，$C(-1,3,0)$，

设 $P(a,-1,0)(-1\leqslant a\leqslant 1)$，所以$\overrightarrow{PF}=\left(-a,3,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(1,1,-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FC}=\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)$. ………………… 11 分

设平面 BCF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y-\frac{3}{2}z=0,\\ -x+y-\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$

令 $z=2$，解得 $x=0$，$y=3$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,3,2)$， ……………………………………………………………

设 PF 与平面 BCF 所成角的大小为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{12}{\sqrt{a^2+\frac{45}{4}}\times\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13},$$

解得 $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，且满足题意，所以 $AP=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $AP=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 15 分

18.(1)解：设 C 的半焦距为 c，由题意得 $\begin{cases}2a=4,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$ ………………………………………… 4 分

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 6 分

(2)证明：设 MN 的方程为 $x=sy+t(t\neq2)$，代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $(3s^2+4)y^2+6sty+3t^2-12=0$，

由 $\Delta=36s^2t^2-4(3s^2+4)(3t^2-12)>0$，得 $3s^2+4-t^2>0$， ………………………………………… 8 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{6st}{3s^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3s^2+4}$，

所以 $x_1+x_2=s(y_1+y_2)+2t=\frac{8t}{3s^2+4}$，

$x_1x_2=(sy_1+t)(sy_2+t)=s^2y_1y_2+st(y_1+y_2)+t^2=\frac{4t^2-12s^2}{3s^2+4}$. ………………………………………… 11 分

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=-1$，得 $y=-\frac{3y_1}{x_1-2}$，故 $P\left(-1,-\frac{3y_1}{x_1-2}\right)$，

同理可求 $Q\left(-1,-\frac{3y_2}{x_2-2}\right)$， ………………………………………… 13 分

所以 $\overrightarrow{BP}=\left(0,-\frac{3y_1}{x_1-2}\right)$，$\overrightarrow{BQ}=\left(0,-\frac{3y_2}{x_2-2}\right)$，由 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\frac{9}{4}$，得 $-\frac{3y_1}{x_1-2}\left(-\frac{3y_2}{x_2-2}\right)=-\frac{9}{4}$，

即 $\frac{y_1y_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=-\frac{1}{4}$， ………………………………………… 15 分

所以 $\frac{\frac{3t^2-12}{3s^2+4}}{\frac{4t^2-12s^2}{3s^2+4}-2\times\frac{8t}{3s^2+4}+4}=-\frac{1}{4}$，所以 $\frac{3(t^2-4)}{(t-2)^2}=-1$，解得 $t=-1$，

所以直线 MN 的方程为 $x=sy-1$，故直线 MN 过定点 $(-1,0)$. ………………………………………… 17 分

19.解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x$，$f'(x)=x\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}}{x}=\frac{x^2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x}$. ………………………………………… 1 分

令 $g(x)=x^2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}(x>0)$，则 $g'(x)=(x^2+2x)\mathrm{e}^x>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ………………………………………… 2 分

又 $g(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$， ………………………………………… 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=0$. ······ 4 分

(2)由题意知 $f'(x)=xe^x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2e^x-a}{x}(x>0)$.

①当 $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 至多有一个零点,不合题意; ······ 5 分

②当 $a>0$ 时,令 $h(x)=x^2e^x-a$,则 $h'(x)=(x^2+2x)e^x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

因为 $h(0)=-a<0, h(\sqrt{a})=ae^{\sqrt{a}}-a=a(e^{\sqrt{a}}-1)>0$,

所以存在唯一 $x_0\in(0,\sqrt{a})$,使得 $h(x_0)=x_0^2e^{x_0}-a=0$,所以 $a=x_0^2e^{x_0}$. ······ 7 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时, $h(x)<0, f'(x)<0$;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $h(x)>0, f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0$. ······ 9 分

(a)当 $a=e$ 时,由(1)知 $f(x)_{\min}=f(1)=0$,即 $a=e$ 时, $x_0=1$,且 $f(x_0)=0$, $f(x)$ 只有一个零点 1,不合题意;

······ 10 分

(b)当 $a>e$ 时,因为 $a=x_0^2e^{x_0}>e$,则 $x_0>1$,又 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)<f(1)=0$,

而 $f(\ln a)=(\ln a-1)e^{\ln a}-a\ln(\ln a)=a[\ln a-1-\ln(\ln a)]$, ······ 11 分

令 $\varphi(x)=x-1-\ln x$,则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

当 $x>1$ 时, $\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增;

当 $0<x<1$ 时, $\varphi'(x)<0$, $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$;

当 $x>1$ 时, $\varphi(x)>\varphi(1)=0$,即 $x-1-\ln x>0$.

又 $\ln a>1$,所以 $\ln a-1-\ln(\ln a)>0$,所以 $f(\ln a)=a\varphi(\ln a)>0$,

由 $f(x)$ 的单调性及零点存在定理,知 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点.

又 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上有且仅有一个零点 1,

所以,当 $a\in(e,+\infty)$ 时, $f(x)$ 存在两个零点; ······ 13 分

(c)当 $0<a<e$ 时,由 $a=x_0^2e^{x_0}<e$,得 $0<x_0<1$,又 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x_0)<f(1)=0$. 取 $x=e^{-\frac{1}{a}}$,则 $0<e^{-\frac{1}{a}}<1$,所以 $0<1-e^{-\frac{1}{a}}<1$.

当 $x\in(0,1)$ 时, $\ln x<x-1$,所以 $\ln(1-x)<-x$,所以 $x<-\ln(1-x)=\ln\dfrac{1}{1-x}$,

所以 $e^x<\dfrac{1}{1-x}$. ······ 15 分

又 $0<e^{-\frac{1}{a}}<1$,所以 $f(e^{-\frac{1}{a}})=(e^{-\frac{1}{a}}-1)e^{e^{-\frac{1}{a}}}-a\times\left(-\dfrac{1}{a}\right)>(e^{-\frac{1}{a}}-1)\left(\dfrac{1}{1-e^{-\frac{1}{a}}}\right)+1=-1+1=0$,

由 $f(x)$ 的单调性及零点存在定理,知 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上有且仅有一个零点,又 1 为 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内的唯一零点,

所以,当 $a\in(0,e)$ 时, $f(x)$ 存在两个零点.

综上可知, a 的取值范围是 $(0,e)\cup(e,+\infty)$. ······ 17 分