

高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语，不等式，函数与导数，三角函数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{N}$ ，则 $\neg p$ 为

- A. $\forall x \notin \mathbf{Q}, x \notin \mathbf{N}$
C. $\forall x \in \mathbf{Q}, x \notin \mathbf{N}$

- B. $\exists x \notin \mathbf{Q}, x \in \mathbf{N}$
D. $\exists x \in \mathbf{Q}, x \notin \mathbf{N}$

2. 如图所示的时钟显示的时刻为 4:30，设半个小时后时针与分针的夹角为 α ($0 < \alpha \leq \pi$)，则 $\alpha =$

- A. $\frac{11\pi}{12}$
C. $\frac{3\pi}{4}$

- B. $\frac{5\pi}{6}$
D. $\frac{2\pi}{3}$



3. 设全集为 U ， A, B 是 U 的子集，有以下四个关系式：

甲： $A \cap B = A$ ；乙： $\complement_U A \subseteq \complement_U B$ ；丙： $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U A$ ；丁： $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ 。

若甲、乙、丙、丁中有且只有一个不成立，则不成立的是

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

4. 函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期为

A. π

B. $\frac{3\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}$

5. 如图是一个装满水的圆台形容器，若在底部开一个孔，并且任意相等时间间隔内所流出的水体积相等，记容器内水面的高度 h 随时间 t 变化的函数为 $h = f(t)$ ，定义域为 D ，设 $t_0 \in D$ ， $t_0 \pm \Delta t \in D$ ， k_1, k_2 分别表示 $f(t)$ 在区间 $[t_0 - \Delta t, t_0]$ ， $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ($\Delta t > 0$) 上的平均变化率，则

A. $k_1 > k_2$

B. $k_1 < k_2$

C. $k_1 = k_2$

D. 无法确定 k_1, k_2 的大小关系



6. 已知 $b > 1$ ，且 $\log_2 \sqrt{a} = \log_b 4$ ，则 $2^a + 2^b$ 的最小值为

A. 4

B. 8

C. 16

D. 32

7. 设 $a = \frac{5}{11}$ ， $b = \ln \frac{21}{11}$ ， $c = \sin \frac{5}{11}$ ，则

A. $c < a < b$

B. $c < b < a$

C. $a < b < c$

D. $b < c < a$

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x), & -1 \leq x < k, \\ x^3 - 3x + 1, & k \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$ 的值域为 A , 若 $A \subseteq [-1, 1]$, 则 $f(x)$ 的零点个数最多是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知非零实数 a, b 满足 $a > |b| + 1$, 则下列不等关系一定成立的是

- A. $a^2 > b^2 + 1$ B. $2^a > 2^{b+1}$
C. $a^2 > 4b$ D. $\left| \frac{a}{b} \right| > b + 1$

10. 下列式子正确的是

- A. $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\tan 12^\circ + \tan 33^\circ + \tan 12^\circ \tan 33^\circ = 1$ D. $2\sqrt{3} \tan 15^\circ + \tan^2 15^\circ = \sqrt{3}$

11. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + a \sin x$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
B. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后关于 y 轴对称
C. 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$
D. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$

12. 已知直线 $l: y = -x + a$ 与曲线 $C: y = be^{-x} - 1$, 则

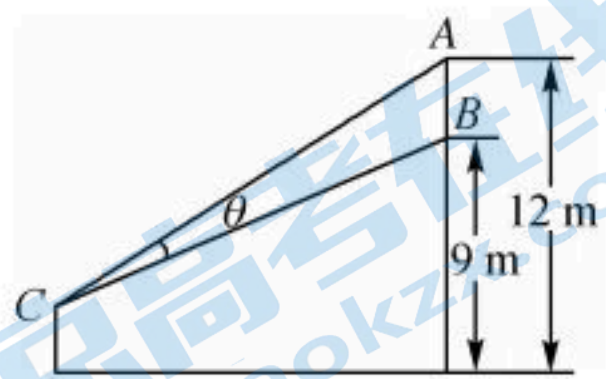
- A. 当 $b \leq 0$ 时, l 与 C 没有交点 B. 当 $b < e^a$ 时, l 与 C 有两个交点
C. 当 $a < \ln b$ 时, l 与 C 没有交点 D. 当 $a = \ln b$ 时, l 与 C 有一个交点

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

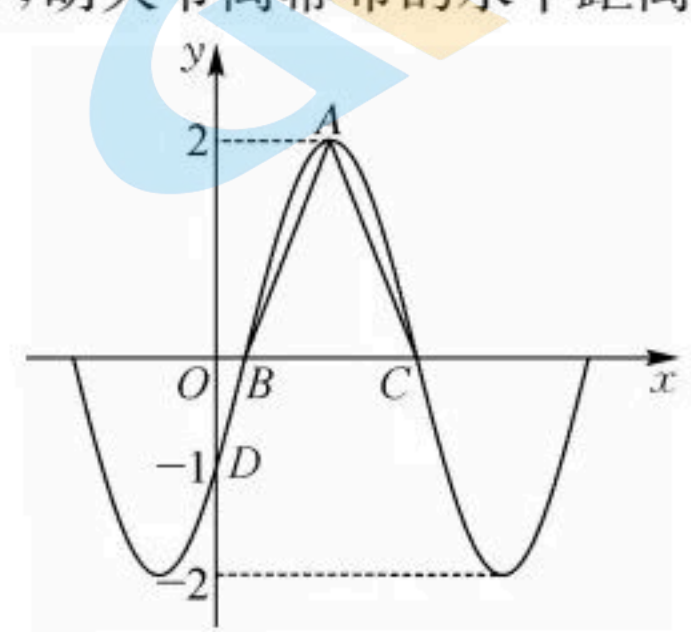
13. 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则“ $[x] \geq [y]$ ”是“ $x \geq y$ ”的 _____ 条件. (填“充分不必要”“必要不充分”“充要”或“既不充分也不必要”)

14. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + b)$ 的值域为 \mathbf{R} , 且在 $(-1, 1]$ 上单调递增, 请写出一个满足题意的 $f(x)$ 的解析式 _____.

15. 如图, 某商家欲在广场播放露天电影, 幕布最高点 A 处离地面 12 m, 最低点 B 处离地面 9 m. 胡大爷的眼睛到地面的距离为 170 cm, 他带着高 30 cm 的小板凳去观影, 由于观影人数众多, 胡大爷决定站在板凳上观影, 为了获得最佳观影效果(视角 θ 最大), 胡大爷离幕布的水平距离应为 _____.



第 15 题



第 16 题

16. 如图是函数 $f(x) = K \sin(\omega x + \varphi) (K > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象, A 是图象的一个最高点, D 是图象与 y 轴的交点, B, C 是图象与 x 轴的交点, 且 $D(0, -1)$, $\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{\pi}{2}$. 若 $x \in \left(\frac{\pi}{12}, \pi\right)$ 时, 关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - (m+1)f(x) + m = 0$ 恰有 3 个不同的实数根, 则 m 的取值范围是 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

$$\text{已知集合 } A = \left\{ x \mid y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - ax + a}} \right\}, B = \left\{ x \mid \frac{4}{x-2} \geq 1 \right\}.$$

(1) 若 $A = \mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若命题 $p: " \exists x \in A, x \in B "$ 是假命题, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

$$\text{已知 } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(5\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)} = \frac{1}{3}.$$

(1) 求 $\cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$ 的值;

(2) 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 且 $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 β 的值.

19. (本小题满分 12 分)

设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 已知 $f(x) = x + f'(0) \cos 2x + a (a \in \mathbf{R})$, 且 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, 2)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调区间.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(\lg x) = x + \frac{1}{x} + 2$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性及 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性, 并分别用定义进行证明;

(2) 若对 $\forall x \in [-1, 1], af(x) \leq f(2x) + 4a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$).

(1) 当 $\omega = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) + \sin \varphi$, 若 $x = -\frac{\pi}{8}$ 是 $g(x)$ 的零点, 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是 $g(x)$ 图象的对称轴, 且

$g(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9})$ 上无最值, 求 ω 的最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + a$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $g(x) = e^x f(x)$ 的极值;

(2) 若 $f(\ln x) + \frac{2e^2}{x} \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. D 因为 $p: \forall x \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{N}$, 所以 $\neg p$ 为 $\exists x \in \mathbf{Q}, x \notin \mathbf{N}$. 故选 D.

2. B 半小时后是 5:00 整, 时针指向 5, 分针指向 12, $\alpha = \frac{5}{12} \times 2\pi = \frac{5\pi}{6}$. 故选 B.

3. B 由题意, 甲: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$; 乙: $\complement_U A \subseteq \complement_U B \Leftrightarrow B \subseteq A$; 丙: $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U A \Leftrightarrow \complement_U B \subseteq \complement_U A \Leftrightarrow A \subseteq B$; 丁: $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ 对任意的集合 A, B 均成立. 若有且只有一个不成立, 则必为乙. 故选 B.

4. C 法一: $f(x) = |\sin x| + |\cos x| = \sqrt{(|\sin x| + |\cos x|)^2} = \sqrt{1 + |\sin 2x|} = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}}}$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. 故选 C.

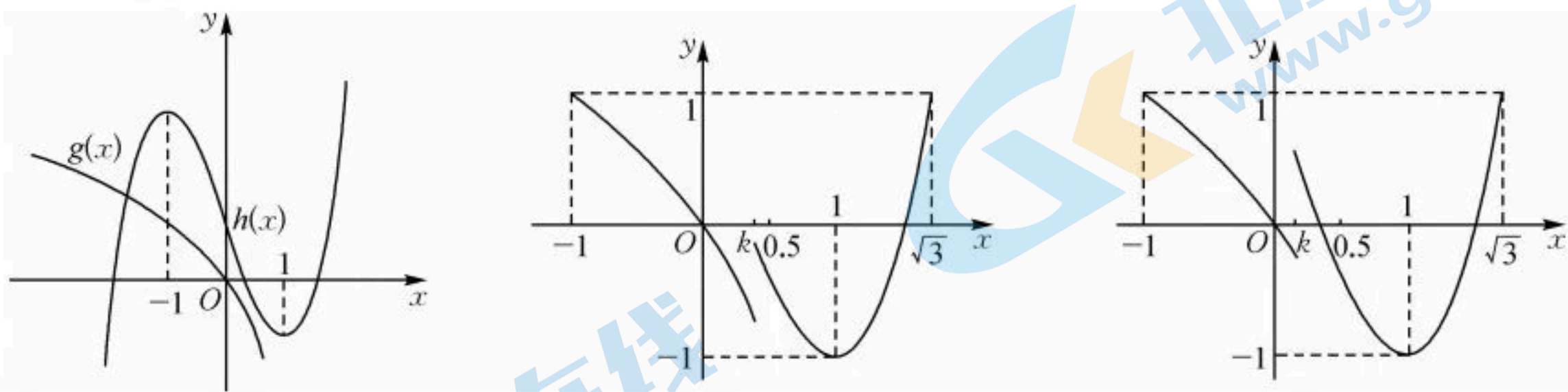
法二: 易验证, $\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的周期, $\frac{\pi}{4}$ 不是函数 $f(x)$ 的周期; 而 π 是 $\frac{\pi}{2}$ 的 2 倍, $\frac{3\pi}{2}$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的 3 倍. 故选 C.

5. A 由容器的形状可知, 在相同的变化时间内, 高度的减小量越来越大, 且高度 h 的变化率小于 0, 所以 $f(t)$ 在区间 $[t_0 - \Delta t, t_0], [t_0, t_0 + \Delta t]$ ($\Delta t > 0$) 上的平均变化率由大变小, 即 $k_1 > k_2$. 故选 A.

6. D 因为 $\log_2 \sqrt{a} = \log_b 4$, 所以 $\frac{1}{2} \log_2 a = \log_b 4$, 即 $\log_2 a = \frac{2 \log_2 4}{\log_2 b}$, 所以 $\log_2 a \cdot \log_2 b = 4$. 因为 $b > 1$, 则 $a > 1$, 所以 $\log_2 a > 0, \log_2 b > 0$. $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b \geq 2 \sqrt{\log_2 a \cdot \log_2 b} = 4$, 则 $ab \geq 16, 2^a + 2^b \geq 2 \sqrt{2^a \cdot 2^b} = 2 \sqrt{2^{a+b}} \geq 2 \sqrt{2^{2\sqrt{ab}}} \geq 32$, 当且仅当 $a = b = 4$ 时, 等号均成立. 故选 D.

7. A 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 易证 $x > \sin x$, 可得 $\frac{5}{11} > \sin \frac{5}{11}$, 即 $a > c$; $b - a = \ln \frac{21}{11} - \frac{5}{11} = \ln(1 + 2 \times \frac{5}{11}) - \frac{5}{11}$, 设 $f(x) = \ln(1 + 2x) - x$ ($0 < x < \frac{1}{2}$), 则 $b - a = f(\frac{5}{11})$, 因为 $f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}$, 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 所以 $f(\frac{5}{11}) > f(0) = 0$, 即 $b > a$, 所以 $b > a > c$. 故选 A.

8. C 令 $g(x) = \log_2(1-x)$, 则 $g(x) = \log_2(1-x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减; 令 $h(x) = x^3 - 3x + 1$, 则 $h'(x) = 3x^2 - 3$. 由 $h'(x) > 0$, 得 $x > 1$ 或 $x < -1$; 由 $h'(x) < 0$, 得 $-1 < x < 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 于是, $h(x)$ 的极大值为 $h(-1) = 3$, 极小值为 $h(1) = -1$. 在同一坐标系中作出函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的图象, 如下图:



显然 $f(-1) = g(-1) = 1$; 由 $g(x) = -1$, 得 $x = \frac{1}{2}$; 由 $f(x)$ 的解析式, 得 $-1 < k \leq 1$.

(1) 若 $-1 < k < 0$, 当 $k \leq x < 0$ 时, $f(x) > f(0) = 1$, 不符合题意;

(2) 若 $\frac{1}{2} < k \leq 1$, 当 $\frac{1}{2} < x < k$ 时, $f(x) < f(\frac{1}{2}) = -1$, 不符合题意;

(3) 若 $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$,

① 当 $-1 \leq x < k$ 时, $-1 < f(x) \leq 1$;

② 当 $k \leq x \leq \sqrt{3}$ 时, $f(1) \leq f(x) \leq \max\{f(k), f(\sqrt{3})\} \leq 1$, 即 $-1 \leq f(x) \leq 1$.

由①②, $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$ 时符合题意.

此时,结合图象可知,当 $k=0$ 时, $f(x)$ 在 $[-1,k)$ 上没有零点,在 $[k,\sqrt{3}]$ 上有 2 个零点;当 $0 < k \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[-1,k)$ 上有 1 个零点,在 $[k,\sqrt{3}]$ 上有 1 个或 2 个零点,综上, $f(x)$ 最多有 3 个零点. 故选 C.

9. ABC 由于非零实数 a, b 满足 $a > |b| + 1$, 则 $a^2 > (|b| + 1)^2$, 即 $a^2 > b^2 + 2|b| + 1 > b^2 + 1$, 则 A 一定成立; 因为 $a > |b| + 1 \geq b + 1 \Rightarrow 2^a > 2^{b+1}$, 则 B 一定成立; 又 $b^2 + 1 \geq 2|b|$, 所以 $a^2 > 4|b| \geq 4b$, 则 C 一定成立; 对于 D: 令 $a=5, b=3$, 满足 $a > |b| + 1$, 此时 $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{5}{3} < b + 1 = 4$, 则 D 不一定成立. 故选 ABC.

10. AC 对于 A, $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 60^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则 A 正确;

对于 B, $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8} = -\cos(2 \times \frac{\pi}{8}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 B 错误;

对于 C, 因为 $\tan 45^\circ = \tan(12^\circ + 33^\circ) = \frac{\tan 12^\circ + \tan 33^\circ}{1 - \tan 12^\circ \tan 33^\circ} = 1$, 所以 $\tan 12^\circ + \tan 33^\circ + \tan 12^\circ \tan 33^\circ = 1$, 则 C 正确;

对于 D, 法一: 因为 $\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = 2 - \sqrt{3}$, 所以 $2\sqrt{3} \tan 15^\circ + \tan^2 15^\circ = 2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})^2 = 1$, 则 D 错误.

法二: 因为 $\tan 30^\circ = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $2\sqrt{3} \tan 15^\circ = 1 - \tan^2 15^\circ$, 所以 $2\sqrt{3} \tan 15^\circ + \tan^2 15^\circ = 1$, 则 D 错误. 故选 AC.

11. BD 因为 $f(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) + a \sin(x + \pi) = \cos 2x - a \sin x$, 所以 $a \neq 0$ 时, $f(x + \pi) \neq f(x)$, 则 A 错误;

对于 B, 法一: 因为 $f(\pi - x) = \cos 2(\pi - x) + a \sin(\pi - x) = \cos 2x + a \sin x = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后关于 y 轴对称, 则 B 正确; 法二: $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

后对应的函数为 $f(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x + a \cos x$ 是偶函数, 则其图象关于 y 轴对称, 则 B 正确;

对于 C, 法一: 当 $a=2$ 时, $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$, 设 $t = \sin x, t \in [-1, 1]$, 又函数 $y = -2t^2 + 2t + 1$ 在 $(-1, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减, 由复合函数的单调性可知, 当 $t = \sin x \leq \frac{1}{2}$, 且 $t = \sin x$ 单调递增时,

$f(x)$ 单调递增, 此时 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 当 $t = \sin x \geq \frac{1}{2}$, 且 $t = \sin x$ 单调递减时, $f(x)$ 单调递增, 此时 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 和 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$, 则 C 错误; 法二: 当 $a=2$ 时, $f'(x) = -4\sin x \cos x + 2\cos x = -4\cos x (\sin x - \frac{1}{2})$, 由 $f'(x) \geq 0$, 得

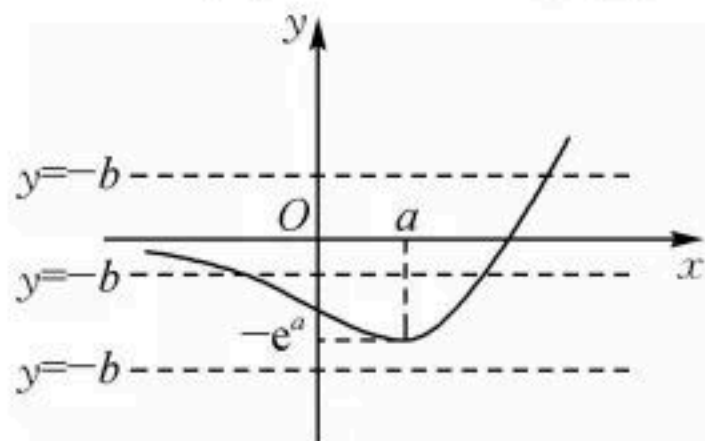
$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \sin x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \cos x \leq 0, \\ \sin x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 内求得 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, 或 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$, 所以 $f(x)$ 的递增区间为

$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 和 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$, 则 C 错误;

对于 D, 设 $t = \sin x$, 则 $f(x) = \cos 2x + a \sin x = -2t^2 + at + 1$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $t \in (0, 1)$, 又 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在零点, 于是方程 $-2t^2 + at + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有解, 即 $a = 2t - \frac{1}{t}$ 在 $(0, 1)$ 上有解. 易知 $y = 2t - \frac{1}{t}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以

$a \in (-\infty, 1)$, 则 D 正确. 故选 BD.

12. CD 由 $\begin{cases} y = -x + a, \\ y = be^{-x} - 1, \end{cases}$ 得 $be^{-x} - 1 = -x + a$, 即 $(x - a - 1)e^x = -b$. 设 $f(x) = (x - a - 1)e^x (x \in \mathbf{R})$, 则 $f'(x) = (x - a)e^x$. 当 $x < a$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上为减函数; 在 $(a, +\infty)$ 上为增函数. 从而 $f(x)_{\min} = f(a) = -e^a$. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$. 如图,



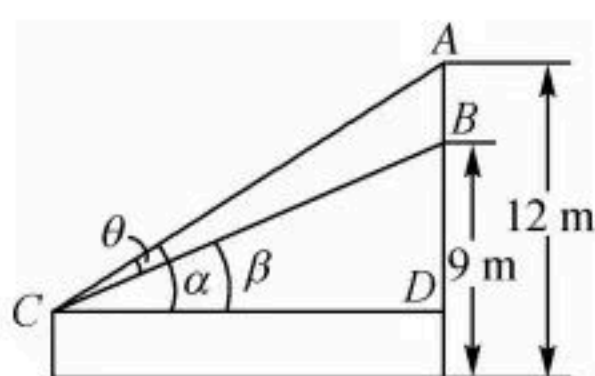
当 $-b \geq 0$, 即 $b \leq 0$ 时, l 与 C 只有一个交点, 则 A 错误; 当 $-e^a < -b < 0$, 即 $0 < b < e^a$ 时, l 与 C 有两个交点, 则 B 错误; 当 $-b < -e^a$, 即 $b > e^a$, 即 $a < \ln b$ 时, l 与 C 没有交点, 则 C 正确; 当 $-b = -e^a$, 即 $a = \ln b$ 时, l 与 C 有一个交点, 则 D 正确. 故选 CD.

13. 必要不充分 $[x] \geq [y]$, 即 $[x] > [y]$ 或 $[x] = [y]$, 当 $[x] > [y]$ 时, 可推出 $x > y$; 但当 $[x] = [y]$ 时, 如 $x = 2.1, y = 2.3$, 此时 $x < y$, 所以“ $[x] \geq [y]$ ”不能推出“ $x \geq y$ ”, 即充分性不成立. 当 $x \geq y$ 时, 即 $x > y$ 或 $x = y$, 当 $x = y$ 时, 必有 $[x] = [y]$; 当 $x > y$ 时, 可推出 $[x] > [y]$ 或 $[x] = [y]$, 所以“ $x \geq y$ ”能推出“ $[x] \geq [y]$ ”, 即必要性成立. 所以“ $[x] \geq [y]$ ”是“ $x \geq y$ ”的必要不充分条件.

14. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 4)$ (答案不唯一) 由题意, 得 $\begin{cases} \Delta = a^2 - 4b \geq 0, \\ \frac{a}{2} \geq 1, \\ 1^2 - a \times 1 + b > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2 \geq 4b, \\ a \geq 2, \\ 1 - a + b > 0, \end{cases}$ 可取 $a = 4, b = 4$, 得 $f(x) =$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 4)$ (答案不唯一).

15. $\sqrt{70}$ m 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D .



设 $\angle ACD = \alpha, \angle BCD = \beta, CD = x (x > 0)$, 则 $\theta = \alpha - \beta$, 胡大爷站在板凳上眼睛到地面的距离为 2 m.

在 $Rt\triangle ACD$ 和 $Rt\triangle BCD$ 中, $\tan \alpha = \frac{10}{x}, \tan \beta = \frac{7}{x}$, 则 $\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{10}{x} - \frac{7}{x}}{1 + \frac{10}{x} \cdot \frac{7}{x}} = \frac{3}{x + \frac{70}{x}}$

$\frac{3}{2\sqrt{x \cdot \frac{70}{x}}} = \frac{3\sqrt{70}}{140}$ (当且仅当 $x = \sqrt{70}$ 时等号成立), 又 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则当 $x = \sqrt{70}$ m 时, 视角 θ 最大. 即胡大爷离幕

布的水平距离为 $\sqrt{70}$ m 时, 观影效果最佳.

16. $[-1, 0] \cup \{-2, 2\}$ 由题意可得 $K = 2, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |BC| \cdot y_A = \frac{1}{2} |BC| \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$, 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $\frac{T}{2} =$

$\frac{2\pi}{2\omega} = |BC| = \frac{\pi}{2}$, 即 $\omega = 2$. 所以 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$, 又图象过点 $D(0, -1)$, 则 $f(0) = 2\sin \varphi = -1$, 又因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi <$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$, 当 $x \in (\frac{\pi}{12}, \pi)$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in (0, \frac{11\pi}{6})$, $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{12}, \pi)$ 上先增后减再

增, 且 $f(\frac{\pi}{12}) = 0, f(\frac{\pi}{3}) = 2, f(\pi) = -1$, 由 $[f(x)]^2 - (m+1)f(x) + m = 0$, 解得 $f(x) = 1$ 或 m . 因为 $f(x) = 1$

在 $(\frac{\pi}{12}, \pi)$ 上有 2 个不同的实数根, 所以 $f(x) = m$ 需要有 1 个实数根, 此时 $-1 \leq m \leq 0$, 或 $m = \pm 2$, 故 m 的取值范围为

$[-1, 0] \cup \{-2, 2\}$.

17. 解: (1) 因为 $A = \mathbf{R}$, 所以 $x^2 - ax + a > 0$ 恒成立.

所以 $\Delta < 0$, 即 $a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 4$, 故实数 a 的取值范围为 $(0, 4)$ 4 分

(2) 因为 $p: \exists x \in A, x \in B$ 是假命题,

所以 $A \cap B = \emptyset$ 6 分

又 $B = \{x \mid \frac{4}{x-2} \geq 1\} = \{x \mid 2 < x \leq 6\}, A = \{x \mid x^2 - ax + a > 0\}$,

结合二次函数 $y=x^2-ax+a$ 的图象,可得 $\begin{cases} 4-2a+a\leq 0, \\ 36-6a+a\leq 0. \end{cases}$ 解得 $a\geq \frac{36}{5}$ 9分

故实数 a 的取值范围为 $[\frac{36}{5}, +\infty)$ 10分

18. 解:(1) $\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\sin(5\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{-\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{-\tan\alpha-1} = \frac{1}{3}$, 2分

解得 $\tan\alpha=2$, 3分

所以 $\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1} = \frac{1-2}{4+1} = -\frac{1}{5}$ 6分

(2)由(1)知 $\tan\alpha=2$,又因为 $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$,所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$; 8分

因为 $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$, $\beta\in(-\frac{\pi}{2}, 0)$,所以 $\alpha-\beta\in(0, \pi)$,

又 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 10分

于是 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times(-\frac{\sqrt{10}}{10})+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 11分

又 $\beta\in(-\frac{\pi}{2}, 0)$,所以 $\beta=-\frac{\pi}{4}$ 12分

19. 解:(1) $f(x)=x+f'(0)\cos 2x+a(a\in\mathbf{R})$,则 $f'(x)=1-2f'(0)\sin 2x$,得 $f'(0)=1$ 4分

由题意 $f(0)=2$,可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y-2=x$,即 $x-y+2=0$ 6分

(2)由已知得 $f(0)=f'(0)+a=2$.

又由(1)知 $f'(0)=1$,所以 $a=1$.

故 $f(x)=x+\cos 2x+1$ 8分

$f'(x)=1-2\sin 2x, x\in[0, \pi]$,

由 $f'(x)>0$,得 $0\leq x<\frac{\pi}{12}$,或 $\frac{5\pi}{12}<x\leq\pi$;由 $f'(x)<0$,得 $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$ 11分

故 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间为 $[0, \frac{\pi}{12})$ 和 $(\frac{5\pi}{12}, \pi]$;单调递减区间为 $(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ 12分

注:考生的答案为闭区间时也正确.

20. 解:(1)令 $t=\lg x$,则 $x=10^t$.由题意 $f(t)=10^t+10^{-t}+2$,即 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$ 1分

$f(x)$ 为偶函数,证明如下: 2分

函数 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$ 的定义域为 \mathbf{R} .

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,且 $f(-x)=10^{-x}+10^x+2=f(x)$,

所以函数 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$ 为偶函数. 3分

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,证明如下: 4分

$\forall x_1, x_2\in[0, +\infty)$,且 $x_1<x_2$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=10^{x_2}+10^{-x_2}+2-(10^{x_1}+10^{-x_1}+2)=\frac{(10^{x_2}-10^{x_1})(10^{x_1+x_2}-1)}{10^{x_1+x_2}},$$

由 $x_1, x_2\in[0, +\infty)$,且 $x_1<x_2$,得 $10^{x_2}-10^{x_1}>0, 10^{x_1+x_2}-1>0$.

于是 $f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以函数 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 6分

(2)令 $t=10^x+10^{-x}, x\in[-1, 1]$,由(1)得 $t\in[2, \frac{101}{10}]$ 7分

由 $af(x)\leq f(2x)+4a$,得 $a(10^x+10^{-x}+2)\leq 10^{2x}+10^{-2x}+2+4a$,即 $a(t+2)\leq t^2+4a$,

整理,得 $a(t-2)\leq t^2$ 对 $\forall t\in[2, \frac{101}{10}]$ 恒成立,

当 $t=2$ 时, $0\leq 4$,此时 $a\in\mathbf{R}$; 9分

当 $2<t\leq\frac{101}{10}$ 时, $a\leq\frac{t^2}{t-2}=\frac{(t-2)^2+4(t-2)+4}{t-2}=t-2+\frac{4}{t-2}+4$.

因为 $t-2+\frac{4}{t-2} \geq 2\sqrt{(t-2) \cdot \frac{4}{t-2}} = 4$ (当且仅当 $t=4$ 时等号成立), 所以 $a \leq 8$ 11分

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 8]$ 12分

21. 解: (1) $f(x) = 2\sin x \cos(x + \frac{\pi}{6})$

$$= 2\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 2分$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 4分

$$(2) f(x) = 2\sin \omega x \cos(\omega x + \varphi) = 2\sin \omega x (\cos \omega x \cos \varphi - \sin \omega x \sin \varphi) = 2\sin \omega x \cos \omega x \cos \varphi - 2\sin^2 \omega x \sin \varphi$$

$$= \sin 2\omega x \cos \varphi - (1 - \cos 2\omega x) \sin \varphi$$

$$= \sin(2\omega x + \varphi) - \sin \varphi, \dots\dots\dots 6分$$

由题意, 得 $g(x) = \sin(2\omega x + \varphi)$,

因为 $x = -\frac{\pi}{8}$ 为 $g(x)$ 的零点, 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 为 $g(x)$ 图象的对称轴,

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{4}\omega + \varphi = k_1\pi \quad \text{①}, \quad \frac{\pi}{4}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{②}, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \dots\dots\dots 7分$$

$$\text{②} - \text{①}, \text{得 } \frac{\pi}{2}\omega = (k_2 - k_1)\pi + \frac{\pi}{2}, \text{所以 } \omega = 2(k_2 - k_1) + 1,$$

因为 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \omega > 0$, 所以 $\omega = 2n + 1 (n \in \mathbf{N})$, 从而 ω 为正奇数, 8分

因为 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9})$ 上无最值, 则 $\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} \leq \frac{T}{2}$, 这里 T 为 $g(x)$ 的最小正周期,

$$\text{即 } \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{4\omega} \geq \frac{\pi}{18}, \text{解得 } \omega \leq 9. \dots\dots\dots 9分$$

$$\text{当 } \omega = 9 \text{ 时}, -\frac{9\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{4}, \text{此时 } g(x) = \sin\left(18x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9}\right) \text{ 时}, 18x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right),$$

所以当 $18x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, 即 $x = \frac{5\pi}{72}$ 时, $g(x)$ 取得最小值, 不满足题意; 10分

$$\text{当 } \omega = 7 \text{ 时}, -\frac{7\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \text{所以 } \varphi = -\frac{\pi}{4}, \text{此时 } g(x) = \sin\left(14x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9}\right) \text{ 时}, 14x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{19\pi}{36}, \frac{47\pi}{36}\right) \subseteq \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$

此时 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9})$ 上无最值, 符合题意. 11分

故 ω 的最大值为 7. 12分

22. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $g(x) = e^x f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $g'(x) = e^x(x^2 + 3x + 2)$, 1分

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{得 } x = -2, \text{或 } x = -1. \dots\dots\dots 2分$$

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

当 x 变化时, $g(x), g'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	单调递增	$\frac{3}{e^2}$	单调递减	$\frac{1}{e}$	单调递增

因此当 $x=-2$ 时, $g(x)$ 有极大值, 并且极大值为 $\frac{3}{e^2}$;

当 $x=-1$ 时, $g(x)$ 有极小值, 并且极小值为 $\frac{1}{e}$ 4 分

(2) $f(\ln x) + \frac{2e^2}{x} \geq 0$ 等价于 $x[(\ln x)^2 + a \ln x + a] \geq -2e^2$. (★)

令 $h(x) = x[(\ln x)^2 + a \ln x + a]$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $h'(x) = (\ln x)^2 + a \ln x + a + x(\frac{2 \ln x}{x} + \frac{a}{x}) = (\ln x + 2)(\ln x + a)$, 5 分

(i) 若 $a \in [0, 4]$, 对于不等式 $(\ln x)^2 + a \ln x + a \geq 0$, 则有 $\Delta = a^2 - 4a \leq 0$,

故当 $a \in [0, 4]$ 时, 不等式(★)恒成立. 6 分

(ii) 若 $a \in (4, +\infty)$,

当 $x \in (0, e^{-a}]$ 时, $(\ln x)^2 + a \ln x + a = \ln x(\ln x + a) + a > 0$, 所以 $x[(\ln x)^2 + a \ln x + a] > 0$, 故不等式(★)恒成立;

现探究当 $x \in (e^{-a}, +\infty)$ 时的情况:

当 $x \in (e^{-a}, e^{-2})$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 (e^{-a}, e^{-2}) 上单调递减, 在 $(e^{-2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x=e^{-2}$ 是 $h(x)$ 的极小值点.

要使不等式(★)成立, 只需 $h(e^{-2}) = e^{-2}(4 - 2a + a) \geq -2e^2$, 解得 $a \leq 4 + 2e^4$.

故当 $4 < a \leq 4 + 2e^4$ 时, 不等式(★)恒成立. 9 分

(iii) 若 $a \in (-\infty, 0)$,

当 $x \in (0, e^{-2}]$ 时, $(\ln x)^2 + a \ln x + a = (\ln x)^2 + a(\ln x + 1) > 0$, 所以 $x[(\ln x)^2 + a \ln x + a] > 0$, 故不等式(★)恒成立;

现探究当 $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时的情况:

当 $x \in (e^{-2}, e^{-a})$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (e^{-a}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 (e^{-2}, e^{-a}) 上单调递减, 在 $(e^{-a}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x=e^{-a}$ 是 $h(x)$ 的极小值点.

要使不等式(★)成立, 只需 $h(e^{-a}) = e^{-a}(a^2 - a^2 + a) \geq -2e^2$,

即 $ae^{-a} \geq -2e^2$. (☆)

设 $m(x) = \frac{x}{e^x}$ ($x < 0$), 则(☆)化为 $m(a) \geq m(-2)$.

因为 $m'(x) = \frac{1-x}{e^x} > 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数,

于是, 由 $m(a) \geq m(-2)$ 及 $a < 0$, 得 $-2 \leq a < 0$.

故当 $-2 \leq a < 0$ 时, 不等式(★)恒成立. 11 分

综上, 实数 a 的取值范围为 $[-2, 4 + 2e^4]$ 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯