绝密★启用前

广东省 2023—2024 学年高三 11 月统一调研测试数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知复数 z 满足 $zi=1+2i$，则 $|z|=$（　　）

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．1

2．已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2\geq 0\}$，$B=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则（　　）

A．$A\subseteq B$　　B．$B\subseteq A$　　C．$A\bigcup B=\mathbf{R}$　　D．$A\bigcap B=\varnothing$

3．从 2，3，5，7 这四个数中随机地取 2 个不同的数相乘，其结果能被 10 整除的概率是（　　）

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

4．已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

5．“$a>2$”是“函数 $f(x)=\log_a(ax^2-3x+a)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．若椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1(a>0)$ 有公共的左焦点 F，两曲线在第一、三象限内的公共点分别为 P，Q，则 $\cos\angle PFQ$ 的值为（　　）

A．$-\dfrac{4}{5}$　　B．$\dfrac{4}{5}$　　C．$-\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

7．已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，点 D 是边 AB 的中点，记 $\angle ACD=\alpha$．则当 α 最大时，$\tan 2\alpha=$（　　）

A．$-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$　　B．$\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

8．17 到 19 世纪间，数学家们研究了用连分式求解代数方程的根，并得到连分式的一个重要功能：用其逼近

实数求近似值．例如，把方程 $x^2-x-1=0$ 改写成 $x=1+\frac{1}{x}$①，将 x 再代入等式右边得到 $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}$，继续利用①式将 x 再代入等式右边得到 $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$……反复进行，取 $x=1$ 时，由此得到数列 1，$1+\frac{1}{1}$，$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$，$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$，…，记作 $\{a_n\}$，则当 n 足够大时，a_n 逼近实数 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．数列 $\{a_n\}$ 的前 2024 项中，满足 $\left|a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|<0.005$ 的 a_n 的个数为（参考数据：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.618$）

A．1007　　B．1009　　C．2014　　D．2018

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．一组数据从小到大为 5，6，7，8，y，11，若这组数据的平均数是 8，则（　　）

A．$y=10$　　B．极差为 6　　C．40%分位数为 7　　D．方差为 5

10．若 $b<c<0<a$，$a+b>0$，则（　　）

A．$a+c>0$　　B．$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}<0$　　C．$\frac{b+c}{c-a}+\frac{b}{a}>0$　　D．$\frac{1}{b}-b<a-\frac{1}{a}$

11．已知圆 O：$x^2+y^2=4$，P 是直线 l：$x+y+4=0$ 上一点，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点分别为 M，N，则（　　）

A．$|OP|$ 有最小值

B．四边形 $OMPN$ 的周长最小为 8

C．$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\geq0$

D．$\triangle OMN$ 外接圆的面积最大为 2π

12．已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$f(x)=f(2-x)-x+1$．若 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，则（　　）

A．$f(2)=-1$

B．$f(2022)+f(2024)=2023$

C．$f(2.2)-f(2.8)>0.3$

D．$f'(2023)=-\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．函数 $f(x)=\left|2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2024}\right)\right|$ 的最小正周期为________．

14．已知正数 a，b 满足 $\log_3 a=\log_4 b=\log_{12} 5$，则 $ab=$________.

15. 已知点 P 在椭圆 C：$\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 上运动，$D(0,6)$，动点 Q 满足 $|DQ|=\sqrt{2}$，则 $|PQ|$ 的最大值为________.

16．已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2，以 A_1 为球心、$\sqrt{3}$ 为半径的球面与底面 ABC 的交线长为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面在球内部分的总面积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{5}{27}$，设 $b_n=3^n a_n$，$c_n\equiv\frac{a_n}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$．给定 3 个条件：

①数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

②数列 $\{c_n\}$ 为公比为正数的等比数列；

③数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a-(n+b)\left(\frac{1}{3}\right)^n$，其中 a，b 为常数．在这 3 个条件中任选一个，并解决下列问题.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{b_n+c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

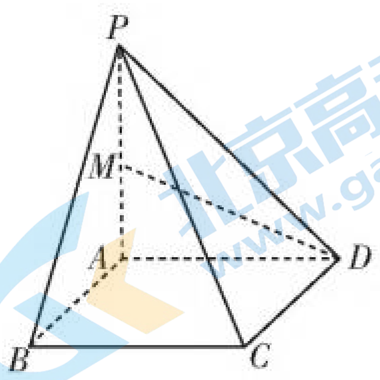
注：若选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18．（12 分）记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，D 为 AB 边的中点，已知 $a\cos B+b\cos A=\frac{\sqrt{3}c}{3}\tan C$.

（1）求 C；

（2）当 $c=3$ 时，求 CD 的最大值.

19.（12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=1$，$BC=2$，$\angle ABC=60°$，$PC\perp CD$，M 为棱 PA 的中点.



（1）证明：$PA\perp CD$；

（2）若$PA\perp AC$，二面角$P-CD-A$的大小为$60°$，求直线MD与平面PCD所成角的正弦值.

20.（12 分）已知在平面直角坐标系xOy中，抛物线C：$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为F，过点$P\left(0,3\right)$的直线l与C交于A，B两点，且$\tan\angle PFO=3$.

（1）求C的标准方程；

（2）已知E为x轴上的点，直线EA与C的另一个交点为M，直线EB与C的另一个交点为N，当直线MN的斜率为 1 时，求点E的坐标.

21.（12 分）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax-\ln x-1$.

（1）当$a=\mathrm{e}-1$时，求$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若$f\left(x\right)$存在零点，求实数a的取值范围.

22.（12 分）现有甲、乙两个不透明盒子，甲盒子装有 2 个红球和 2 个白球，乙盒子装有 4 个白球，这些球的大小、形状、质地完全相同.在一次球交换过程中，从甲盒子与乙盒子中各随机选择 1 个球进行交换，重复n次这样的交换过程后，甲盒子里装有红球的个数为X_n.

（1）求X_2的概率分布及数学期望；

（2）求$P\left(X_n=1\right)$.