2022 北京陈经纶中学高二（上）期中

数　　学

（时间：120 分钟　　满分：150 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $\vec{a}=\left(-2,0,x\right)$，$\vec{b}=\left(0,1,3\right)$，$\vec{c}=\left(1,-x,2\right)$. 若 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{c}$，则 $x=$（　）.

A. -4　　B. $\dfrac{10}{3}$　　C. -8　　D. 4

2. 点 $P(1,-1)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是（　）.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{9}{2}$

3. 直线 l 经过点 $\left(-2,3\right)$，且倾斜角 $\alpha=45^\circ$，则直线 l 的方程为（　　）

A. $x+y-1=0$　　B. $x-y+5=0$　　C. $x+y+1=0$　　D. $x-y-5=0$

4. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2-2mx+m^2-1=0$ 相外切，则实数 $m=$（　）

A. -3　　B. 3　　C. ±3　　D. 1

5. 已知两个不重合的平面 α 与平面 ABC，若平面 α 的法向量为 $\vec{n}=\left(2,-3,1\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(1,0,-2\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(1,1,1\right)$，则（　　）.

A. 平面 α // 平面 ABC

B. 平面 $\alpha\perp$ 平面 ABC

C. 平面 α、平面 ABC 相交但不垂直

D. 以上均不可能

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的中心在原点，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过 F_1 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16，则椭圆 C 的方程为

A. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

C. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$

7. 三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC\perp BC$，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC=BC=2$，$PA=4$，则直线 PC 和直线 AB 所成的角的余弦值为（　）

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

8. “$a=\frac{1}{2}$”是“直线 $x+2ay-1=0$ 与直线 $(a-1)x-ay-1=0$ 平行”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若离心率 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(e\approx 0.618)$，则称椭圆 C 为“黄金椭圆”.则下列三个命题中正确命题的个数是（　）

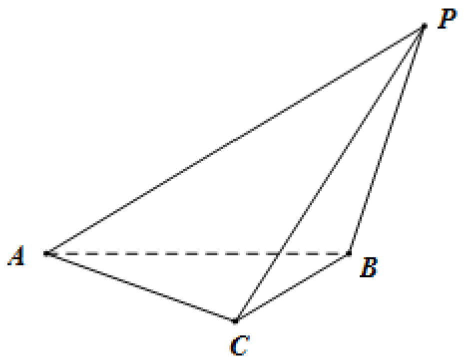
①在黄金椭圆 C 中，$b^2=ac$；

②在黄金椭圆 C 中，若上顶点、右顶点分别为 E，B，则 $\angle F_1EB=90^\circ$；

③在黄金椭圆 C 中，以 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$D(0,-b)$，$E(0,b)$ 为顶点的菱形 $ADBE$ 的内切圆过焦点 F_1，F_2.

A　0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 如图，等腰直角 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC=2$，点 P 为平面 ABC 外一动点，满足 $PB=AB$，$\angle PBA=\frac{\pi}{2}$，给出下列四个结论：



①存在点 P，使得平面 $PAC\perp$ 平面 PBC；

②存在点 P，使得平面 $PAC\perp$ 平面 PAB；

③设 $\triangle PAC$ 的面积为S，则S的取值范围是 $(0,4]$；

④设二面角 $A-PB-C$ 的大小为 α，则 α 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$.

其中正确结论是（　　）

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 写出一个圆心在直线 $x-y=0$ 上，且经过原点的圆的方程：______.

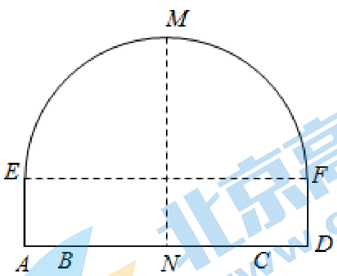
关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

12. 已知直线 $l_1:\sqrt{3}x+3y-1=0$，$l_2:ax-y=1$，$a\in\mathbf{R}$，若 $l_1\perp l_2$．则 l_2 的倾斜角为______.

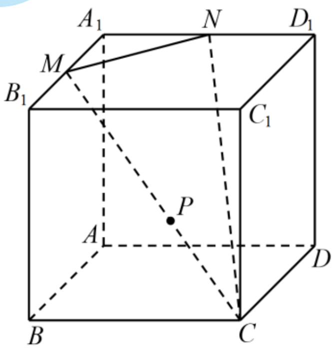
13. 不经过坐标原点的直线 $l:x+y+m=0$ 被曲线 $C:x^2+y^2-2x-2y-2=0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则 m 的值为______.

14. 在空间四边形 $ABCD$ 中，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

15. 如图所示，一隧道内设双行线公路，其截面由一段圆弧和一个长方形构成．已知隧道总宽度 AD 为 $6\sqrt{3}$ m，行车道总宽度 BC 为 $2\sqrt{11}$ m，侧墙 EA、FD 高为 2m，弧顶高 MN 为 5m．为保证安全，要求行驶车辆顶部（设为平顶）与隧道顶部在竖直方向上的高度之差至少要有 0.5m．请计算车辆通过隧道的限制高度是_________.



16. 如图，在棱长为 2 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点，点 P 在线段 CM 上运动，给出下列四个结论：



①平面 CMN 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形是五边形；

②直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

③存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1=90°$；

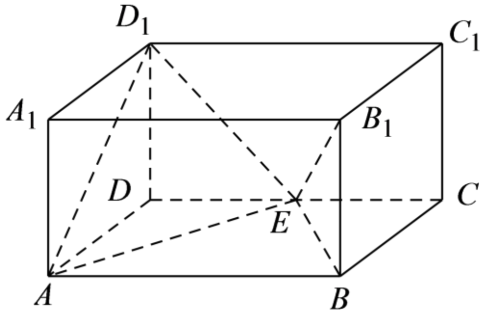
④$\triangle PDD_1$ 面积的最小值是 $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题：本大题共 5 个小题，共 70 分.

17. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2BC=2CC_1=2$，点 E 是 DC 的中点.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。



（1）求点 D 到平面 AD_1E 的距离；

（2）求证：平面 $AD_1E\perp$ 平面 EBB_1.

18. 已知圆 C 过点 $(1,1)$，圆心为 $(2,0)$.

（1）求圆 C 的方程；

（2）判断直线 $y=x-4$ 与圆 C 的位置关系；

（3）已知过点 $P(1,3)$ 的直线 l 交圆 C 于 A,B 两点，且 $|AB|=2$，求直线 l 的方程.

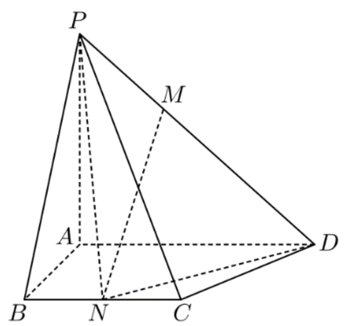
19. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过焦点 $F(1,0)$ 的直线 l 与椭圆交于 A,B 两点.

（1）求椭圆 C　标准方程；

（2）从下面两个条件中任选其一作为已知，证明另一个成立：

①$4|AB|=15$；②直线 l 的斜率 k 满足：$k^2=\dfrac{1}{4}$.

20. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$AD//BC$，$AD=3$，$AB=BC=2$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=3$，点 M 在棱 PD 上，点 N 为 BC 中点.



（1）证明：若 $DM=2MP$，则直线 $MN//$ 平面 PAB；

（2）求平面 PCD 与平面 PND 夹角　余弦值；

（3）是否存在点 M，使 NM 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$？若存在，试求出 $\dfrac{PM}{PD}$ 的值；若不存在，请说明理由.

21. 对于向量 $\overrightarrow{X_0}=(a_0,b_0,c_0)$，若 a_0,b_0,c_0 三个实数互不相等，令向量 $\overrightarrow{X_{i+1}}=(a_{i+1},b_{i+1},c_{i+1})$，其中

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$a_{i+1}=|a_i-b_i|$，$b_{i+1}=|b_i-c_i|$，$c_{i+1}=|c_i-a_i|$，（$i=0,1,2,\cdots$）.

（1）当 $\overrightarrow{X_0}=(5,2,1)$ 时，直接写出向量 $\overrightarrow{X_4},\overrightarrow{X_5},\overrightarrow{X_6},\overrightarrow{X_7}$；

（2）证明：对于 $\forall i\in\mathbf{N}$，向量 $\overrightarrow{X_i}$ 中的三个实数 a_i,b_i,c_i 至多有一个为 0；

（3）若 $a_0,b_0,c_0\in\mathbf{N}$，证明：$\exists t\in\mathbf{N}$，$\overrightarrow{X_t}=\overrightarrow{X_{t+3}}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

参考答案

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的.

1. 【答案】A

【解析】

【分析】求出向量$\vec{a}+\vec{b}$的坐标，由空间向量垂直的坐标表示可求得x的值.

【详解】由已知可得$\vec{a}+\vec{b}=(-2,1,x+3)$，由题意可得$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=-2-x+2(x+3)=x+4=0$，

解得$x=-4$.

故选：A.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】利用点到直线的距离公式求距离即可.

【详解】$d=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】利用直线的点斜式方程求解.

【详解】解：因为直线l的倾斜角$\alpha=45^\circ$，

所以直线l的斜率为 1，

又直线l经过点$(-2,3)$，

所以直线l的方程为$y-3=x+2$，

即$x-y+5=0$，

故选：B

4. 【答案】C

【解析】

【分析】由两圆外切圆心距等于半径之和求解即可

【详解】$x^2+y^2=4$的圆心$(0,0)$，半径为 2，

$x^2+y^2-2mx+m^2-1=0$的圆心$(m,0)$，半径为 1，

因为两圆外切，

所以$\sqrt{(m-0)^2+(0-0)^2}=2+1$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

即 $|m|=3$，解得 $m=\pm 3$，

故选：C

5. 【答案】A

【解析】

【分析】求出平面 ABC 的法向量，利用向量关系即可判断.

【详解】设平面 ABC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x-2z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$，令 $x=2$，可得 $y=-3,z=1$，

所以 $\vec{m}=(2,-3,1)$，

因为 $\vec{n}=\vec{m}$，所以平面 α // 平面 ABC .

故选：A.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】

结合椭圆定义可知 ΔABF_2 的周长为 $4a$，由此求得 a；利用离心率可求得 c；根据椭圆 $b^2=a^2-c^2$ 可求得 b^2，进而得到椭圆方程.

【详解】设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

由椭圆定义知：$|AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|=2a$　　$\therefore \Delta ABF_2$ 的周长为 $4a$

即 $4a=16$，解得：$a=4$

$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　$\therefore c=2\sqrt{2}$　　$\therefore b^2=a^2-c^2=16-8=8$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$

故选：D

【点睛】本题考查椭圆标准方程的求解，涉及到椭圆定义和离心率的应用问题.

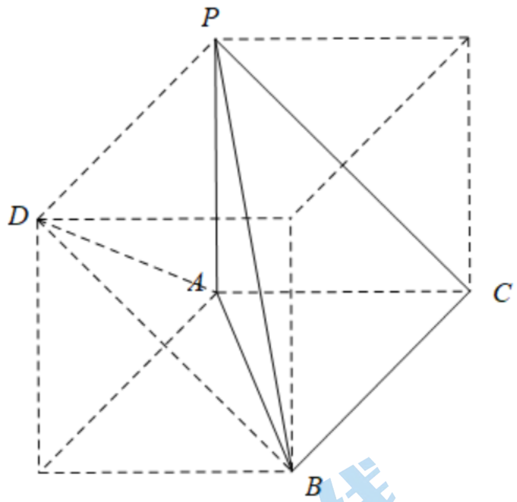
7. 【答案】C

【解析】

【分析】将三棱锥放到长方体中，然后利用长方体的特征和余弦定理求角即可.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

【详解】



如图，将三棱锥 $P-ABC$ 放到长方体中，由题意知，$PC \parallel DA$，所以 $\angle DBA$ 或其补角是直线 PC 和直线 AB 所成角，

因为 $AC=BC=2$，$PA=4$，所以 $AB=2\sqrt{2}$，$DB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$DA=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

$\cos\angle DBA=\dfrac{\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}{2\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

故选：C.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】由两直线平行得出 a 的值，再结合充分条件和必要条件的定义判断即可.

【详解】若直线 $x+2ay-1=0$ 与直线 $(a-1)x-ay-1=0$ 平行，则有 $\begin{cases}1\times(-a)=2a\cdot(a-1),\\1\times(-1)\neq(-1)\cdot(a-1),\end{cases}$ 解得

$a=0$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$，所以当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，直线 $x+2ay-1=0$ 与直线 $(a-1)x-ay-1=0$ 平行，当直线

$x+2ay-1=0$ 与直线 $(a-1)x-ay-1=0$ 平行时，$a=0$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$.

故选：A

9. 【答案】D

【解析】

【分析】根据黄金椭圆的概念及 $b^2=a^2-c^2$ 可判断①，根据条件及勾股定理可判断②，根据条件可求内切圆的半径进而可判断③.

【详解】对①，因为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}c$，则

$b^2=a^2-c^2=\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)c^2-c^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)c^2=ac$，故①正确；

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

对②，因为在$\triangle F_1EB$中，$|F_1E|=a,|F_1B|=a+c,|EB|^2=a^2+b^2$，由①知，$b^2=ac$，

所以$|F_1B|^2=(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=a^2+2b^2+c^2=2a^2+b^2=|F_1E|^2+|EB|^2$，

即$\angle F_1EB=90^\circ$，故②正确；

对③，由题可知以$A(-a,0),B(a,0),D(0,-b),E(0,b)$为顶点的菱形$ADBE$的内切圆是以原点为圆心，设圆心的半径为$r$，

所以$r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{a^2+ac}}=\dfrac{a\sqrt{c}}{\sqrt{a+c}}=\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{1}{e}+1}}$，

代入离心率得到$r=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a=c$，所以圆过焦点$F_1,F_2$，故③正确.

故选：D.

10. 【答案】B

【解析】

【分析】

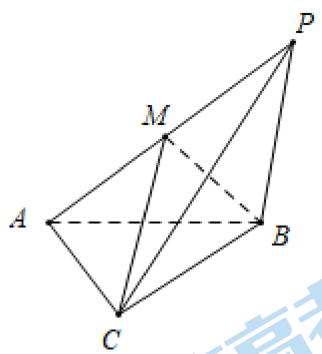
①当$PB\perp BC$时，结合条件，利用线面垂直的判定定理和面面垂直的判定定理判断；②取AP的中点M，根据$PB=AB$，得到$MB\perp AP$，利用反证法判断；③由$AP=4$，$AC=2$，得到

$S_{\triangle PAC}=\dfrac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\angle PAC=4\sin\angle PAC$，由点$P$在$\triangle ABC$平面上的极限位置判断；④根据

$\angle ABC=45^\circ$，由点P在平面ABC内时 $\alpha=0$，当点P运动时，设点A到平面PBC的距离为h，根据

$PB\perp AB$，由$\dfrac{h}{AB}\le\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$判断.

【详解】如图所示：



①当$PB\perp BC$时，又$PB\perp AB,BC\cap AB=B$，所以$PB\perp$平面ABC，所以$PB\perp AC$，又

$AC\perp BC,PB\cap BC=B$，所以$AC\perp$平面PBC，又$AC\subset$平面PAC，所以平面$PAC\perp$平面PBC，故正确；

②取AP的中点M，连接BM，CM，因为$PB=AB$，所以$MB\perp AP$，假设平面$PAC\perp$平面PAB，则$MB\perp$平面PAC，则$MB\perp CM$，而$BM=BC=2$，$\angle BMC\neq 90^\circ$，不成立，故错误；

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

③因为 $AP=4$，$AC=2$，所以 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\angle PAC=4\sin\angle PAC$，当点 P 在 $\triangle ABC$ 平面上，且 C，P 在 A，B 的异侧 $\angle PAC=90^{\circ}$，当 C，P 在 A，B 的同侧时，A，C，P 共线，$\angle PAC=0^{\circ}$，因为点 P 为平面 ABC 外，则 S 的取值范围是 $(0,4)$，故错误；

④因为 $\angle ABC=45^{\circ}$，当点 P 在平面 ABC 内时 $\alpha=0$，当点 P 运动时，设点 A 到平面 PBC 的距离为 h，因为 $PB\perp AB$，则 $\frac{h}{AB}\le\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha\le\frac{\pi}{4}$，所以 α 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$，故正确.

故选：B

【点睛】关键点点睛：本题③④的解决关键在于理解点 P 是绕 AB 轴在旋转，从而找到极限位置而得解.

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 【答案】$(x-1)^2+(y-1)^2=2$（答案不唯一）

【解析】

【分析】利用圆心在直线 $x-y=0$ 上设圆心坐标为 $C(a,a)$，由于圆过原点，得半径 $r=\sqrt{2|a|}(a\ne0)$，对 a 赋值，可得一个符合条件的圆的方程.

【详解】解：因为圆心在直线 $x-y=0$，则设圆心坐标为 $C(a,a)$

又圆经过原点

则圆的半径为 $r=|OC|=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2|a|}$，且 $a\ne0$

故取 $a=1$，得圆心为 $C(1,1)$，半径 $r=\sqrt{2}$

所以圆的方程为：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

故答案为：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$（答案不唯一）

12. 【答案】60°##$\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】根据 $l_1\perp l_2$ 可求得 l_2 的斜率，再根据直线斜率与倾斜角的关系求解即可.

【详解】因为 $l_1:\sqrt{3}x+3y-1=0$ 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $l_1\perp l_2$，故 l_2 的斜率为 $\frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$，故 l_2 的倾斜角为 60°.

故答案为：60°

13. 【答案】-4

【解析】

【分析】根据圆的弦长公式计算即可.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

【详解】由题意知曲线 C 是圆心坐标为（1，1），半径为 2 的圆，$\therefore$圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|2+m|}{\sqrt{2}}$，

$\therefore 2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{4-\frac{(2+m)^2}{2}}=2\sqrt{2}$，

解得 $m=0$ 或 $m=-4$．

$\because$直线 $l:x+y+m=0$ 不经过坐标原点，

$\therefore m=-4$，

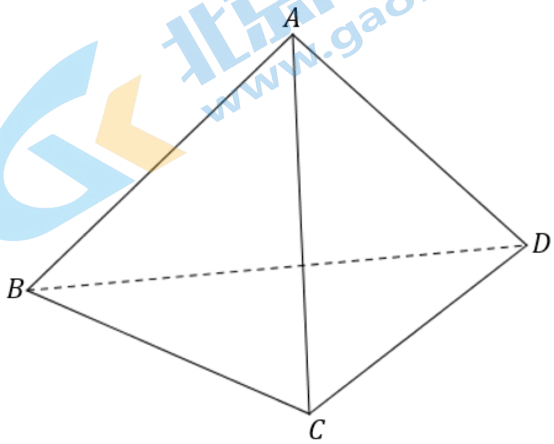
故答案为：−4.

14. 【答案】0

【解析】

【分析】选取一组基底，利用空间向量的加减法，结合数量积的运算律，可得答案.

【详解】如图：



令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)+\vec{c}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$．

故答案为：0．

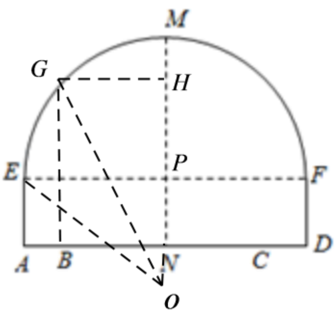
15. 【答案】$3.5\mathrm{m}$ ## $\frac{7}{2}\mathrm{m}$

【解析】

【分析】通过已知数据求出圆弧的半径，再通过由半径算弦心距的方法求出最大高度，最后减去安全高度差即可.

【详解】如下图，圆弧的圆心 O 在直线 MN 上，过 B 作 $BG\perp AD$，交圆弧于点 G，作 $GH\perp MN$ 于点 H，连接 OE、OG.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。



由题可知，$MP=5-2=3\text{m}$，$EP=\dfrac{1}{2}AD=3\sqrt{3}\text{m}$，$GH=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{11}\text{m}$

设 $OE=OM=r$，则 $OP=r-3$

在 $\triangle OEP$ 中，有 $OE^2=OP^2+EP^2$

即 $r^2=(r-3)^2+(3\sqrt{3})^2$，解得 $r=6$

$\therefore OH=\sqrt{OG^2-GH^2}=\sqrt{6^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}=5\text{m}$

$\therefore MH=OM-OH=6-5=1\text{m}$

$\therefore BG=NH=MN-MH=5-1=4\text{m}$

故车辆通过隧道的限制高度是 $4-0.5=3.5\text{m}$.

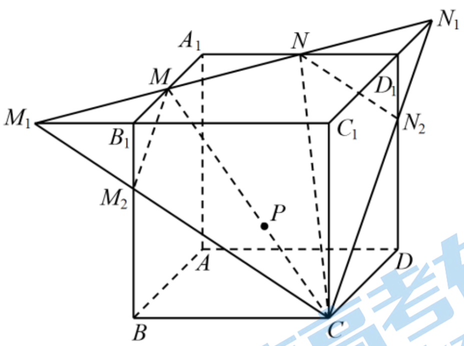
故答案为：3.5m

16. 【答案】①③

【解析】

【分析】作出截面图形判断①，利用等积法可判断②，利用坐标法可判断③④.

【详解】对于①，如图直线 MN 与 C_1B_1、C_1D_1 的延长线分别交于 M_1,N_1，连接 CM_1,CN_1 分别交 BB_1,DD_1 于 M_2,N_2，连接 MM_2,NN_2，

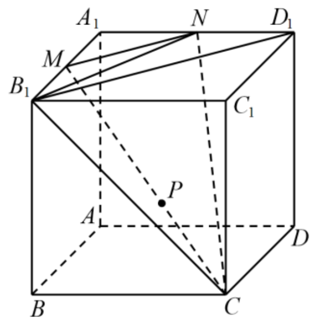


则五边形 MM_2CN_2N 即为所得的截面图形，故①正确；

对于②，由题可知 $MN//B_1D_1$，$MN\subset$ 平面 CMN，$B_1D_1\not\subset$ 平面 CMN，

$\therefore B_1D_1//$ 平面 CMN，故点 B_1 到平面 CMN 的距离即为直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。



设点 B_1 到平面 CMN 的距离为 h，由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2 可得，

$CM=CN=3,MN=\sqrt{2}$， $S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，

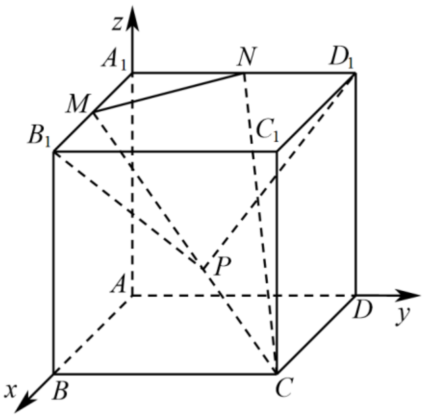
$\therefore V_{B_1-CMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle CMN}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times h=\frac{\sqrt{17}}{6}h$，

$V_{C-B_1MN}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1MN}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$，

$\therefore$ 由 $V_{B_1-CMN}=V_{C-B_1MN}$， 可得 $h=\frac{2\sqrt{17}}{17}$，

所以直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$， 故②错误；

对于③，如图建立空间直角坐标系，则 $B_1(2,0,2),D_1(0,2,2),C(2,2,0),M(1,0,2)$，



设 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{MC},0\le\lambda\le 1$，

$\therefore \overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{MC}=\lambda(1,2,-2)$， 又 $C(2,2,0)$， $B_1(2,0,2),D_1(0,2,2)$，

$\therefore P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$， $\overrightarrow{PB_1}=(\lambda,2\lambda-2,2-2\lambda),\overrightarrow{PD_1}=(\lambda-2,2\lambda,2-2\lambda)$，

假设存在点 P， 使得 $\angle B_1PD_1=90°$，

$\therefore \overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{PD_1}=\lambda(\lambda-2)+2\lambda(2\lambda-2)+(2-2\lambda)^2=0$， 整理得 $9\lambda^2-14\lambda+4=0$，

$\therefore \lambda=\frac{7+\sqrt{13}}{9}>1$（舍去）或 $\lambda=\frac{7-\sqrt{13}}{9}$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

故存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1=90°$，故③正确；

对于④，由上知 $P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$，所以点 $P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$ 在 DD_1 射影为 $(0,2,2\lambda)$，

$\therefore$ 点 $P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$ 到 DD_1 的距离为：

$$d=\sqrt{(2-\lambda)^2+(-2\lambda)^2}=\sqrt{5\lambda^2-4\lambda+4}=\sqrt{5\left(\lambda-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}},$$

$\therefore$ 当 $\lambda=\frac{2}{5}$ 时，$d_{\min}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$ 故△ PDD_1 面积的最小值是 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故④错误.

故答案为：①③.

三、解答题：本大题共 5 个小题，共 70 分.

17. 【答案】（1）$\frac{\sqrt{3}}{3}$；

（2）证明过程见解析.

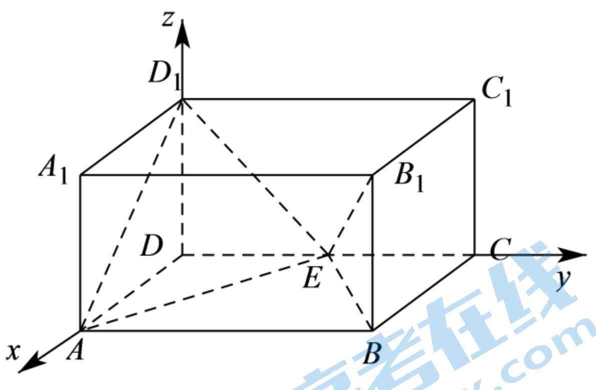
【解析】

【分析】（1）建立空间直角坐标系，求出平面 D_1AE 的法向量，利用点到平面距离公式求出答案；

（2）利用空间向量的数量积为 0 证明出 $EA\perp EB, EA\perp BB_1$，从而证明出线面垂直，进而证明出面面垂直.

【小问 1 详解】

以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0),A(1,0,0),E(0,1,0),D_1(0,0,1),B(1,2,0),B_1(1,2,1)$，

设平面 D_1AE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{D_1A}=(x,y,z)\cdot(1,0,-1)=x-z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EA}=(x,y,z)\cdot(1,-1,0)=x-y=0\end{cases}$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

令 $x=1$ 得：$y=1,z=1$，

所以 $\vec{m}=(1,1,1)$，

则点 D 到平面 AD_1E 的距离为 $d=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|}=\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

【小问 2 详解】

$\overrightarrow{EB}=(1,1,0),\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=(1,-1,0)\cdot(1,1,0)=1-1=0$，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(1,-1,0)\cdot(0,0,1)=0$，

所以 $EA\perp EB,EA\perp BB_1$，

因为 $EB\cap BB_1=B$，$EB,BB_1\subset$ 平面 EBB_1，

所以 $EA\perp$ 平面 EBB_1，

因为 $EA\subset$ 平面 D_1AE，

所以平面 $D_1AE\perp$ 平面 EBB_1.

18. 【答案】（1）$(x-2)^2+y^2=2$

（2）直线与圆相切　　（3）$x=1$ 或 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}$

【解析】

【分析】（1）由两点间的距离公式求出半径，即可得解；

（2）求出圆心到直线的距离，即可判断；

（3）分直线的斜率存在与不存在两种情况讨论，利用垂径定理与勾股定理表示出弦长，即可求出参数的值，从而得解.

【小问 1 详解】

解：由题意，圆的半径为 $\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$，

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=2$.

【小问 2 详解】

解：设圆心到直线的距离为 d，则 $d=\frac{|2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}=r$，故直线与圆相切；

【小问 3 详解】

解：若斜率不存在，则直线方程为 $x=1$，弦心距 $d=1$，半径为 $\sqrt{2}$，

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2$，符合题意；

若斜率存在，设直线方程　$y-3=k(x-1)$，即 $kx-y-k+3=0$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

所以弦心距 $d=\dfrac{|k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $|AB|=2\sqrt{2-\dfrac{(k+3)^2}{1+k^2}}=2$，

解得 $k=-\dfrac{4}{3}$，直线方程为 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{13}{3}$，

综上所述，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{13}{3}$.

19. 【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2) 答案见解析

【解析】

【分析】(1) 由椭圆的性质求解，

(2) 联立直线与椭圆方程公式，由弦长公式与韦达定理化简求解，

【小问 1 详解】

依题意，有：$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ c=1\end{cases}$，则 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，

故椭圆的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$·

【小问 2 详解】

选①作为已知：

当直线斜率不存在时，$l:x=1$ 与椭圆交点为 $(1,\pm\dfrac{3}{2})$，此时 $4|AB|=12\neq 15$，不合题意，

当直线斜率存在时，设 $l:y=kx-k$，联立 $\begin{cases}l:y=kx-k\\ C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，有：$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

$\Delta=(-8k^2)^2-4(4k^2+3)(4k^2-12)=16\cdot 9(k^2+1)$，

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{12\sqrt{k^2+1}}{4k^2+3}=12\cdot\dfrac{k^2+1}{4k^2+3}$，

令 $|AB|=\dfrac{15}{4}$，则有：$\dfrac{15}{4}=12\cdot\dfrac{k^2+1}{4k^2+3}\Rightarrow 20k^2+15=16k^2+16$，

解得 $k^2=\dfrac{1}{4}$，

选②作为已知：

依题意，$k=\pm\dfrac{1}{2}$，则直线 $l:y=\pm\dfrac{1}{2}(x-1)$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

联立$\begin{cases} y=\pm\dfrac{1}{2}(x-1) \\ C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，有$4x^2-2x-11=0$，

$\Delta=(-2)^2-4\times4\times(-11)=180$，

则$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}\cdot\dfrac{\sqrt{180}}{4}=\dfrac{15}{4}$，

即$4|AB|=15$

20. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

（3）存 点M，此时$\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{PM}{PD}=1$

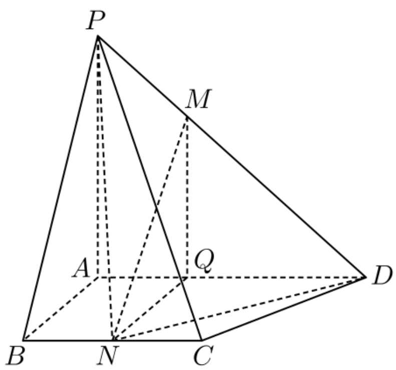
【解析】

【分析】（1）构造平面MNQ与平面PAB平行，从而得到直线$MN//$平面PAB；

（2）建立空间直角坐标系，利用空间向量计算二面角的余弦值；

（3）假设存在点M，设点M的坐标，由已知建立等式，求解所设，若无解则点M不存在，若有解，则点M存在，解即为点M的坐标，再代入求原式即可.

【小问1详解】



如图所示，在线段AD上取一点Q，使$AQ=\dfrac{1}{3}AD$，连接MQ，NQ，

$\because DM=2MP$，

$\therefore QM//AP$，

$\because AP\subset$平面PAB

$\therefore QM//$平面PAB

又$AD=3$，$AB=BC=2$，

$\therefore AQ\underset{=}{//}BN$，四边形$ABNQ$为平行四边形，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore NQ // AB$，

$\because AB \subset$ 平面 PAB

$\therefore NQ //$ 平面 PAB

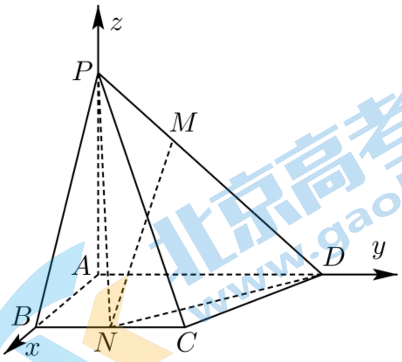
又 $NQ \cap MQ = Q$，

所以平面 $MNQ //$ 平面 PAB，

$\because MN \subset$ 平面 MNQ，

$\therefore MN //$ 平面 PAB；

【小问 2 详解】



如图所示，以点 A 为坐标原点，以 AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，AP 为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，

又 N 是 BC 中点，则 $N(2,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{DN}=(2,-2,0)$，

设平面 PCD 的法向量 $\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}_1=3y_1-3z_1=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}_1=-2x_1+y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $\vec{n}_1=(1,2,2)$，

设平面 PND 的法向量 $\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}_2=3y_2-3z_2=0\\ \overrightarrow{DN}\cdot\vec{n}_2=2x_2-2y_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $\vec{n}_2=(1,1,1)$，

所以 $\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\dfrac{1+2+2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，

【小问 3 详解】

存在，$\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{PM}{PD}=1$

假设存在点 M，设 $\dfrac{PM}{PD}=\lambda$，即 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$，$\lambda\in[0,1]$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

由（2）得 $D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，$N(2,1,0)$，且平面 PCD 的法向量 $\vec{n_1}=(1,2,2)$，

则 $\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{PM}=(0,3\lambda,-3\lambda)$，

则 $M(0,3\lambda,3-3\lambda)$，

$\overrightarrow{MN}=(2,1-3\lambda,3\lambda-3)$，

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{MN},\vec{n_1}\right\rangle\right|=\left|\frac{2+2(1-3\lambda)+2(3\lambda-3)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(1-3\lambda)^2+(3\lambda-3)^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=1$，

故存在点 M，此时 $\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{PM}{PD}=1$.

21. 【答案】（1）$\overrightarrow{X_4}=(1,1,0),\overrightarrow{X_5}=(0,1,1),\overrightarrow{X_6}=(1,0,1),\overrightarrow{X_7}=(1,1,0)$；

（2）证明见解析； （3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据已知条件，结合 $\overrightarrow{X_{i+1}}=(a_{i+1},b_{i+1},c_{i+1})$ 的定义，直接写出即可；

（2）假设 a_i,b_i,c_i 三个数中有 2 个数为 0，或三个数均为 0，利用反证法，结合题意，推出矛盾即可证明；

（3）设 a_i,b_i,c_i 三个数中最大的为 m_i，结合（2）中所证，分类讨论，即可证明.

【小问 1 详解】

根据题意，$\overrightarrow{X_1}=(3,1,4),\overrightarrow{X_2}=(2,3,1),\overrightarrow{X_3}=(1,2,1)$，

$\overrightarrow{X_4}=(1,1,0),\overrightarrow{X_5}=(0,1,1),\overrightarrow{X_6}=(1,0,1),\overrightarrow{X_7}=(1,1,0)$.

【小问 2 详解】

假设 a_i,b_i,c_i 三个数中有 2 个数为 0，或三个数均为 0.

不妨设 $a_i=b_i=0(i\ge1),c_i\ne0$，

则 $a_i=|a_{i-1}-b_{i-1}|=0,b_i=|b_{i-1}-c_{i-1}|=0$，即 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}$，

这与 $c_i=|c_{i-1}-a_{i-1}|\ne0$ 矛盾；

当 a_i,b_i,c_i 三个数均为 0 时，显然 $i\ge1$，

则 $a_i=|a_{i-1}-b_{i-1}|=0,b_i=|b_{i-1}-c_{i-1}|=0,c_i=|c_{i-1}-a_{i-1}|=0$，

所以 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=w$（定值），

由 a_0,b_0,c_0 三个数互不相等，得 $i\ge2$，

且 $a_{i-1}=|a_{i-2}-b_{i-2}|=w,b_{i-1}=|b_{i-2}-c_{i-2}|=w$，$c_{i-1}=|c_{i-2}-a_{i-2}|=w$.

不妨设 $a_{i-2}\le b_{i-2}\le c_{i-2}$，则有 $b_{i-2}-a_{i-2}=w,c_{i-2}-b_{i-2}=w,c_{i-2}-a_{i-2}=w,$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

由 $(b_{i-2}-a_{i-2})+(c_{i-2}-b_{i-2})=c_{i-2}-a_{i-2}$，得 $2w=w$，

所以 $w=0$，即 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=0$.

以此类推得 $a_{i-2}=b_{i-2}=c_{i-2}=0,a_{i-3}=b_{i-3}=c_{i-3}=0,\cdots,a_1=b_1=c_1=0,a_0=b_0=c_0=0$,

这与 a_0,b_0,c_0 三个数互不相等矛盾，

所以对于任意的 $i\in\mathrm{N},a_i,b_i,c_i$ 三个数中至多有一个为 0.

【小问 3 详解】

设 a_i,b_i,c_i 三个数中最大的为 m_i，记作 $m_i=\max\{a_i,b_i,c_i\}$.

因为 $a_{i+1}=|a_i-b_i|,b_{i+1}=|b_i-c_i|,c_{i+1}=|c_i-a_i|$，且 $a_i,b_i,c_i\in\mathrm{N}$,

所以 $m_{i+1}\le m_i$，其中 $i=0,1,2,3,\cdots$,

由题意可得 $m_i\in\mathrm{N}$，其中 $i=0,1,2,3,\cdots$

所以 $m_1,m_2,m_3,\cdots$ 不可能单调递减，即必存在某个 $k\in\mathrm{N}^*$，使得 $m_{k+1}=m_k$.

根据 $\overrightarrow{X_{k+1}}$ 的定义，可得向量 $\overrightarrow{X_k}=(a_k,b_k,c_k)$ 中的三个数 a_k,b_k,c_k 中必有 0.

由（2）知 a_k,b_k,c_k 中有且仅有一个为零，不妨设 $a_k=0$，

若 $b_k\ne c_k$，由题意，不妨设 $0<b_k<c_k$，

则 $a_{k+1}=|a_k-b_k|=b_k,b_{k+1}=|b_k-c_k|=c_k-b_k,c_{k+1}=|c_k-a_k|=c_k,m_{k+1}=m_k=c_k$，

所以 $a_{k+2}=|a_{k+1}-b_{k+1}|<\max\{b_k,c_k-b_k\}<m_{k+1}$，同理 $b_{k+2}<m_{k+1},c_{k+2}<m_{k+1}$,

所以 $m_{k+2}<m_{k+1}$.

又因为 $m_i\in\mathrm{N}$,

所以此种情形不可能一直出现（至多出现 m_{k+1} 次）.

所以一定能找到某个 $j\in\mathrm{N}^*$，使得 $b_j=c_j$.

若 $b_k=c_k$，由题意可得：

$\overrightarrow{X_k}=(0,b_k,b_k),\overrightarrow{X_{k+1}}=(b_k,0,b_k),\overrightarrow{X_{k+2}}=(b_k,b_k,0),\overrightarrow{X_{k+3}}=(0,b_k,b_k),\cdots$.

所以存在正整数 $t=k$，使得 $\overrightarrow{X_t}=\overrightarrow{X_{t+3}}$.

综上，存在正整数 t，使得 $\overrightarrow{X_t}=\overrightarrow{X_{t+3}}$.

【点睛】关键点点睛：本题考查新定义问题，处理问题的关键是要充分把握新定义的内核，以及熟练的使用证明方法，属综合困难题.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。