

高三数学考试卷参考答案

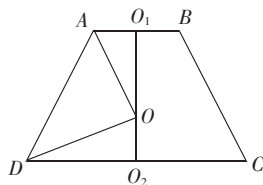
1. C $(1+i)(2+i)=1+3i$, 虚部为 3.
 2. D 因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 所以 $a=1, a=2$ 或 $a=2a-2$. 当 $a=1$ 时, $2a-2=0$, 集合 B 中的元素满足互异性, 符合条件. 当 $a=2$ 时, $2a-2=2$, 集合 B 的元素不满足互异性, 不符合条件. 当 $a=2a-2$ 时, $a=2, 2a-2=2$, 集合 B 的元素不满足互异性, 不符合条件.

3. A 若曲线 $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{4-k} = 1$ 表示双曲线, 则 $(k-2)(4-k) < 0$, 解得 $k > 4$ 或 $k < 2$. 故“ $k > 4$ ”是“曲线 $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{4-k} = 1$ 表示双曲线”的充分不必要条件.

4. D $f'(x) = (2x+2m)e^{x^2+2mx}$, 因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(2) = (4+2m)e^{4+4m} = 0$, 解得 $m = -2$. 经检验, 知当 $m = -2$ 时, $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f(2) = e^{-4}$.

5. C 设 $a_2 = x$, 则 $a_1 = 2x, a_3 = 3x, a_4 = 4x, a_5 = 7x, a_6 = 11x$, 则 $S_6 = 28x = 28$, 即 $x = 1$, 则 $a_7 = 18, a_8 = 29, a_9 = 47, a_{10} = 76$.

6. B 如图, 灯罩的轴截面为等腰梯形 $ABCD$, 其中 O_1, O_2 分别是灯罩上、下底面圆的圆心, O 是灯罩外接球的球心, 则 $AB = 10$ cm, $CD = 24$ cm, $O_1O_2 = 17$ cm, 设 $OO_1 = x$ cm, 则 $5^2 + x^2 = 12^2 + (17-x)^2$, 解得 $x = 12$, 则灯罩外接球的半径 $R = 13$ cm, 体积 $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8788\pi}{3}$ cm³.



7. B 设 $M(x, y)$, 由 $|MA| = 2|MO|$, 可得 $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, 整理得 $x^2 + (y+1)^2 = 4$, 则直线 $l: y = kx + 3$ 与圆 $x^2 + (y+1)^2 = 4$ 有公共点, 则 $\frac{|3 - (-1)|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 2$, 即 $k^2 \geq 3$, 解得 $k \leq -\sqrt{3}$ 或 $k \geq \sqrt{3}$.

8. A $3^a = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, 则 $a > -1$, $7^b = \frac{1}{5} > \frac{1}{7}$, 则 $b > -1$. 因为 $3^a = \frac{1}{2}$, 所以 $a = -\log_3 2$, 因为 $7^b = \frac{1}{5}$, 所以 $b = -\log_7 5$. 又 $\log_3 2 = \log_{27} 8 < \log_{27} 9 = \frac{2}{3}$, $\log_7 5 = \log_{7^3} 125 > \log_{7^3} 49 = \frac{2}{3}$, 所以 $-\log_3 2 > -\log_7 5$, 故 $a > b > -1$.

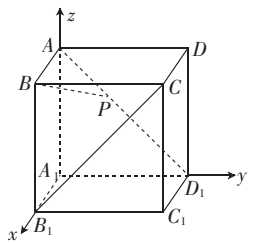
9. ABD 由图可知, 2013年至2022年人均国内生产总值逐年递增, A正确. 2013年至2022年人均国内生产总值的极差为 $85698 - 43497 = 42201$, B正确. 因为 $10 \times 80\% = 8$, 所以这10年的人均国内生产总值的80%分位数是 $\frac{71828 + 81370}{2} = 76599$, C不正确. 由图中数据分析可知, 这10年的人均国内生产总值的平均数不小于59592, D正确.

10. BC $f(x) - 1 = \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$, 令函数 $g(x) = \ln x - x + 1$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{x}$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减. 故 $g(x)_{\max} = g(1) = 0$. 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{\ln x - x + 1}{x - 1} > 0$, 即 $f(x) > 1$; 当 $x > 1$ 时, $\frac{\ln x - x + 1}{x - 1} < 0$, 即 $f(x) < 1$.

故选 BC.

11. BCD $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x = \sqrt{1+a^2} \sin(2x + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = a$. 因为 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(-\frac{\pi}{12})$, 所以 $2 \times (-\frac{\pi}{12}) + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \tan \varphi = a = -\sqrt{3}$, $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $-\frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$, $f(x)$ 不单调, A 不正确. 当 $x = \frac{5\pi}{3}$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} = 3\pi$, 故 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{3}, 0)$ 对称, B 正确. $f(x + \frac{5\pi}{12}) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos 2x$, 所以将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象, C 正确. $f(\alpha) = 2\sin(2\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{6}{5}$, 则 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{5}$. 因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $2\alpha - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. 由 $\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $2\alpha - \frac{\pi}{3} \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{4}{5}$. $\sin 2\alpha = \sin[(2\alpha - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}] = \sin(2\alpha - \frac{\pi}{3})\cos \frac{\pi}{3} + \cos(2\alpha - \frac{\pi}{3})\sin \frac{\pi}{3} = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$, D 正确.

12. ABD 对于 A 选项, 在 AB 上取点 H (图略), 使得 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 在 CD 上取点 K, 使得 $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, 则由 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD}$, 得 $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AD}$, 即 $\overrightarrow{HP} = \lambda\overrightarrow{AD}$, 故 P 是线段 HK 上一点. 将平面 HKC_1B_1 沿 HK 展开至与平面 AHKD 共面, 此时 $AB_1 = AH + B_1H = 3$, 当 B_1, P, D 三点共线时, $B_1P + PD$ 取得最小值 $\sqrt{13}$, A 正确. 对于 B 选项, 由 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AD} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 可知 P 是线段 BD 上一点. 连接 AC 并与 BD 交于点 Z (图略). 当 P 与 D 重合时, 平面 PAD_1 与平面 ADD_1A_1 重合, 不符合题意. 当 P 在线段 DZ (不含点 D) 上时, 平面 PAD_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面为三角形, 且当 P 与 Z 重合时, 截面面积最大, 最大值为 $2\sqrt{3}$. 当 P 在线段 BZ (不含点 B, Z) 上时, 延长 AP 并与 BC 交于点 W, 作 $WR \parallel AD_1$ 并与 CC_1 交于点 R (图略), 则截面为等腰梯形 $AWRD_1$, 设 $BW = x$, 则 $AW = D_1R = \sqrt{4+x^2}$, $WR = \sqrt{2}(2-x)$. 梯形 $AWRD_1$ 的高 $h = \sqrt{AW^2 - \frac{(AD_1 - WR)^2}{4}} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}x^2}$, 面积为 $\frac{1}{2}(AD_1 + WR) \cdot h = \frac{(4-x)\sqrt{8+x^2}}{2} < 4\sqrt{2}$. 当 P 与 B 重合时, 截面为矩形 ABC_1D_1 , 面积为 $4\sqrt{2}$. 故平面 PAD_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面面积的最大值为 $4\sqrt{2}$, B 正确. 对于 C 选项, 因为 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1}$, 所以 P 为 AD_1 的中点, 三棱锥 $P-ABC$ 的表面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} + \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, C 不正确. 对于 D 选项, 以 A_1 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C_1(2, 2, 0), D(0, 2, 2)$,



$B(2,0,2), P(0,2\lambda,2-2\lambda)$, 则 $\overrightarrow{C_1D} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{BP} = (-2, 2\lambda, -2\lambda)$, $\cos \langle \overrightarrow{C_1D}, \overrightarrow{BP} \rangle = \frac{\overrightarrow{C_1D} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{C_1D}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{4-4\lambda}{4\sqrt{4\lambda^2+2}} = \frac{1-\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+2}}$. 因为 $0 \leq \lambda \leq 1$, 所以 $0 \leq \frac{1-\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以直线 C_1D 与 BP 所成角的最小值为 45° , D 正确.

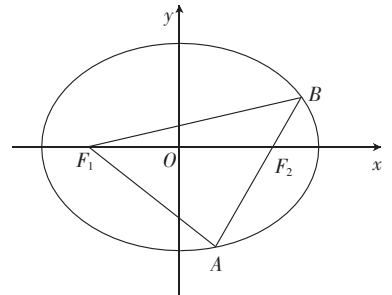
13. 16 由题可知, 男生、女生都有人被选中的选法共有 $C_2^2 C_1^1 + C_2^1 C_1^2 = 16$ 种.

14. $\frac{2\pi}{3}$ 或 120° 因为 $(a+b) \perp a$, 所以 $(a+b) \cdot a = 0$, 则 $a \cdot b = -a^2$. $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{-|a|^2}{2|a|^2} = -\frac{1}{2}$, 则 a 与 b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

15. -1 因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(x) + f(4-x) = 0$, 所以 $f(x) = -f(4-x) = -f(x-4) = f(x-8)$, 故 $f(x)$ 是以 8 为周期的函数, 则 $f(2024) = f(0)$. 令 $x=2$, 则 $f(2) + f(4-2) = 2f(2) = 8a + 8 = 0$, 则 $a = -1$, 所以 $f(0) = -2^0 = -1$, 即 $f(2024) = -1$.

16. $\frac{2}{3}$ 如图, 由 $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\triangle BF_1F_2$ 面积的 2 倍, 可得

$|AF_2| = 2|BF_2|$, 不妨设 $|AF_2| = 2x, |BF_2| = x, |F_1F_2| = 2c$, 则 $|AF_1| = 2a - 2x, |BF_1| = 2a - x$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由 $|AF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |AF_1|^2 = 2|AF_2| |F_1F_2| \cos 60^\circ$, 得 $4x^2 + 4c^2 - (2a - 2x)^2 = 4cx$, 整理得 $4c^2 - 4a^2 + 8ax - 4cx = 0$. 在 $\triangle BF_1F_2$ 中, 由 $|BF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |BF_1|^2 = 2|BF_2| |F_1F_2| \cos 120^\circ$, 得 $x^2 + 4c^2 - (2a - x)^2 = -2cx$, 整理得 $4c^2 - 4a^2 + 4ax + 2cx = 0$, 则 $x = \frac{3a^2 - 3c^2}{4a}$, 整理得 $c^2 - a^2 + \frac{3c(a^2 - c^2)}{2a} = 0$, 即 $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. 故 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$.



17. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$ 1 分

由 $a_1 + a_3 = 34, a_3 + a_5 = 544$, 得 $34q^2 = 544$, 解得 $q = 4$ 2 分

$a_1 + a_3 = 17a_1 = 34$, 则 $a_1 = 2$, 3 分

故 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $b_n = \log_2 a_n = 2n - 1$, 7 分

则 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 8 分

故 $S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = n^2$ 10 分

18. (1) 证明: 取 AD 的中点 F , 连接 EF, PF, BD , 因为 $\triangle PAD$ 是正三角形, 所以 $PF \perp AD$ 1 分

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 所以 $PF \perp$ 平面 $ABCD$ 2 分

因为 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PF \perp AC$ 3 分

因为 E 是 AB 的中点, 所以 $EF \parallel BD$. 又底面 $ABCD$ 是菱形, 所以 $BD \perp AC$, 从而 $EF \perp AC$ 4 分

因为 $PF \cap EF = F$, 所以 $AC \perp$ 平面 PEF 5分

因为 $PE \subset$ 平面 PEF , 所以 $AC \perp PE$ 6分

(2)解: 连接 BF , 因为 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABD$ 是正三角形, 所以 $BF \perp AD$ 7分

以 F 为坐标原点, FA, FB, FP 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

令 $AB=2$, 则 $C(-2, \sqrt{3}, 0), E(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$,

则 $\vec{CE} = (\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \vec{CP} = (2, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 8分

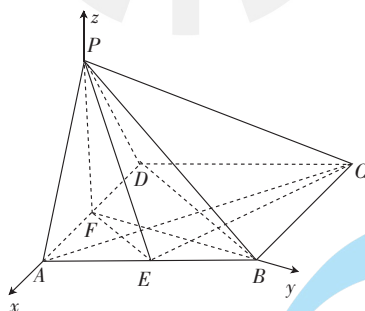
设平面 CEP 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_0, y_0, z_0)$, 则 $\begin{cases} \vec{CE} \cdot \mathbf{m} = \frac{5}{2}x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_0 = 0, \\ \vec{CP} \cdot \mathbf{m} = 2x_0 - \sqrt{3}y_0 + \sqrt{3}z_0 = 0, \end{cases}$

令 $x_0 = \sqrt{3}$, 得 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 5, 3)$ 9分

由题可知, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 是平面 ACE 的一个法向量. 10分

$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{37}} = \frac{3\sqrt{37}}{37}$, 11分

由图可知, 二面角 $A-CE-P$ 为锐角, 则二面角 $A-CE-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{37}}{37}$ 12分



19. 解: (1) 因为 $\frac{a \cos B - b \cos A}{a \cos B + b \cos A} = \frac{b+c}{c}$, 所以 $\frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\sin A \cos B + \sin B \cos A} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin C}$ 1分

又 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 2分

所以 $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin B + \sin A \cos B + \sin B \cos A$, 3分

整理得 $\sin B(2 \cos A + 1) = 0$ 4分

因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $2 \cos A + 1 = 0$, 即 $\cos A = -\frac{1}{2}$ 5分

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 6分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \sqrt{3}$, 则 $bc = 4$ 7分

设边 BC 的中点为 D , 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 且 $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 8分

则 $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2) = 1$, 9分

则 $b^2 + c^2 + 2bccos\angle BAC = b^2 + c^2 - bc = 4$, 则 $b^2 + c^2 = 4 + bc = 8$ 10分

在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\angle BAC = b^2 + c^2 + bc = 12$, 则 $a = 2\sqrt{3}$ 12分

20. 解: (1) 由题可知, 星期三禁止出车的车辆为 E , 可以出车的车辆为 A, B, C, D , 1分

则星期三该公司恰有两辆车出车的概率 $P = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$.
..... 4分

(2) 由题可知, 星期一禁止出车的车辆为 A , 可以出车的车辆为 B, C, D, E .

记星期一该公司出车的数量为 X , 则 X 的取值可能为 $0, 1, 2, 3, 4$ 5分

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{36},$$

$$P(X=3) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}, P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36}. \dots\dots$$

..... 9分
故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

..... 10分

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{13}{36} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{3}. \dots\dots 12分$$

21. 解: (1) 由题可知 $\begin{cases} 36 = 2px_0, \\ x_0 + \frac{p}{2} = 10, \end{cases}$ 2分

解得 $\begin{cases} x_0 = 9, \\ p = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = 1, \\ p = 18 \end{cases}$ (舍去). 3分

故抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 4分

(2) 设 l_1 的方程为 $x = my + a, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + a, \end{cases}$ 整理得 $y^2 - 4my - 4a = 0$,

则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4a$ 6分

$$|PQ| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 4\sqrt{(1+m^2)(m^2 + a)}, \dots\dots 7分$$

$|NP| = \sqrt{1+m^2} |y_1|, |NQ| = \sqrt{1+m^2} |y_2|$, 则 $|NP| |NQ| = (1+m^2) |y_1 y_2| = 4a(1+m^2)$.

..... 8分

由 $|NP| \cdot |NQ| = |PQ|$, 得 $4a(1+m^2) = 4\sqrt{(1+m^2)(m^2+a)}$, 9分

整理得 $(a-1)(am^2+m^2+a) = 0$ 11分

因为 $am^2+m^2+a > 0$, 所以 $a-1=0$, 即 $a=1$ 12分

22. 解: (1) 因为 $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}$, 所以 $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \cos x - 1}{x^2}$, 1分

则 $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$ 2分

又 $f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{2}{\pi}$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y - (1 + \frac{2}{\pi}) = -\frac{4}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})$,

即 $4x + \pi^2 y - \pi^2 - 4\pi = 0$ 5分

(2) $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点, 等价于方程 $a = \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个实数根. 6分

令函数 $h(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^2}, 0 < x < \pi$, 则 $h'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{x(x \cos x - \sin x) - 2}{x^3}$.

..... 7分

令函数 $\varphi(x) = x \cos x - \sin x$, 则 $\varphi'(x) = -x \sin x < 0$ 在 $(0, \pi)$ 上恒成立, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减. 8分

故当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$, 9分

从而 $h'(x) < 0$ 在 $(0, \pi)$ 上恒成立, 则 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减. 10分

显然, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 因为 $h(\pi) = \frac{1}{\pi^2}$, 所以 $h(x)$ 的值域为 $(\frac{1}{\pi^2}, +\infty)$,

故 a 的取值范围为 $(\frac{1}{\pi^2}, +\infty)$ 12分