2023 北京中关村中学高二（上）期中

数　　学

2023.11

本试卷共 6 页，150 分，考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

第一部分基础应用

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知 $\vec{a}=(x,1,3)$，$\vec{b}=(1,3,9)$，如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为共线向量，则 $x=$（　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

2. 已知集合 $A=\{y|\ y=e^x\}$，集合 $B=\{x|\ y=\ln(x-1)\}$，则 $A\cup B=$（　）

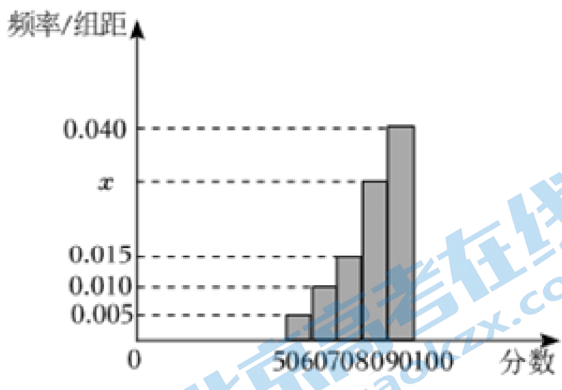
A. R　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

3. 已知直线 m 和两个不同的平面 α,β，则下列四个命题中正确的是（　）

A. 若 $\alpha\perp\beta,m\subset\beta$，则 $m\perp\alpha$　　B. 若 $\alpha//\beta,m//\alpha$，则 $m//\beta$

C. 若 $m//\alpha,m//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　D. 若 $\alpha//\beta,m\perp\alpha$，则 $m\perp\beta$

4. 某校组织全体学生参加了主题为“建党百年，薪火相传”的知识竞赛，随机抽取了 200 名学生进行成绩统计、发现抽取的学生的成绩都在 50 分至 100 分之间，进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），画出频率分布直方图如图所示，在被抽取的学生中，成绩在区间 $[80,90)$ 的学生数是（　）



A. 30　　B. 45　　C. 60　　D. 100

5. 已知两条异面直线的方向向量分别是 $\vec{u}=(3,-1,2),\vec{v}=(-1,3,2)$，则这两条直线所成的角 θ 满足（　）

A. $\sin\theta=\frac{1}{7}$　　B. $\cos\theta=\frac{1}{7}$　　C. $\sin\theta=-\frac{1}{7}$　　D. $\cos\theta=-\frac{1}{7}$

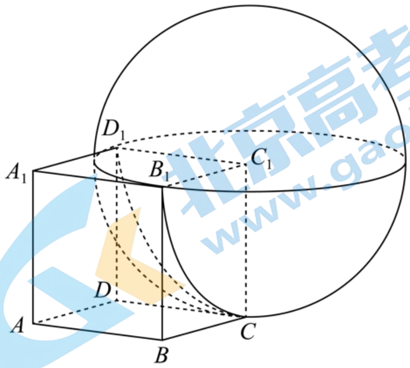
6. 已知平面$\alpha=\left\{P\middle|\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0\right\}$，其中$P_0\left(1,1,1\right)$，法向量$\vec{n}=\left(-1,1,2\right)$，则下列各点中不在平面$\alpha$内的是（ ）

A. $\left(2,0,1\right)$　　B. $\left(2,0,2\right)$　　C. $\left(-1,1,0\right)$　　D. $\left(0,2,0\right)$

7. 在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M是线段B_1D_1上一点，则点M到平面A_1BD的距离是（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. 如图，将半径为 1 的球与棱长为 1 的正方体组合在一起，使正方体的一个顶点正好是球的球心，则这个组合体的体积为（ ）



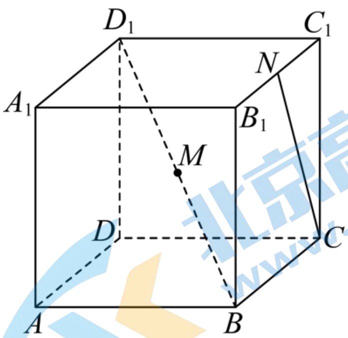
A. $\frac{7}{6}\pi+1$　　B. $\frac{7}{6}\pi+\frac{5}{6}$　　C. $\frac{7}{8}\pi+1$　　D. $\pi+1$

9. 已知函数$f(x)=2\sin\omega x$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上的最小值为$-2$，则$\omega$的取值范围是（ ）

A. $\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right]\cup[6,+\infty)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

10. 在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N分别为BD_1,B_1C_1的中点，点P在正方体的表面上运动，且满足$MP\perp CN$，则下列说法正确的是（ ）



A. 点P可以是棱BB_1的中点　　B. 线段MP的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 点 P 的轨迹是正方形　　　　　　　　　　D. 点 P 轨迹的长度为 $2+\sqrt{5}$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

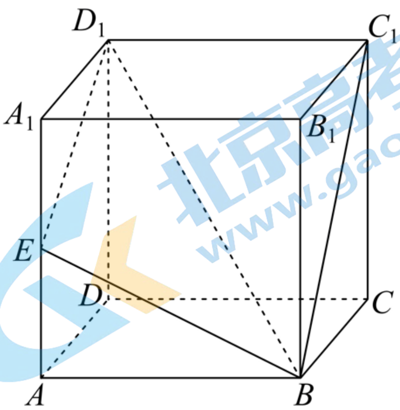
11. 复数 $z=1+2i$ 的虚部是______，复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点在第______象限

12. 若向量 $\vec{a}=(1,2,2)$，$\vec{b}=(3,1,-1)$，$\vec{c}=(-1,3,m)$，且 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面，则 $m=$______.

13. 若圆锥底面半径为 1，高为 2，则圆锥的侧面积为______.

14. 已知在空间直角坐标系 $O-xyz$（O 为坐标原点）中，点 $A(1,1,-1)$，点 $B(1,-1,1)$，则 z 轴与平面 OAB 所成的线面角大小为______.

15. 如图，在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 AA_1 上的一个动点，给出下列四个结论：



①三棱锥 B_1-BED_1 的体积为定值；

②存在点 E，使得 $B_1D\perp$ 平面 BED_1；

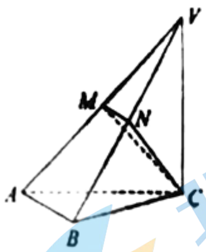
③对每一个点 E，在棱 DC 上总存在一点 P，使得 $AP//$ 平面 BED_1；

④ M 是线段 BC_1 上的一个动点，过点 A_1 的截面 α 垂直于 DM，则截面 α 的面积的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

其中所有正确结论的序号是____________.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 40 分.

16. 如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中，平面 $VAC\perp$ 平面 $ABC,\angle VCA=90^\circ$，M,N 分别为 VA,VB 的中点.



（1）求证：$AB//$ 平面 CMN；

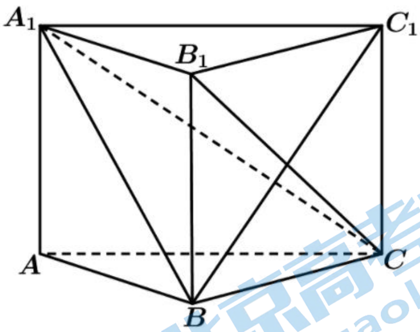
（2）求证：$AB\perp VC$.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=a\sin 2x+2\cos^2 x$，且满足 $f\left(x\right)$ 的图象过点 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式及最小正周期；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{12},m\right]$ 上的最大值为 3，求实数 m 的取值范围.

18. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 $ABC, AB\perp BC, AA_1=AB=BC=2$.



（1）求证：$BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C；

（2）求二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的余弦值；

（3）点 M 在线段 B_1C 上，且 $\dfrac{B_1M}{B_1C}=\dfrac{1}{3}$，点 N 在线段 A_1B 上，若 MN // 平面 A_1ACC_1，求 $\dfrac{A_1N}{A_1B}$ 的值.

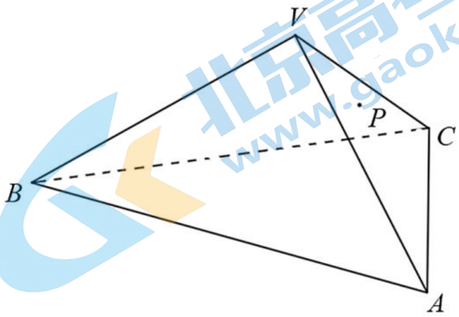
第二部分综合应用

四、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

19. 袋中装有 3 只黄色、2 只白色的乒乓球（其体积、质地完全相同），从袋中随机摸出 3 个球，摸出的 3 个球为 2 个黄球 1 个白球的概率是______.

20. 声音的等级 $f\left(x\right)$（单位：dB）与声音强度 x（单位：$\mathrm{W/m^2}$）满足 $f\left(x\right)=10\times\lg\dfrac{x}{1\times10^{-12}}$.喷气式飞机起飞时，声音的等级约为 140dB；一般说话时，声音的等级约为 60dB，那么喷气式飞机起飞时声音强度约为一般说话时声音强度的______倍.

21. 在通用技术教室里有一个三棱锥木块如图所示，VA，VB，VC 两两垂直，$VA=VB=VC=1$（单位：dm），小明同学计划通过侧面 VAC 内任意一点 P 将木块锯开，使截面平行于直线 VB 和 AC，则该截面面积（单位：$\mathrm{dm^2}$）的最大值是________.



22. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2 x-a, x\ge 1\\ 5\left(x-a\right)\left(x-3a\right), x<1\end{cases}$.

①若 $a=1$，则 $f\left(x\right)$ 的最小值为______；

②若 $f\left(x\right)$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是______.

五、解答题：本大题共 2 小题，共 25 分.

23. 在 $\triangle ABC$ 中，$b\sin 2A=\sqrt{3}a\sin B$.

（1）求 $\angle A$；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 a 的值.

条件①：$\sin C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$；条件②：$\dfrac{b}{c}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$；条件③：$\cos C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第(2)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

24. 给定正整数 $n\ge 2$，设集合 $M=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合 M 中的任意元素 $\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记 $\beta\cdot\gamma=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 设 $A\subseteq M$，且集合 $A=\{\alpha_i|\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in}),i=1,2,\cdots,n\}$，对于 A 中任意元素 α_i,α_j，若 $\alpha_i\cdot\alpha_j=\begin{cases}p, & i=j,\\ 1, & i\ne j,\end{cases}$ 则称 A 具有性质 $T(n,p)$.

（1）判断集合 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ 是否具有性质 $T(3,2)$？说明理由；

（2）判断是否存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A，并加以证明；

（3）若集合 A 具有性质 $T(n,p)$，证明：$t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p\ (j=1,2,\cdots,n)$.

参考答案

第一部分基础应用

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】C

【分析】由 $\vec{a}=\lambda\vec{b}\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$ 可构造方程求得结果.

【详解】$\because\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为共线向量，$\therefore\vec{a}=\lambda\vec{b}\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$，则 $\begin{cases}x=\lambda\\1=3\lambda\\3=9\lambda\end{cases}$，解得：$x=\lambda=\dfrac{1}{3}$.

故选：C.

2.【答案】C

【分析】化简集合 A,B，根据并集运算求解.

【详解】因为 $A=\left\{y\middle|\ y=\mathrm{e}^{x}\right\}=(0,+\infty)$，$B=\left\{x\middle|\ y=\ln\left(x-1\right)\right\}=\left\{x\,|\,x-1>0\right\}=(1,+\infty)$，

所以 $A\cup B=(0,+\infty)$.

故选：C

3.【答案】D

【分析】由直线与平面，平面与平面的位置关系判断即可.

【详解】对于 A 选项，若 $\alpha\perp\beta,m\subset\beta$，则 m 可能与 α 平行，故 A 错误；

对于 B 选项，若 $\alpha//\beta,m//\alpha$，则 m 可能与 β 平行或者在平面 β 内，故 B 错误；

对于 C 选项，若 $m//\alpha,m//\beta$，则 α,β 可能平行或者相交，则 C 错误；

对于 D 选项，由面面平行以及线面垂直的性质可知，D 正确；

故选：D

【点睛】本题主要考查了直线与平面，平面与平面的位置关系，属于基础题.

4.【答案】C

【分析】由频率之和为 1 先求出 x，再由成绩在 $[80,90)$ 的频率可求成绩在该区间的学生数.

【详解】由题意得，$10\times(0.005+0.01+0.015+x+0.04)=1$，

解得 $x=0.03$，则学生成绩在区间 $[80,90)$ 的频率为 $10\times0.03=0.3$，

由共抽取 200 名学生，则成绩在区间 $[80,90)$ 的学生数为 $200\times0.3=60$.

故选：C.

5.【答案】B

【分析】根据空间向量求异面直线的夹角的运算即可求出异面直线夹角的余弦值.

【详解】因为两条异面直线的方向向量分别是 $\vec{u}=\left(3,-1,2\right),\vec{v}=\left(-1,3,2\right)$，

所以 $\cos\theta=\left|\cos<\vec{u},\vec{v}>\right|=\dfrac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{\left|-3-3+4\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}=\dfrac{1}{7}$，

故选：B

6.【答案】A

【分析】根据向量垂直则向量数量积为 0，逐个代入验证即可.

【详解】若点在平面 α 内，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，

对于 A：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=(1,-1,0)\cdot(-1,1,2)=-2$，所以 A 选项的点不在平面 α 内；

对于 B：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=(1,-1,1)\cdot(-1,1,2)=0$，满足要求，所以在平面内；

对于 C：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=(-2,0,-1)\cdot(-1,1,2)=0$，满足要求，所以在平面内；

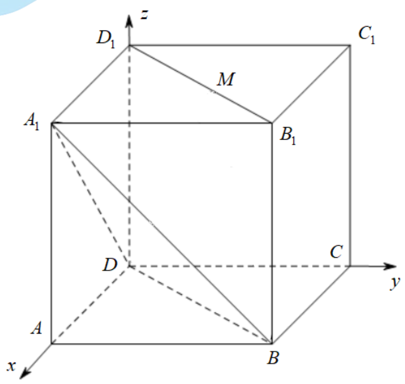
对于 D：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=(-1,1,-1)\cdot(-1,1,2)=0$，满足要求，所以在平面内，

故选：A

7.【答案】B

【分析】建立空间直角坐标系，求出平面 A_1BD 的法向量，利用空间向量法求解即可.

【详解】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中建立如图所示空间直角坐标系，



则 $A_1(1,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,0,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$，

设平面 A_1BD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=y-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=-x-z=0\end{cases}$，取 $x=1$ 可得平面 A_1BD 的一个法向量 $\vec{n}=(1,-1,-1)$，

因为 M 是线段 B_1D_1 上一点，设 $M(a,a,1)\left(0\le a\le\sqrt{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{MD}=(-a,-a,-1)$，

所以点 M 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{MD}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|-a+a+1\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：B

8. 【答案】A

【分析】该组合体可视作一个正方体和 $\frac{7}{8}$ 个球体的组合体，进而求出体积.

【详解】由题意，该组合体是一个正方体和 $\frac{7}{8}$ 个球体的组合体，其体积为 $1^3+\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3=1+\frac{7}{6}\pi$.

故选：A.

9. 【答案】D

【分析】分 $\omega>0,\omega<0$ 讨论，求出 ωx 的范围，根据 $-\frac{\pi}{2}$ 在范围内建立不等式求解即可.

【详解】当 $\omega>0$ 时，$-\frac{\pi}{3}\omega\le\omega x\le\frac{\pi}{4}\omega$，

由题意知，$-\frac{\pi}{3}\omega\le-\frac{\pi}{2}$，即 $\omega\ge\frac{3}{2}$，

当 $\omega<0$ 时，$\frac{\pi}{4}\omega\le\omega x\le-\frac{\pi}{3}\omega$，

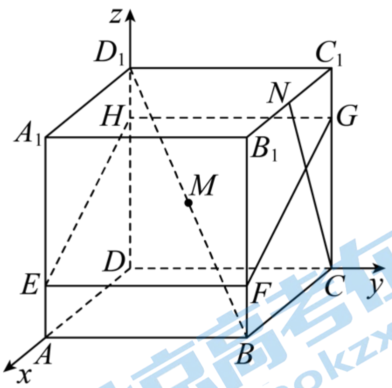
由题意知，$\frac{\pi}{4}\omega\le-\frac{\pi}{2}$，即 $\omega\le-2$，

$\therefore\omega$ 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，

故选：D

10. 【答案】D

【分析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以点 D 为坐标原点，分别以 DA、DC、DD_1 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，根据 $MP\perp CN$，确定点 P 的轨迹，在逐项判断，即可得出结果.

【详解】

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以点 D 为坐标原点，分别以 DA、DC、DD_1 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，

因为该正方体的棱长为1，M,N 分别为 BD_1,B_1C_1 的中点，

则 $D(0,0,0)$，$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$N\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，$C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{CN}=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，设 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{MP}=\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2},z-\frac{1}{2}\right)$，

因为 $MP\perp CN$，

所以 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+z-\frac{1}{2}=0$，$2x+4z-3=0$，当 $x=1$ 时，$z=\frac{1}{4}$；当 $x=0$ 时，$z=\frac{3}{4}$；

取 $E\left(1,0,\frac{1}{4}\right)$，$F\left(1,1,\frac{1}{4}\right)$，$G\left(0,1,\frac{3}{4}\right)$，$H\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$，

连接 EF，FG，GH，HE，则 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$，

所以四边形 $EFGH$ 为矩形，

则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CN}=0$，$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CN}=0$，即 $EF\perp CN$，$EH\perp CN$，

又 $EF\cap EH=E$，且 $EF\subset$ 平面 $EFGH$，$EH\subset$ 平面 $EFGH$，

所以 $CN\perp$ 平面 $EFGH$，

又 $\overrightarrow{EM}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，$\overrightarrow{MG}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，所以 M 为 EG 中点，则 $M\in$ 平面 $EFGH$，

所以，为使 $MP\perp CN$，必有点 $P\in$ 平面 $EFGH$，又点 P 在正方体的表面上运动，

所以点 P 的轨迹为四边形 $EFGH$，

因此点 P 不可能是棱 BB_1 的中点，即 A 错；

又 $|\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{GH}|=1$，$|\overrightarrow{EH}|=|\overrightarrow{FG}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $|\overrightarrow{EF}|\neq|\overrightarrow{EH}|$，则点 P 的轨迹不是正方形；

且矩形 $EFGH$ 的周长为 $2+2\times\frac{\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$，故 C 错，D 正确；

因为点 M 为 EG 中点，则点 M 为矩形 $EFGH$ 的对角线交点，所以点 M 到点 E 和点 G 的距离相等，且最大，所以线段 MP 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，故 B 错.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：求解本题的关键在于建立适当的空间直角坐标系，利用空间向量的方法，由 $MP\perp CN$，求出动点轨迹图形，即可求解.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】 ①. 2 ②. 四

【分析】由复数的实部与虚部的概念、共轭复数的概念、复数的几何意义可得.

【详解】复数 $z=1+2i$ 的虚部是 2，

$\bar{z}=1-2\mathrm{i}$，在复平面对应的点为$(1,-2)$在第四象限.

故答案为：2；四.

12.【答案】5

【分析】设$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，可得出关于$x$、$y$、$m$的方程组，即可解得$m$的值.

【详解】因为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面，设$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，其中$x$、$y\in\mathrm{R}$，

所以，$\begin{cases}x+3y=-1\\2x+y=3\\2x-y=m\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=-1\\m=5\end{cases}$.

故答案为：5.

13.【答案】$\sqrt{5}\pi$

【详解】试题分析：根据圆锥底面半径、高、母线长构成一个直角三角形，所以母线长l为$\sqrt{5}$，再根据圆锥的侧面积公式$S=\pi rl=\sqrt{5}\pi$. 圆锥的侧面积公式可结合圆锥展开图为扇形，由相应扇形面积公式理解记忆.

考点：圆锥的侧面积.

14.【答案】$\frac{\pi}{4}$##$45°$

【分析】先求出平面法向量，再求z轴与平面法向量夹角的余弦值，最后求线面角.

【详解】因为$O(0,0,0),A(1,1,-1),B(1,-1,1)$，

令平面OAB的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OA}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{OB}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}x+y-z=0\\x-y+z=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=z\end{cases}$，

令$y=z=1$，则$\vec{m}=(0,1,1)$，

又z轴的方向向量为$\vec{n}=(0,0,1)$，

设z轴与平面OAB的夹角为$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

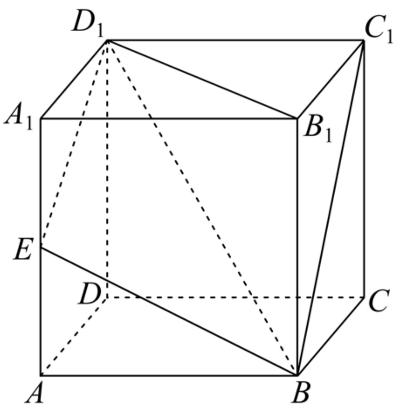
所以$\sin\theta=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$，

故答案为：$\frac{\pi}{4}$

15.【答案】①④

【分析】根据题意作图，并尝试特殊位置，进行检验证明.

【详解】对于①，如下图所示：



在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，易知 AA_1 // 平面 BB_1D_1，

因为点 E 是棱 AA_1 上的一个动点，可设点 E 到平面 BB_1D_1 的距离为 $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

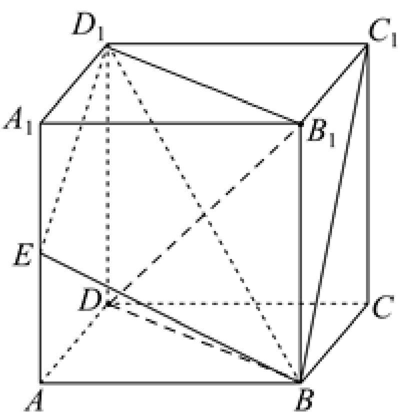
且 $S_{\triangle BB_1D_1}=\dfrac{1}{2}\cdot B_1D_1\cdot BB_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则三棱锥 B_1-BED_1 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle BB_1D_1}\cdot h=\dfrac{1}{6}$，

故①正确；

对于②，连接 B_1D，B_1D_1, BD，因为在平行四边形 B_1D_1DB 中，

$B_1D_1=\sqrt{2}, DD_1=1$，所以 B_1D 不垂直 BD_1，所以使得 B_1D 不垂直平面 BED_1，

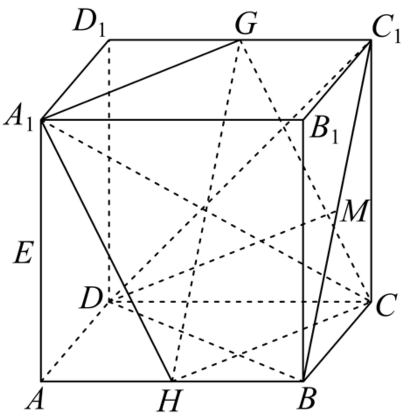
所以②不正确.



对于③，当点 E 与点 A 重合时，无论点 P 在何位置，直线 AP 与平面 BED_1 相交，

故③错误；

对于④，根据题意，作图如下：



因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，易知 $A_1C\perp$ 平面 BDC_1，所以 $A_1C\perp DM$，

设 $D_1G=x$，则 $A_1G=\sqrt{1+x^2}$，$CG=\sqrt{(1-x)^2+1}$，

在 $\triangle A_1GC$ 中，$\cos\angle A_1GC=\dfrac{1+x^2+x^2-2x+2-3}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^2-2x+2}}=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^2-2x+2}}$，

$\sin\angle A_1GC=\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^2-2x+2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^2-2x+2}}$，

则该截面面积 $S=A_1G\cdot CG\cdot\sin\angle A_1GC=\sqrt{2x^2-2x+2}=\sqrt{2}\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$，

由 $x\in[0,1]$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$S_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故④正确；

故答案为：①④.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 40 分.

16. 【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【分析】（1）证明 $MN//AB$，根据线面平行的判定定理即可得证；

（2）根据面面垂直的性质可得 $VC\perp$ 平面 ABC，从而可得 $VC\perp AB$.

【小问 1 详解】

因为 M，N 分别为的棱 VA，VB 的中点，

所以 $MN//AB$，

又 $MN\subset$ 平面 CMN，$AB\not\subset$ 平面 CMN，

所以 $AB//$ 平面 CMN；

【小问 2 详解】

由 $\angle VCA=90^\circ$ 知，$VC\perp AC$，

又因为平面 $VAC\perp$ 平面 ABC，平面 $VAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$VC\subset$ 平面 VAC，

所以$VC\perp$平面ABC，

又$AB\subset$平面ABC，所以$VC\perp AB$.

17.【答案】(1) $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$；最小正周期$\pi$；(2) $\left[\frac{\pi}{6},+\infty\right)$.

【分析】

(1) 由$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$列式求得$a$值，代入函数解析式，再由辅助角公式化简求得，函数的解析式，再利用最小正周期公式求解；

(2) 由(1)知$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，根据函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{12},m\right]$上的最大值为3，由$2m+\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}$求解.

【详解】(1) 由题意，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}a+2\times\frac{3}{4}=0$，

解得$a=\sqrt{3}$.

$\therefore f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x$，

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$，

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

$f\left(x\right)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

(2) $\because$函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{12},m\right]$上的最大值为3，

所以$2m+\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}$，解得$m\geq\frac{\pi}{6}$.

$\therefore$实数m的取值范围是$\left[\frac{\pi}{6},+\infty\right)$.

【点睛】本题主要考查三角函数的图象和性质以及三角恒等变换的应用，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

18.【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{2}{3}$

【分析】(1) 先证明$BC_1\perp B_1C$与$A_1B_1\perp BC_1$，由线面垂直的判定定理求证即可；

（2）以 B 为原点，BC 为 x 轴，BA 为 y 轴，BB_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，求出平面 B_1A_1C 的法向量与平面 ACC_1A_1 的法向量，利用向量法求二面角即可；

（3）由 $MN//$ 平面 A_1ACC_1，利用向量法 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0$，求出 $\dfrac{A_1N}{A_1B}$ 的值.

【小问 1 详解】

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，

由平面 $ABC//$ 平面 $A_1B_1C_1$

则 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1B_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$B_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

则 $BB_1\perp A_1B_1$，且 $BB_1\perp B_1C_1$，又 $A_1B_1\perp B_1C_1$，

$\because BB_1\cap B_1C_1=B_1$，

$\therefore A_1B_1\perp$ 平面 BBC_1B_1，

$\because BC_1\subset$ 平面 BBC_1B_1，$\therefore A_1B_1\perp BC_1$，

由 $BB_1=AA_1=BC$，则侧面 BB_1C_1C 为正方形，

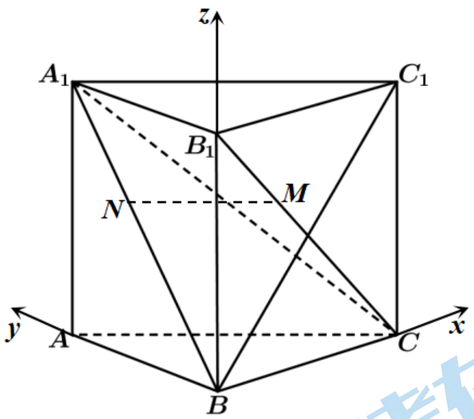
$\therefore BC_1\perp B_1C$，

$\because A_1B_1\cap B_1C=B_1$，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1C，$B_1C\subset$ 平面 A_1B_1C，

$\therefore BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C.

【小问 2 详解】

以 B 为原点，BC 为 x 轴，BA 为 y 轴，BB_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图，



$A(0,2,0)$ $C(2,0,0)$ $C_1(2,0,2)$，$B(0,0,0)$，$B_1(0,0,2)$，$A_1(0,2,2)$，

所以 $\overrightarrow{CA}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(2,0,-2)$，

设平面 ACC_1A_1 的法向量 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=-2x_1+2y_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=2z_1=0\end{cases}$，

取 $x_1=1$，得 $\vec{n}=(1,1,0)$，

设平面 B_1A_1C 的法向量 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}=2x_2-2z_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=2y_2=0\end{cases}$，

取 $x_2=1$，得 $\vec{m}=(1,0,1)$，

设二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的平面角为 θ，

则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

因为二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 为锐二面角，

故二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的余弦值为 $\frac{1}{2}$.

【小问 3 详解】

点 M 在线段 B_1C 上，且 $\dfrac{B_1M}{B_1C}=\dfrac{1}{3}$，点 N 在线段 A_1B 上，

设 $M(a,b,c)$，$N(x,y,z)$，

设 $\dfrac{A_1N}{A_1B}=\lambda$，则 $\overrightarrow{B_1C}=3\overrightarrow{B_1M}$，$\overrightarrow{A_1N}=\lambda\overrightarrow{A_1B}$，且 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

且 $\overrightarrow{A_1B}=(0,-2,-2)$，

即 $(2,0,-2)=3(a,b,c-2)$，$(x,y-2,z-2)=\lambda(0,-2,-2)$

解得 $M\left(\dfrac{2}{3},0,\dfrac{4}{3}\right)$，$N(0,2-2\lambda,2-2\lambda)$，

$\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{2}{3},2-2\lambda,\dfrac{2}{3}-2\lambda\right)$，

$\because MN//$ 平面 ACC_1A_1，且 $\vec{n}=(1,1,0)$

$\therefore \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=-\dfrac{2}{3}+2-2\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore \dfrac{A_1N}{A_1B}$ 的值为 $\dfrac{2}{3}$.

第二部分综合应用

四、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

19.【答案】$\dfrac{3}{5}$##0.6

【分析】列出摸取的全部基本事件，找到符合要求的基本事件，根据古典概型求解.

【详解】把 3 只黄色乒乓球标记为 A、B、C，2 只白色乒乓球标记为 1、2，

从 5 个球中随机摸出 3 个球的基本事件为：

ABC、$AB1$、$AB2$、$AC1$、$AC2$、$A12$、$BC1$、$BC2$、$B12$、$C12$，共 10 个，

其中 2 个黄球 1 个白球的基本事件为 $AB1$、$AB2$、$AC1$、$AC2$、$BC1$、$BC2$，共 6 个，

所以摸出的 3 个球为 2 个黄球 1 个白球的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$.

20.【答案】10^{8}

【分析】根据所给声音强度与声音的等级的函数关系求解.

【详解】由 $f(x)=10\times\lg\frac{x}{1\times10^{-12}}$，即 $y=10\times\lg\frac{x}{1\times10^{-12}}$，可知，

声音强度 $x=10^{\frac{y}{10}}\times10^{-12}=10^{-12+\frac{y}{10}}$，

设喷气式飞机起飞时声音强度与一般说话时声音强度分别为 x_1,x_2，

故强度之比 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{10^{-12+\frac{140}{10}}}{10^{-12+\frac{60}{10}}}=10^{14-6}=10^{8}$，

故答案为：10^{8}

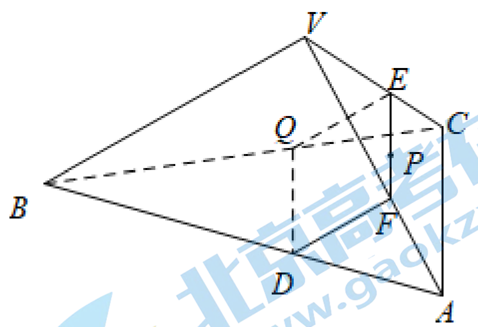
21.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{4}$

【分析】根据题意，在平面 VAC 内，过点 P 作 $EF\,//\,AC$ 分别交 VA,VC 于 F,E，在平面 VBC 内，过 E 作 $EQ\,//\,VB$ 交 BC 于 Q，在平面 VAB 内，过 F 作 $FD\,//\,VB$ 交 BC 于 D，连接 DQ，进而根据题意，$\triangle VEF\backsim\triangle VCA$，设其相似比为 k，则 $\frac{VF}{VA}=\frac{VE}{VC}=\frac{EF}{AC}=k$，再证明四边形 $FEQD$ 是矩形，再结合相似比和二次函数性质求解即可.

【详解】根据题意，在平面 VAC 内，过点 P 作 $EF\,//\,AC$ 分别交 VA,VC 于 F,E，

在平面 VBC 内，过 E 作 $EQ\,//\,VB$ 交 BC 于 Q，

在平面 VAB 内，过 F 作 $FD\,//\,VB$ 交 BC 于 D，连接 DQ，作图如下，



因为 $EF\,//\,AC$，则 $\angle VEF=\angle VCA,\angle VFE=\angle VAC$，

所以 $\triangle VEF\backsim\triangle VCA$，设其相似比为 k，

则 $\frac{VF}{VA}=\frac{VE}{VC}=\frac{EF}{AC}=k$，

因为 $VA\perp VC$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle VAC$ 中，$AC^2=VA^2+VC^2$，

因为 $VA=VB=VC=1$，所以 $AC=\sqrt{2}$，即 $EF=\sqrt{2}k$，

因为 $FD//VB$，则 $\angle AFD=\angle AVB,\angle ADF=\angle ABV$，

所以，$\triangle AFD\sim\triangle AVB$，即 $\frac{AF}{VA}=\frac{AD}{BA}=\frac{FD}{VB}$，

因为 $\frac{AF}{VA}=\frac{VA-VF}{VA}=1-k$，

所以 $\frac{FD}{VB}=\frac{AF}{VA}=1-k$，即 $FD=1-k$，

同理 $\triangle CEQ\backsim\triangle CVB$，即 $\frac{CE}{VC}=\frac{CQ}{BC}=\frac{EQ}{VB}=1-k$，

因为 $VB\perp VC,VB\perp VA,VA\cap VC=V$，$VA\subset$ 平面 VAC，$VC\subset$ 平面 VAC，

所以 $VB\perp$ 平面 VAC，

因为 $FD//VB,EQ//VB$，

所以 $FD\perp$ 平面 VAC，$EQ\perp$ 平面 VAC，

因为 $EF\subset$ 平面 VAC，

所以 $FD\perp EF,EQ\perp FE$，

因为 $\frac{BD}{BA}=\frac{AB-AD}{AB}=k,\frac{BQ}{CB}=\frac{CB-CQ}{CB}=k,$

所以 $\frac{BQ}{BC}=\frac{BD}{BA}$

因为 $\angle B=\angle B$，所以 $\triangle BDQ\backsim\triangle BAC$，

所以 $DQ//AC$，

因为 $EF // AC$，所以 $EF//DQ$，

因为 $FD\perp EF,EQ\perp FE$，所以 $FD\perp DQ,EQ\perp DQ$，

所以四边形 $FEQD$ 是矩形，即 $S_{矩形FEQD}=EF\cdot FD=(1-k)\cdot\sqrt{2}k=-\sqrt{2}(k-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以，由二次函数的性质知，当 $k=\frac{1}{2}$ 时，S_{FEQD} 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

22.【答案】 ①. -1 ②. $a\le 0$ 或 $\frac{1}{3}\le a<1$.

【分析】

①代入 a 的值，求出 $f\left(x\right)$ 在各个区间的最小值即可判断；

②通过讨论 a 的范围，再讨论 $x\geq 1$ 和 $x<1$ 时的零点情况，即可求出满足 $f\left(x\right)$ 恰有 2 个零点的 a 的范围.

【详解】解：①若 $a=1$，$x\geq 1$ 时，$f\left(x\right)=\log_2 x-1$，$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递增，$f\left(x\right)$ 的最小值是 $f\left(1\right)=-1$，

$x<1$ 时，$f\left(x\right)=5\left(x-1\right)\left(x-3\right)=5\left(x^2-4x+3\right)=5\left(x-2\right)^2-5$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上单调递减，

$f\left(x\right)>f\left(1\right)$，

故 $f\left(x\right)$ 的最小值为 -1.

②当 $a>0$ 时，$x\geq 1$ 时，$f\left(x\right)=\log_2 x-a$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-a<0$，此时 $f\left(x\right)=\log_2 x-a$ 在 $[1,+\infty)$ 有 1 个零点，

此时，要使 $f\left(x\right)$ 恰有 2 个零点，则只需 $x<1$ 时，$f\left(x\right)=5\left(x-a\right)\left(x-3a\right)$ 有 1 个零点即可，

所以 $\begin{cases} a<1 \\ 3a\geq 1 \end{cases}$，解得 $\dfrac{1}{3}\leq a<1$，又 $a>0$，所以 $\dfrac{1}{3}\leq a<1$；

当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)$ 恰有 2 个零点，符合题意；

当 $a<0$ 时，$x\geq 1$ 时，$f\left(x\right)=\log_5 x-a$，$f\left(x\right)$ 单调递增，$f\left(x\right)\geq f\left(1\right)=-a>0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 没有零点，

要使 $f\left(x\right)$ 恰有 2 个零点，则只需 $x<1$ 时，$f\left(x\right)=5\left(x-a\right)\left(x-3a\right)$ 有 2 个零点即可，

所以 $3a<a<1$，所以 $a<0$；

综上，若 $f\left(x\right)$ 恰有 2 个零点，则 $a\leq 0$ 或 $\dfrac{1}{3}\leq a<1$，

故答案为：①-1；②$a\leq 0$ 或 $\dfrac{1}{3}\leq a<1$.

【点睛】本题主要考查分段函数最值的求法及已知零点个数求参数范围问题，同时考查分类讨论和数形结合的数学数学，属于难题.

五、解答题：本大题共 2 小题，共 25 分.

23.【答案】(1) $\dfrac{\pi}{6}$

(2) 选②或③，$\sqrt{7}$

【分析】(1) 利用正弦定理：边转角，再利用正弦的二倍角公式，即可求出结果；

(2) 条件①，由 $\sin C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，角 C 可以是锐角或钝角，不满足题设中的条件，故不选①；条件②，利用

条件建立，边b与c的方程组，求出b与c，再利用余弦定理，即可求出结果；条件③，利用正弦定理，先把角转边，再结合条件建立，边b与c的方程组，求出b与c，再利用余弦定理，即可求出结果；

【小问 1 详解】

因为$b\sin 2A=\sqrt{3}a\sin B$，由正弦定理得，$\sin B\sin 2A=\sqrt{3}\sin A\sin B$，

又$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B\neq 0$，得到$\sin 2A=\sqrt{3}\sin A$，

又$\sin 2A=2\sin A\cos A$，所以$2\sin A\cos A=\sqrt{3}\sin A$，

又$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A\neq 0$，得到$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$A=\dfrac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

选条件①：$\sin C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

由（1）知，$A=\dfrac{\pi}{6}$，根据正弦定理知，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{\frac{2\sqrt{7}}{7}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}>1$，即$c>a$，

所以角C有锐角或钝角两种情况，$\triangle ABC$存在，但不唯一，故不选此条件.

选条件②：$\dfrac{b}{c}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}bc=3\sqrt{3}$，所以$bc=12\sqrt{3}$，

又$\dfrac{b}{c}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，得到$b=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}c$，代入$bc=12\sqrt{3}$，得到$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}c^2=12\sqrt{3}$，解得$c=4$，所以$b=3\sqrt{3}$，

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(3\sqrt{3})^2+4^2-2\times 3\sqrt{3}\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=27+16-36=7$，

所以$a=\sqrt{7}$.

选条件③：$\cos C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}bc=3\sqrt{3}$，所以$bc=12\sqrt{3}$，

由$\cos C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，得到$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\dfrac{21}{49}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

又$\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，由(1)知$A=\dfrac{\pi}{6}$，

所以$\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$

又由正弦定理得，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\frac{3\sqrt{21}}{14}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，得到$b=\frac{3\sqrt{3}}{4}c$，

代入$bc=12\sqrt{3}$，得到$\frac{3\sqrt{3}}{4}c^2=12\sqrt{3}$，解得$c=4$，所以$b=3\sqrt{3}$，

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(3\sqrt{3})^2+4^2-2\times3\sqrt{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=27+16-36=7$，

所以$a=\sqrt{7}$.

24.【答案】（1）具有，理由见解析

（2）不存在，证明见解析

（3）证明见解析

【分析】（1）根据集合具有性质$T(n,p)$的特征，即可根据集合 A 中的元素进行检验求解，

（2）假设集合 A 具有性质$T(4,p)$，分别考虑$p=1,2,3,4$时，集合 A 中的元素，即可根据$T(n,p)$的定义求解.

（3）根据假设存在j使得$c_j\geqslant p+1$，考虑当$c_1=n$时以及$p+1\leqslant c_1<n$时，分量为 1 的个数即可讨论求解.

【小问 1 详解】

因为$(1,1,0)\cdot(1,1,0)=1\times1+1\times1+0\times0=2$，同理$(1,0,1)\cdot(1,0,1)=(0,1,1)\cdot(0,1,1)=2$.

又$(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\times1+1\times0+0\times1=1$，同理$(1,1,0)\cdot(0,1,1)=(1,0,1)\cdot(0,1,1)=1$.

所以集合$A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$具有性质$T(3,2)$.

【小问 2 详解】

当$n=4$时，集合 A 中的元素个数为4. 由题设$p\in\{0,1,2,3,4\}$.

假设集合 A 具有性质$T(4,p)$，则

①当$p=0$时，$A=\{(0,0,0,0)\}$，矛盾.

②当$p=1$时，$A=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$，不具有性质$T(4,1)$，矛盾.

③当$p=2$时，$A\subseteq\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

因为$(1,1,0,0)$和$(0,0,1,1)$至多一个在 A 中；$(1,0,1,0)$和$(0,1,0,1)$至多一个在 A 中；

$(1,0,0,1)$和$(0,1,1,0)$至多一个在 A 中，故集合 A 中的元素个数小于4，矛盾.

④当$p=3$时，$A=\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$，不具有性质$T(4,3)$，矛盾.

⑤当$p=4$时，$A=\{(1,1,1,1)\}$，矛盾.

综上，不存在具有性质$T(4,p)$的集合 A .

【小问 3 详解】

记 $c_j=t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$，则 $c_1+c_2+\cdots+c_n=np$．

若 $p=0$，则 $A=\{(0,0,\cdots,0)\}$，矛盾．若 $p=1$，则 $A=\{(1,0,0,\cdots,0)\}$，矛盾．故 $p\geq 2$．

假设存在 j 使得 $c_j\geqslant p+1$，不妨设 $j=1$，即 $c_1\geqslant p+1$．

当 $c_1=n$ 时，有 $c_j=0$ 或 $c_j=1\ (j=2,3,\cdots,n)$ 成立．

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中分量为1的个数至多有 $n+(n-1)=2n-1<2n\leqslant np$．

当 $p+1\leqslant c_1<n$ 时，不妨设 $t_{11}=t_{21}=\cdots=t_{p+1,1}=1,t_{n1}=0$．

因为 $\alpha_n\cdot\alpha_n=p$，所以 α_n 的各分量有 p 个1，不妨设 $t_{n2}=t_{n3}=\cdots=t_{n,p+1}=1$．

由 $i\neq j$ 时，$\alpha_i\cdot\alpha_j=1$ 可知，$\forall q\in\{2,3,\cdots,p+1\}$，$t_{1q},t_{2q},\cdots,t_{p+1,q}$ 中至多有1个1，

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中，至多含有 $p+1+p=2p+1$ 个1．

又 $\alpha_i\cdot\alpha_n=1\ (i=1,2,\cdots,p+1)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中，含有

$(p+1)+(p+1)=2p+2$ 个1，矛盾．

所以 $c_j\leqslant p\ (j=1,2,\cdots,n)$． 因为 $c_1+c_2+\cdots+c_n=np$，

所以 $c_j=p\ (j=1,2,\cdots,n)$．

所以 $t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p\ (j=1,2,\cdots,n)$．

【点睛】求解新定义运算有关的题目，关键是理解和运用新定义的概念以及元算，利用化归和转化的数学思想方法，将不熟悉的数学问题，转化成熟悉的问题进行求解.

对于新型集合，首先要了解集合的特性，抽象特性和计算特性，抽象特性是将集合可近似的当作数列或者函数分析.计算特性，将复杂的关系通过找规律即可利用已学相关知识求解.