

南充市高2024届高考适应性考试（零诊）

理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2-3i}{1-i}$ 的模为（ ）

- A. 5 B. $\sqrt{13}$ C. $\sqrt{5}$ D. 1

2. 已知集合 $A = \{x | (x-3)(x-1) \leq 0\}$ ， $B = \{x | \frac{x-1}{x-4} < 0\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）

- A. $\{x | 1 < x \leq 7\}$ B. $\{x | 1 < x < 4\}$ C. $\{x | 3 \leq x < 4\}$ D. $\{x | 3 \leq x \leq 7\}$

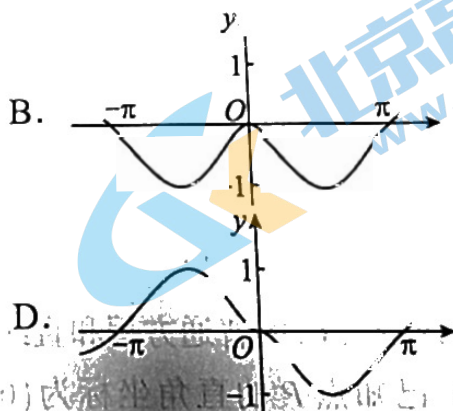
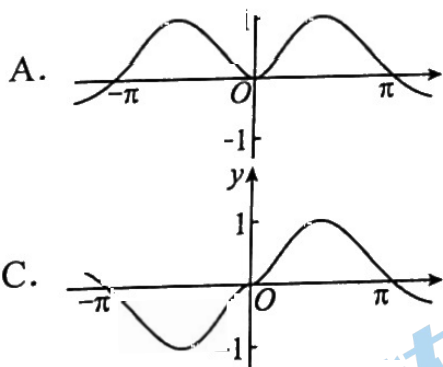
3. 已知 $a = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$ ， $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$ ， $c = \log_2 2$ ，则（ ）

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

4. 已知幂函数 $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$)，下列能成为“ $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数”的充分条件的是（ ）

- A. $m = -3, n = 1$ B. $m = 1, n = 2$ C. $m = 2, n = 3$ D. $m = 1, n = 3$

5. 函数 $f(x) = \frac{x \sin x}{e^{|x|-1}}$ 的图象大致为（ ）



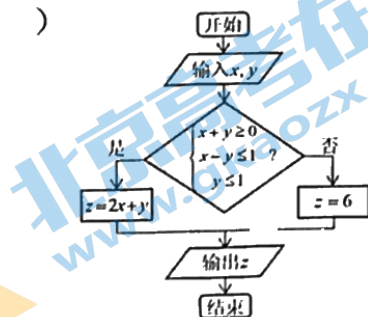
6. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$)的最小正周期为 π ，把函数 $f(x)$ 的图象向

右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象对应函数解析式为（ ）

- A. $y = 2\sin 2x$ B. $y = 2\cos 2x$ C. $y = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ D. $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

7. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 $x, y \in R$, 则()

- A. 输出的 Z 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 最大值为 5
 B. 输出的 Z 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 最大值为 6
 C. 输出的 Z 的最小值为 -1, 最大值为 5
 D. 输出的 Z 的最小值为 -1, 最大值为 6



8. A, B, C, D, E 五名学生按任意次序站成一排, 则 A 和 B 站两端的概率为()

- A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

9. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \neq 0$, $\vec{a} \perp (\vec{a} - 3\vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的正切值为()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 10$, $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$, 则 S_n 的最大值为()

- A. 60 B. 50 C. $\frac{121}{4}$ D. 30

11. 形如 $f(x) = ax + \frac{b}{x} (a, b > 0)$ 的函数是中学数学常见的函数模型之一, 因其图象

上半部分像极了老师批阅作业所用的“√”, 所以也称为“对勾函数”. 研究证明, 对勾函数可以看作是焦点在坐标轴上的双曲线绕原点旋转得到, 即对勾函数的图象是双曲线, 直线 $y = ax$ 是它的一条渐近线. 点 P 是双曲线

$f(x) = \sqrt{3}x + \frac{1}{x}$ 上任意一点, 在点 P 处作双曲线的切线, 交渐近线于 A, B 两点, 已知 O 为坐标原点, 则 $\triangle AOB$ 的面积为()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

12. 函数 $f(x) = x \ln x - 1$ 的零点为 x_1 , 函数 $g(x) = e^x(x-1) - e$ 的零点为 x_2 , 则下列结论正确的是()

A. $e^{x_2} \cdot \ln x_1 = e^2$

B. $e^{x_2} + \frac{1}{x_1} > 2$

C. $\ln x_1 - x_2 = 1$

D. $-x_2 + \frac{1}{1 + \ln x_1} \leq 2$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 若命题“ $\exists x \in R$, 使得 $x^2 + 2x - m = 0$ 成立”为真命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 2$, $a_{13} = 32$, 则 $a_9 =$ _____.

15. 已知 $\left(2x - \frac{a}{x}\right)^6$ 关于 x 的展开式中的常数项为 -160 ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的正方形， $PB = PD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，二面角

$P-BD-C$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分

17. (12 分) 已知向量 $\vec{m} = (\cos^2 x, \sqrt{3})$ ， $\vec{n} = (2, \sin 2x)$ ，函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$ 。

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(II) 在 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C 的对边，且 $f(C) = 3$ ， $c = 1$ ， $ab = 2\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

18. (12 分) 第三十一届世界大学生夏季运动会于 2023 年 8 月 8 日晚在四川省成都市胜利闭幕。来自 113 个国家和地区的 6500 名运动员在此届运动会上展现了青春力量，绽放青春光彩，以饱满的热情和优异的状态谱写了青春、团结、友谊的新篇章。外国运动员在返家时纷纷购买纪念品，尤其对中国的唐装颇感兴趣。现随机对 200 名外国运动员（其中男性 120 名，女性 80 名）就是否有兴趣购买唐装进行了解，统计结果如下：

	有兴趣	无兴趣	合计
男性运动员	80	40	120
女性运动员	40	40	80
合计	120	80	200

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

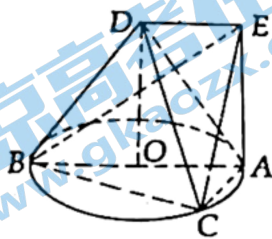
临界值表：

$P(K^2 > k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

(I) 是否有 99% 的把握认为“外国运动员对唐装感兴趣与性别有关”；

(II) 按分层抽样的方法抽取 6 名对唐装有兴趣的运动员，再从中任意抽取 3 名运动员作进一步采访，记 3 名运动员中男性有 X 名，求 X 的分布列与数学期望。

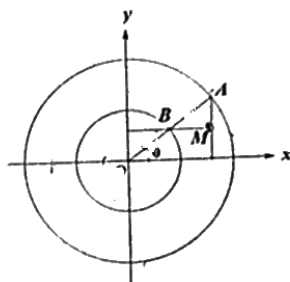
19. (12分) 如图所示, 在圆锥 DO 中, D 为圆锥的顶点, O 为底面圆圆心, AB 是圆 O 的直径, C 为底面圆周上一点, 四边形 $AODE$ 是矩形.



(I) 若点 F 是 BC 的中点, 求证: $DF \parallel$ 平面 ACE ;

(II) 若 $AB = 2$, $\angle BAC = \angle ACE = \frac{\pi}{3}$, 求直线 CD 与平面 $ABDE$ 所成角的余弦值.

20. (12分) 如图所示, 以原点 O 为圆心, 分别以 2 和 1 为半径作两个同心圆, 设 A 为大圆上任意一点, 连接 OA 交小圆于点 B , 设 $\angle AOx = \theta$, 过点 A 、 B 分别作 x 轴, y 轴的垂线, 两垂线交于点 M .



(I) 求动点 M 的轨迹 C 的方程;

(II) 点 E 、 F 分别是轨迹 C 上两点, 且 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = 0$, 求 $\triangle EOF$ 面积的取值范围.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设 $g(x) = x^2 - 2bx + 4$, 当 $a = 2$ 时, 若存在 $x_1 \in (0, 2)$, 对任意 $x_2 \in [3, 5]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 求实数 b 的取值范围;

(III) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 恒有 $f(x+1) + \frac{a-1}{x+1} + a + 1 \leq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t \end{cases}$ (t 为参数),

以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = -1$.

(I) 求曲线 C_1 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II) 已知点 P 的直角坐标为 $(0, -1)$, 曲线 C_1 与直线 l 交于 M 、 N 两点, 求

$\left| \frac{1}{|PM|} - \frac{1}{|PN|} \right|$ 的值.

23. (10分) 已知函数 $f(x) = |x+m| + 2|x-1|$.

(I) 若 $m = -5$, 求不等式 $f(x) \leq 8$ 的解集;

(II) 若 $\{x | f(x) < 3\} \supseteq [0, 1]$, 求实数 m 的取值范围.