绵阳市高中2018级第三次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

BDBDC　DACAB　AA

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．0　　14．2e　　15．$\sqrt{2}$　　16．①③④

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．解：（1）由 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，得 $2ab\sin C=2ab\cos C$，

$\therefore \tan C=1$．

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$．………………………………………………4分

（2）由 $c^2=2ab\cos C$ 及正弦定理得，

$\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$，……………………………………………6分

$\therefore \frac{\sin C}{\sin A\sin B}=\frac{2\cos C}{\sin C}$．

$\because A+B=\pi-C$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，…………………………8分

$\therefore \frac{2\cos C}{\sin C}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}$，

$\therefore \frac{2}{\tan C}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}$．……………………………………12分

18．解：（1）由图知：高二年级的学生成绩的平均分高于高一年级考核成绩的平均分；高二年级的学生成绩比较集中，而高一年级的同学成绩比较分散．

$\therefore$高二年级的学生学习效果更好．……………………………………4分

（2）记事件 A 为“从样本中任取2名同学的竞赛成绩为优秀”，事件 B 为“这两个同学来自同一个年级”，则 $P(A)=\frac{C_{11}^2}{C_{40}^2}$，$P(AB)=\frac{C_5^2+C_6^2}{C_{40}^2}$．

$\therefore$在成绩为优秀的情况下，这2个同学来自同一个年级的概率为

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{C_5^2+C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{5}{11}$．…………………………………6分

（3）由题意 X 的可能取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，$P(X=3)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

∴X 的分布列为：……………………………………………………………11 分

$E(X)=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{5}$. ……………………………………12 分

19. 解：（1）证明：∵$DE\perp$平面 ABE，$AB\subset$平面 ABE，∴$DE\perp AB$.

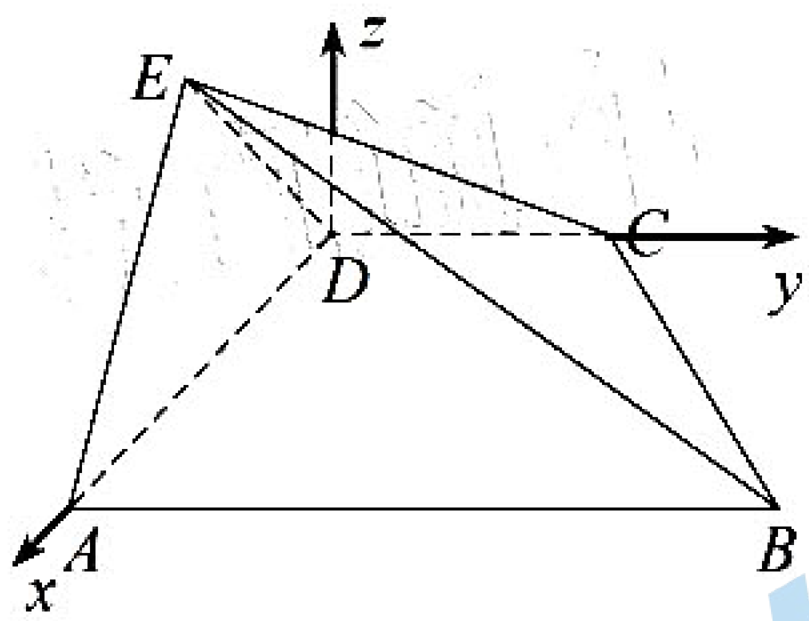
又 $AB\perp DA$，且 $DE\cap DA=D$，

∴ $AB\perp$平面 ADE. ……………………………………………………………4 分

又 $AB\subset$平面 $ABCD$，

∴平面 $ADE\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………………5 分

（2）建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$.



∵ $DE\perp$平面 ABE，$AE\subset$平面 ABE，

∴ $DE\perp AE$.

∵$AD=2$，$DE=1$，∴ $E(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

由题意得 $B(2，2，0)$，$C(0，1，0)$. ……………………………………………7 分

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{m}=(x，y，z)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x-y=0,\\ -\frac{1}{2}x+y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得 $y=-2$，$z=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$，

∴ $\vec{m}=(1,\ -2,\ -\dfrac{5}{\sqrt{3}})$. ……………………………………………………9 分

取平面 BCD 的一个法向量 $\vec{n}=(0，0，1)$，

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ……………………………………………11 分

∵二面角 $D-BC-E$ 所成角为锐角，

∴二面角 $D-BC-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. …………………………………12 分

20．解：（1）设 $F(c,0)$．由题意得 $|FA|=a,|FB|=a+c$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore |FA|\cdot|FB|=a(a+c)=10+5\sqrt{2}$．……3 分

解得 $a^2=10$，$b^2=5$．

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$．……5 分

（2）设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$．

由 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{DP}=\mu\overrightarrow{DN}$，

得 $(x_0+4,y_0)=\lambda(x_1+4,y_1)$，$(x_0-4,y_0)=\mu(x_2-4,y_2)$，

$\therefore \begin{cases}x_0-\lambda x_1=4(\lambda-1),\\ y_0=\lambda y_1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_0-\mu x_2=4(1-\mu),\\ y_0=\mu y_2,\end{cases}$

$\therefore \lambda x_1-\mu x_2=8-4(\lambda+\mu)$．①……7 分

又点 P，M，N 均在椭圆上，

由 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{10}+\frac{y_0^2}{5}=1,\\ \frac{\lambda^2x_1^2}{10}+\frac{\lambda^2y_1^2}{5}=\lambda^2,\end{cases}$ 得 $\frac{(x_0-\lambda x_1)(x_0+\lambda x_1)}{10}=1-\lambda^2$，

$\therefore x_0+\lambda x_1=-\frac{5}{2}(\lambda+1)$．②……9 分

由 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{10}+\frac{y_0^2}{5}=1,\\ \frac{\mu^2x_2^2}{10}+\frac{\mu^2y_2^2}{5}=\mu^2,\end{cases}$ 得 $x_0+\mu x_2=\frac{5}{2}(\mu+1)$．③……10 分

联立②③得 $\lambda x_1-\mu x_2=-\frac{5}{2}(\lambda+\mu)-5$．④　　联立①④得 $\lambda+\mu=\frac{26}{3}$，

$\therefore \lambda+\mu$ 为定值 $\frac{26}{3}$．……12 分

21．解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\ln(x-1)+1\,(x>1)$，即 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x-1}$，

易知 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增．……2 分

又 $f'(\frac{5}{4})<0$，$f'(2)=e^2-1>0$，存在唯一 $x_0\in(\frac{5}{4},2)$，使得 $f'(x_0)=0$．……4 分

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 有唯一极值点 x_0．……6 分

（2）∵ $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x-1}$，由题意得 $a>0$，

易知 $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

∴存在唯一 x_0，使 $f'(x_0)=ae^{x_0}-\dfrac{1}{x_0-1}=0$，

即 $ae^{x_0}=\dfrac{1}{x_0-1}$， $\ln a+x_0=-\ln(x_0-1)$.

∴ $f_{\min}(x)=f(x_0)=ae^{x_0}-\ln(x_0-1)+\ln a+1\geqslant0$， ……………………………9 分

即 $\dfrac{1}{x_0-1}-\ln(x_0-1)-\ln(x_0-1)-x_0+1\geqslant0$，

即 $\dfrac{1}{x_0-1}-2\ln(x_0-1)-x_0+1\geqslant0$，

令 $t=x_0-1$，则 $\dfrac{1}{t}-2\ln t-t\geqslant0$. ……………………………………………10 分

设 $h(t)=\dfrac{1}{t}-2\ln t-t(t>0)$.

∵ $h'(t)=-\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}-1<0$，

∴$h(t)$在 $(0,+\infty)$ 递减，

又 $h(1)=0$， ∴ $h(t)\geqslant h(1)$， $0<t\leqslant1$，

∴ $\ln a=-\ln t-t-1\geqslant-2$，

∴ $a\geqslant\dfrac{1}{e^2}$. …………………………………………………………………12 分

22．**解**：（1）由 $\begin{cases}x=\sqrt{10}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{10}\sin\alpha+4,\end{cases}$ 得 $x^2+(y-4)^2=10$. ……………………2 分

由 $\begin{cases}y=\rho\sin\theta,\\ x=\rho\cos\theta,\end{cases}$ 得曲线 E 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\sin\theta+6=0$. ……………4 分

直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\beta$ ($\rho\in\mathbf{R}$， $0\leqslant\beta<\pi$). ……………………………5 分

（2）将直线 l： $\theta=\beta$ ($\rho\in\mathbf{R}$， $0\leqslant\beta<\pi$)，

代入曲线 E 的方程得 $\rho^2-8\rho\sin\beta+6=0$.

由 $\Delta=64\sin^2\beta-24>0$， 解得 $\sin^2\beta>\dfrac{3}{8}$.

设 $N(\rho_2, \beta)$, $M(\rho_1, \beta)$.

由韦达定理得 $\rho_1+\rho_2=8\sin\beta$，$\rho_1\rho_2=6$． ……………………………………………7 分

$\because\ \overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OM}$，

$\therefore\ \rho_2=3\rho_1$，

解得 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，满足 $\Delta>0$．

$\because 0\leqslant\beta<\pi$，$\therefore\ \beta=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$，

$\therefore\ k=\tan\beta=\pm1$．

∴直线 l 的斜率为 ±1． ……………………………………………………………………10 分

23．解：（1）当 $x\geqslant1$ 时，$4x-3\geqslant4$，解得 $x\geqslant\dfrac{7}{4}$； ………………………………2 分

当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$1\geqslant4$ 不成立；

当 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$3-4x\geqslant4$，解得 $x\leqslant-\dfrac{1}{4}$． ……………………………………………4 分

综上，不等式 $f(x)\geqslant4$ 的解集为 $(-\infty,-\dfrac{1}{4}]\cup[\dfrac{7}{4},+\infty)$． ………………………………5 分

（2）由题意得 $2f(x)-g(x)=4|x-1|-|x+1|$，

当 $x=0$ 时，$3\geqslant0$，显然成立．

要使 $2f(x)-g(x)\geqslant a|x|$ 成立，即 $a\leqslant\dfrac{2f(x)-g(x)}{|x|}(x\neq0)$，

令 $h(x)=\dfrac{2f(x)-g(x)}{|x|}(x\neq0)$，

即 $h(x)=\dfrac{4|x-1|-|1+x|}{|x|}=4\left|1-\dfrac{1}{x}\right|-\left|\dfrac{1}{x}+1\right|$ ……………………………………………7 分

$\geqslant\left|1-\dfrac{1}{x}\right|-\left|\dfrac{1}{x}+1\right|$（当且仅当 $x=1$ 时取得等号）

$\geqslant-\left|1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+1\right|=-2$（当且仅当 $0<x\leqslant1$ 时取得等号）．

∴当 $x=1$ 时函数 $h(x)$ 取得最小值 -2．

$\therefore a\leqslant-2$．

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]$． …………………………………………………………10 分