北京市朝阳区2016～2017学年度第一学期期末统一考试

高三年级数学试卷(文史类)

2017.1

(考试时间120分钟　满分150分)

本试卷分为选择题(共40分)和非选择题(共110分)两部分

第一部分(选择题　共40分)

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x<1\}$,$B=\{x\mid x-2<0\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $\{x\mid x>2\}$　　B. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x\mid x\leqslant 2\}$

2. 复数 $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=$

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $2-2\mathrm{i}$　　C. $1+\mathrm{i}$　　D. $1-\mathrm{i}$

3. 设非零实数 a,b 满足 $a<b$,则下列不等式中一定成立的是

A. $a+b>0$　　B. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　C. $ab<b^2$　　D. $a^3-b^3<0$

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

5. 设 $a>0$,且 $a\neq 1$,则"函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数"是"函数 $y=(2-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

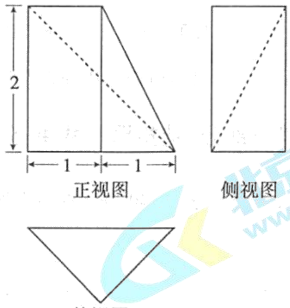
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2,M 是双曲线上的一点,且 $|MF_1|=\sqrt{3}$,$|MF_2|=1$,$\angle MF_1F_2=30°$,则该双曲线的离心率是

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{3}+1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\sqrt{3}+1$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

7. 某四棱锥的三视图如图所示，其俯视图为等腰直角三角形，则该四棱锥的体积为

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\sqrt{2}$



（第 7 题图）

8. 某校高三(1)班 32 名学生参加跳远和掷实心球两项测试。跳远和掷实心球两项测试成绩合格的人数分别为 26 人和 23 人，这两项成绩均不合格的有 3 人，则这两项成绩均合格的人数是

A. 23　　B. 20　　C. 21　　D. 19

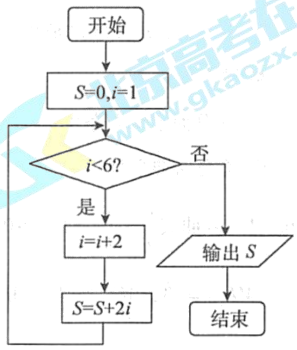
第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=2, S_2=a_3$，则 $a_2=$________，$S_{10}=$________．

10. 圆 $C：x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 的圆心到直线 $3x+4y+14=0$ 的距离是________．

11. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的结果为________．



（第 11 题图）

12. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle B=45°$，$AC=\sqrt{2}BC$，则$\angle C=$________.

13. 设D为不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y\leqslant 0,\\ x+3y\leqslant 3\end{cases}$表示的平面区域，对于区域$D$内除原点外的任一点$A(x,y)$，

则$2x+y$的最大值是________，$\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$的取值范围是________.

14. 有甲、乙、丙、丁四位歌手参加比赛，其中只有一位获奖。有人走访了四位歌手，甲说："乙或丙获奖"；乙说："甲、丙都未获奖"；丙说："丁获奖"；丁说："丙说的不对"。若四位歌手中只有一个人说的是真话，则获奖的歌手是________.

三、解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. (本小题满分13分)

已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1$.

(Ⅰ)求$f(x)$的最小正周期；

(Ⅱ)求$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值.

16. (本小题满分13分)

已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_2=4$，$a_3+a_4=24$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$，$b_2=6$，且$\{b_n-a_n\}$是等差数列，

求数列$\{b_n\}$的前n项和.

17. (本小题满分13分)

甲、乙两位学生参加数学文化知识竞赛培训。在培训期间，他们参加的5次测试成绩记录如下：

甲：82　82　79　95　87

乙：95　75　80　90　85

(Ⅰ)用茎叶图表示这两组数据；

(Ⅱ)从甲、乙两人的这5次成绩中各随机抽取一个，求甲的成绩比乙的成绩高的概率；

(Ⅲ)现要从甲、乙两位同学中选派一人参加正式比赛，从统计学的角度考虑，你认为选派哪位同学参加合适？并说明理由.

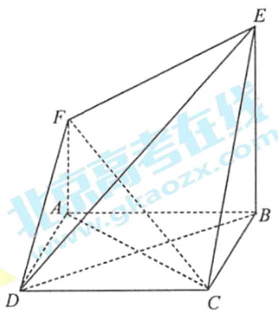
18.（本小题满分 14 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，$AF\parallel BE$，$AB\perp BE$，$AB=BE=2$，$AF=1$.

（Ⅰ）求证：$AC\perp$ 平面 BDE；

（Ⅱ）求证：$AC\parallel$ 平面 DEF；

（Ⅲ）求三棱锥 $C-DEF$ 的体积.



19.（本小题满分 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 与两定点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$ 连线的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$，记点 P 的轨迹为曲线 C.

（Ⅰ）求曲线 C 的方程；

（Ⅱ）若曲线 C 上的两点 M，N 满足 $OM\parallel PA$，$ON\parallel PB$，求证：$\triangle OMN$ 的面积为定值.

20.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=(x-1)e^x+ax^2$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 有两个零点，试求 a 的取值范围；

（Ⅲ）设函数 $g(x)=\ln x+x-e^x+1$，当 $a=0$ 时，证明 $f(x)-g(x)\geqslant 0$.

北京市朝阳区 2016-2017 学年度高三年级第一学期期末统一考试

数学答案（文史类）　　2017.1

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	D	B	A	D	C	B

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	4，110	3	30	105°	$\frac{9}{4}$，$[-\sqrt{2},0]$	甲

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}).$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π． ……………………………………………………7 分

（Ⅱ）因为 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$．

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2；

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -1． …………………………13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，依题意 $q>0$．

因为 $\begin{cases}a_1q=4,\\ a_1q^2+a_1q^3=24,\end{cases}$

两式相除得 ：$q^2+q-6=0$，

解得 $q=2$，　$q=-3$（舍去）．

所以 $a_1=\dfrac{a_2}{q}=2$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n$. ……………………………………6 分

（Ⅱ）由已知可得$b_1-a_1=3-2=1$，$b_2-a_2=6-4=2$，

因为$\{b_n-a_n\}$为等差数列，

所以数列$\{b_n-a_n\}$是首项为1，公差为$d=1$的等差数列.

所以 $b_n-a_n=1+(n-1)=n$.

则$b_n=n+2^n$.

因此数列$\{b_n\}$的前n项和：

$$T_n=1+2+2+2^2+3+2^3+\cdots+n+2^n$$
$$=(1+2+3+\cdots+n)+(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)$$
$$=\frac{n^2+n}{2}+2^{n+1}-2.$$
……………………………………………………………………13 分

17. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）作出茎叶图如下；

甲		乙
9	7	5
7 2 2	8	0 5
5	9	0 5

…………………………………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）记甲被抽到的成绩为x，乙被抽到成绩为y，用数对(x,y)表示基本事件：

$(82,95),(82,75),(82,80),(82,90),(82,85)$,
$(82,95),(82,75),(82,80),(82,90),(82,85)$,
$(79,95),(79,75),(79,80),(79,90),(79,85)$,
$(95,95),(95,75),(95,80),(95,90),(95,85)$,
$(87,95),(87,75),(87,80),(87,90),(87,85)$,

基本事件总数$n=25$.

设“甲的成绩比乙高”为事件 A,事件 A 包含的基本事件：

$(82,75),(82,80),(82,75),(82,80),(79,75),(95,75)$,
$(95,80),(95,90),(95,85),(87,75),(87,80),(87,85)$,

事件 A 包含的基本事件数 $m=12$.

所以，$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{12}{25}$. ……………………………………………………………9 分

（III）派甲参赛比较合适，理由如下：

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}(70\times1+80\times3+90\times1+9+2+2+7+5)=85,$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}(70\times1+80\times2+90\times2+5+0+5+0+5)=85$$

$$S_{甲}^2=\frac{1}{5}[(79-85)^2+(82-85)^2+(82-85)^2+(87-85)^2+(95-85)^2]=31.6$$

$$S_{乙}^2=\frac{1}{5}[(75-85)^2+(80-85)^2+(80-85)^2+(90-85)^2+(95-85)^2]=50$$

因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}, s_{甲}^2<s_{乙}^2$,

所以，甲的成绩较稳定，派甲参赛比较合适. ……………………………13 分

18. （本小题满分 14 分）

证明：（Ⅰ）因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，

平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，且 $AB\perp BE$，所以 $BE\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BE\perp AC$.

又因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$.

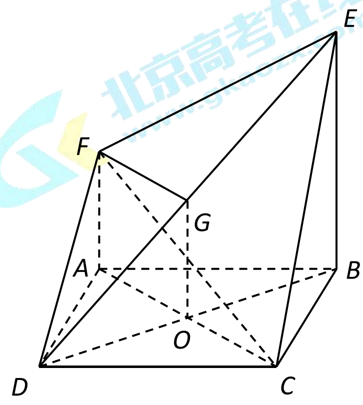
因为 $BD\cap BE=B$，所以 $AC\perp$ 平面 BDE. ……………………………………4 分

（Ⅱ）设 $AC\cap BD=O$，

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

所以 O 为 BD 中点.

设 G 为 DE 的中点，连结 OG,FG，



则 $OG/\!/BE$，且 $OG=\dfrac{1}{2}BE$.

由已知 $AF/\!/BE$，且 $AF=\dfrac{1}{2}BE$，

则 $AF/\!/OG$, 且 $AF=OG$.

所以四边形 $AOGF$ 为平行四边形.

所以 $AO/\!/FG$，即 $AC/\!/FG$.

因为 $AC\not\subset$ 平面 DEF， $FG\subset$ 平面 DEF，

所以 $AC/\!/$ 平面 DEF. ………………………………………………………………9 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）可知 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $AF // BE$，所以 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AF\perp AB, AF\perp AD$.

又因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp AD$，

所以 $AD\perp$ 平面 $ABEF$.

由（Ⅱ）可知，$AC //$ 平面 DEF，

所以，点 C 到平面 DEF 的距离等于 A 点到平面 DEF 的距离，

所以 $V_{C-DEF}=V_{A-DEF}$.

因为 $AB=AD=2AF=2$.

所以 $V_{C-DEF}=V_{A-DEF}=V_{D-AEF}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta AEF}\times AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AF\times AB\times AD$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 2\times 2=\frac{2}{3}$.

故三棱锥 $C-DEF$ 的体积为 $\frac{2}{3}$. ……………………………………………………14 分

19. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设 $P(x,y)$，则 $\frac{y}{x+2}\times\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$，

整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\ (x\neq\pm 2)$. ……………………………………………………5 分

（Ⅱ）依题直线 OM, ON 的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$.

当直线 MN 的斜率不存在时，直线 OM, ON 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，设直线 OM 的方程

是 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，由 $\begin{cases}x^2+2y^2=4,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x,\end{cases}$ 得 $x=\pm\sqrt{2}$，$y=\pm 1$. 取 $M(\sqrt{2},1)$，则 $N(\sqrt{2},-1)$.

所以 ΔOMN 的面积为 $\sqrt{2}$.

当直线 MN 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+2y^2-4=0\end{cases}$ 得，$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$.

因为 M，N 在椭圆 C 上，

所以 $\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-4)>0$，解得 $4k^2-m^2+2>0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$；

所以 $|MN|=\sqrt{(k^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(k^2+1)[(\dfrac{4km}{2k^2+1})^2-4\times\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}]}$

$=2\sqrt{\dfrac{2(k^2+1)(4k^2-m^2+2)}{(2k^2+1)^2}}$.

设点 O 到直线 MN 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$.

所以 ΔOMN 的面积为 $S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}\times d\times|MN|=\sqrt{\dfrac{2m^2(4k^2-m^2+2)}{(2k^2+1)^2}}$ ……①.

因为 $OM//PA$，$ON//PB$，直线 OM，ON 的斜率乘积为 $-\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{2}$.

所以 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=\dfrac{m^2-4k^2}{2m^2-4}$.

由 $\dfrac{m^2-4k^2}{2m^2-4}=-\dfrac{1}{2}$，得 $2k^2+1=m^2$ ……②.

由①②，得 $S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}\times d\times|MN|=\sqrt{\dfrac{2m^2(2m^2-m^2)}{(m^2)^2}}=\sqrt{2}$. ……………………………13 分

20. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=xe^x+x^2$，

因为 $f'(x)=xe^x+2x$，所以 $f'(1)=e+2$.又 $f(1)=1$,

则所求的切线方程为 $y-1=(e+2)(x-1)$.

化简得：$y=(e+2)x-e-1$.……………………………………………………………………3 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=x(e^x+2a)$

①当 $a=0$ 时，函数 $f(x)=(x-1)e^x$ 只有一个零点；

②当 $a>0$，函数当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；

函数当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(0)=-1$，$f(1)=a$，

因为 $x<0$，所以 $x-1<0,\mathrm{e}^x<1$，所以 $\mathrm{e}^x(x-1)>x-1$，所以 $f(x)>ax^2+x-1$.

取 $x_0=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，显然 $x_0<0$ 且 $f(x_0)>0$.

所以 $f(0)f(1)<0$，$f(x_0)f(0)<0$.

由零点存在性定理及函数的单调性知，函数有两个零点.

③当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=x(\mathrm{e}^x+2a)=0$，得 $x=0$，或 $x=\ln(-2a)$.

若 $a\geq-\dfrac{1}{2}$，则 $\ln(-2a)\leq0$.

故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 在单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 至多有一个零点.

又当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有零点.

所以函数 $f(x)$ 不存在两个零点.

若 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $\ln(-2a)>0$.

当 $(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 至多有一个零点.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$；

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单增，$(0,\ln(-2a))$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 上的最大值为 $f(0)=-1<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 上没有零点.

所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. ……………………………………………………9 分

（III）证明:当 $a=0$ 时，$f(x)-g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\ln x-x-1$.

设 $h(x)=x\mathrm{e}^x-\ln x-x-1$，其定义域为 $(0,+\infty)$，则证明 $h(x)>0$ 即可.

因为 $h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\dfrac{x+1}{x}$，所以 $h'(0.1)<0$，$h'(1)>0$.

又因为 $h''(x)=(x+2)\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，所以函数 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h'(x)=0$ 有唯一的实根 $x_0\in(0,1)$，且 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$.

所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)$.

所以 $h(x)\ge h(x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-x_0-1$

$=1+x_0-x_0-1=0$.

所以 $f(x)-g(x)\ge 0$. ……………………………………………………………14 分