2022 北京北师大二附中高二（上）期中

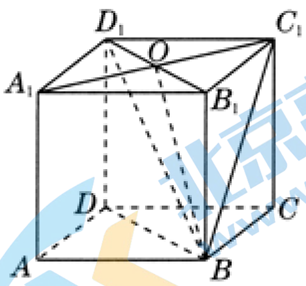
数　　学

一、单选题（共 40 分）

1. 直线 $\sqrt{3}x-3y-5=0$ 的倾斜角为

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

2. 如图所示正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，BC_1 与对角面 BB_1D_1D 所成的角是（　　）.



A. $\angle C_1BB_1$　　B. $\angle C_1BD$　　C. $\angle C_1BD_1$　　D. $\angle C_1BO$

3. 已知点 $A(1,2)$，$B(3,1)$，则线段 AB 的垂直平分线方程为（　　）

A. $4x+2y-5=0$　　B. $4x-2y-5=0$　　C. $x+2y-5=0$　　D. $x-2y-5=0$

4. 已知向量 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 分别是直线 l 和平面 α 的方向向量和法向量，若 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=-\dfrac{1}{2}$，则 l 与 α 所成的角为（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

5. 直线 $\sqrt{3}x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2=0$ 相切，则实数 m 等于（ ）

A. $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$　　C. $-3\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$　　D. $-3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

6. 已知 $A(-2,0),B(4,a)$ 两点到直线 $l:3x-4y+1=0$ 的距离相等，则 $a=$（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{9}{2}$　　C. 2 或 -8　　D. 2 或 $\dfrac{9}{2}$

7. 已知从点 $(-5,3)$ 发出的一束光线，经 x 轴反射后，反射光线恰好平分圆：$(x-1)^2+(y-1)^2=5$ 的圆周，则反射光线所在的直线方程为（　　）

A　$2x-3y+1=0$　　B. $2x-3y-1=0$

C　$3x-2y+1=0$　　D. $3x-2y-1=0$

8. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$F$ 是椭圆的左焦点，P 是椭圆上一点，若椭圆内一点 $A(1,1)$，则 $|PA|+|PF|$ 的最

小值为（　　）

A. 3　　　　B. $\sqrt{10}$　　　　C. $\sqrt{5}+\frac{1}{2}$　　　　D. $\sqrt{5}+1$

9. 在平面直角坐标系中，已知点 $P(a,b)$ 满足 $|a|+|b|=1$，记 d 为点 P 到直线 $x-my-2=0$ 的距离.当 a,b,m 变化时，d 的最大值为（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

10. 设 B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB|\le 2b$，则 C 的离心率的取值范围是（　　）

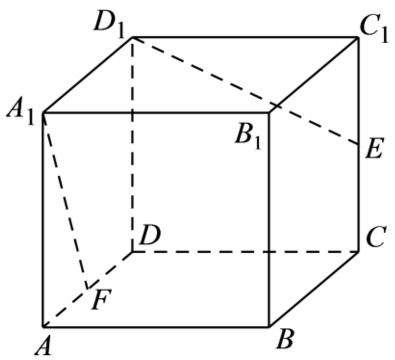
A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

二、填空题（共 25 分）

11. 已知 $A(1,0,0),B(0,2,0),C(0,0,3)$，则平面 ABC 的一个法向量的坐标为__________.

12. 已知直线 l 的倾斜角为 $45°$，直线 l_1 经过点 $A(3,2)$，$B(a,-1)$，且直线 l_1 与 l 垂直，直线 $l_2:2x+by+1=0$ 与直线 l_1 平行，则 $a+b=$_________.

13. 如图所示，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 CC_1 的中点，$\overline{AF}=\lambda\overline{AD}$，若异面直线 D_1E 和 A_1F 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{2}}{10}$，则 λ 的值为________.



14. 已知点 P,Q 分别在直线 l_1：$x+y+2=0$ 与直线 l_2：$x+y-1=0$ 上，且 $PQ\perp l_1$，点 $A(-3,-3)$，$B\left(\frac{3}{2}?\frac{1}{2}\right)$，则 $|AP|+|PQ|+|QB|$ 的最小值为____.

15. 已知 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上　一动点，且满足 $|PA|=\sqrt{2}|PB|,AB=2$，则动点 P 运动轨迹的周长为__________.

三、解答题（共 85 分）

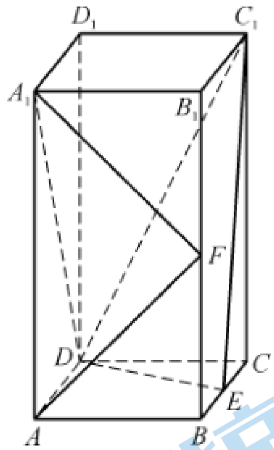
16. 已知 ΔABC　顶点 $A(4,3)$，AB 边上的高所在的直线的方程为 $x-y-3=0$，D 为 AC 中点，且 BD

所在的直线的方程为$3x+y-7=0$.

（1）求AB边所在的直线方程;

（2）求BC边所在　直线方程.

17. 如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=4$，$AB=2$，E，F分别是BC，BB_1的中点.



（1）求直线AF与平面C_1DE所成角的正弦值;

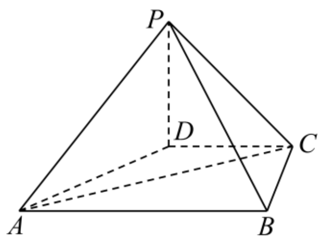
（2）求二面角$A-A_1F-D$的余弦值.

18. 已知圆C经过点A（0，0），B（7，7），圆心在直线$y=\dfrac{4}{3}x$上.

（1）求圆C的标准方程;

（2）若直线l与圆C相切且与x，y轴截距相等，求直线l的方程.

19. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AB=2$，$PD=DC=CB=1$，$\angle DCB=\angle CBA=\angle PDC=90°$，平面$PBC\perp$平面$PDC$.



（1）求证：$PD\perp$平面$ABCD$;

（2）求二面角$D-PA-C$的余弦值.

20. 已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，右焦点为$\left(2\sqrt{2},0\right)$.斜率为1的直线$l$与椭圆$G$交于$A,B$两点，以$AB$为底边作等腰三角形，顶点为$P\left(-3,2\right)$.

（1）求椭圆G的方程;

（2）求直线AB的方程.

21. 在平面直角坐标系xOy中，已知圆$C:x^2+y^2-4x=0$及点$A\left(-1,0\right),B\left(1,2\right)$.

（1）若直线 l 平行于 AB，与圆 C 相交于 D,E 两点，且 $DE=AB$，求直线 l 的方程；

（2）在圆 C 上是否存在点 P，使得 $PA^2+PB^2=12$ 成立？若存在，求点 P 的个数；若不存在，说明理由；

（3）对于线段 AC 上的任意一点 Q，若在以点 B 为圆心的圆上都存在不同的两点 M,N，使得点 M 是线段 QN 的中点，求圆 B 的半径 r 的取值范围.

参考答案

一、单选题（共 40 分）

1. 【答案】A

【解析】

【分析】根据直线倾斜角的正切值等于切线斜率求解即可.

【详解】直线 $\sqrt{3}x-3y-5=0$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故倾斜角 θ 的正切值 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $\theta\in[0,\pi)$，故 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

故选：A

【点睛】本题主要考查了直线倾斜角与斜率的关系,属于基础题型.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】结合正方体性质和线面垂直性质和判定定理可得 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D，然后根据线面夹角的定义即可求解.

【详解】由正方体性质可知，$C_1O\perp B_1D_1$，

又因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$C_1O\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $BB_1\perp C_1O$，

又因为 $BB_1\cap B_1D_1=B_1$，所以 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D，

故 OB 为 BC_1 在平面 BB_1D_1D 上的射影，

从而 $\angle C_1BO$ 为 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角.

故选：D.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】应用两点式求线段 AB 的斜率，进而可得垂直平分线的斜率，结合 AB 中点坐标及点斜式写出垂直平分线方程.

【详解】由题设，$k_{AB}=\frac{1-2}{3-1}=-\frac{1}{2}$，故线段 AB 的垂直平分线的斜率为 2，又 AB 中点为 $(2,\frac{3}{2})$，

所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-\frac{3}{2}=2(x-2)$，整理得：$4x-2y-5=0$.

故选：B

4. 【答案】A

【解析】

【分析】由 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=-\dfrac{1}{2}$ 知直线 l 和平面 α 的法向量所夹锐角为 60°，根据直线 l 和平面 α 的位置关系，即可得出答案.

【详解】由已知得直线 l 和平面 α 的法向量所夹锐角为 60°，因此 l 与 α 所成的角为 30°.

故选：A.

【点睛】本题考查线面角.属于基础题.找到向量 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 的夹角与 l 与 α 所成角的关系是解本题的关键.

5. 【答案】C

【解析】

【详解】圆的方程即为（$x-1)^2+y^2=3$，圆心 $(1,0)$ 到直线的距离等于半径

$\Rightarrow \dfrac{|\sqrt{3}+m|}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}\Rightarrow|\sqrt{3}+m|=2\sqrt{3}\Rightarrow m=\sqrt{3}$ 或者 $\Rightarrow m=-3\sqrt{3}$

故选 C.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】利用点到直线距离公式进行求解即可.

【详解】因为 $A(-2,0),B(4,a)$ 两点到直线 $l:3x-4y+1=0$ 的距离相等，

所以有 $\dfrac{|3\times(-2)+0\times(-4)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|3\times4-4a+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\Rightarrow|13-4a|=5\Rightarrow a=2$，或 $a=\dfrac{9}{2}$，

故选：D

7. 【答案】A

【解析】

【分析】根据反射性质，结合圆的性质、直线斜率公式进行求解即可.

【详解】设点 A 的坐标为 $(-5,3)$，圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ 的圆心坐标为 $B(1,1)$，

设 $C(x,0)$ 是 x 轴上一点，因为反射光线恰好平分圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ 的圆周，

所以反射光线经过点 $B(1,1)$，

由反射的性质可知：$k_{AC}+k_{BC}=0\Rightarrow\dfrac{3-0}{-5-x}+\dfrac{1-0}{1-x}=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$，

于是 $k_{BC}=\dfrac{1-0}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{2}{3}$，所以反射光线所在的直线方程为：

$y=\dfrac{2}{3}(x+\dfrac{1}{2})\Rightarrow 2x-3y+1=0$，

故选：A

8. 【答案】A

【解析】

【分析】由椭圆定义把$|PF|$转化为P到右焦点的距离，然后由平面上到两定点的距离之差最小的性质可得.

【详解】设椭圆的右焦点为$F_2(1,0)$，$|AF_2|=1$，$|PA|+|PF|=|PA|+4-|PF_2|=4+|PA|-|PF_2|$，

又$||PA|-|PF_2||\leqslant|AF_2|$，$-|AF_2|\leqslant|PA|-|PF_2|\leqslant|AF_2|$，

当P，A，F_2三点共线时取等号，$|PA|+|PF|$的最小值为3（取最小值时P是射线F_2A与椭圆的交点），

故选：A.

9. 【答案】C

【解析】

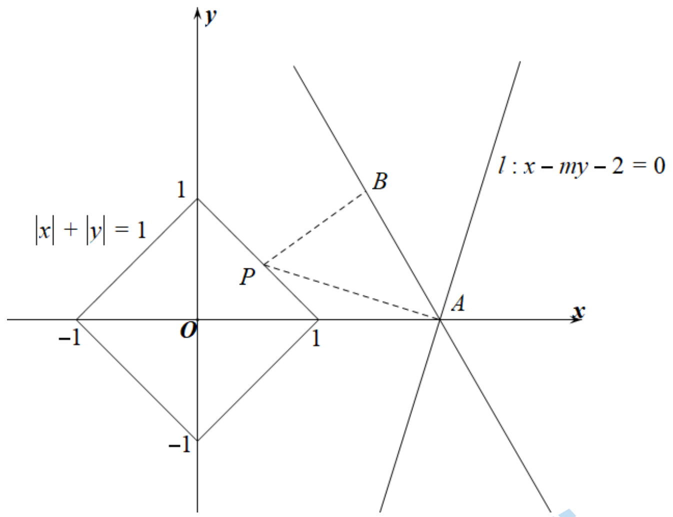
【分析】根据直线$l:x-my-2=0$过定点A确定出对于给定的一点P，d取最大值时$PA\perp l$且$d_{\max}=|PA|$，然后根据点P为正方形上任意一点求解出$|PA|_{\max}$，由此可知$d_{\max}$.

【详解】直线$l:x-my-2=0$过定点$A(2,0)$，

对于任意确定的点P，

当$PA\perp l$时，此时$d=|PA|$，

当PA不垂直l时，过点P作$PB\perp l$，此时$d=|PB|$，如图所示：



因为$PB\perp AB$，所以$|PA|>|PB|$，所以$d_{\max}=|PA|$，

由上可知：当P确定时，$d_{\max}$即为$|PA|$，且此时$PA\perp l$；

又因为P在如图所示的正方形上运动，所以$d_{\max}=|PA|_{\max}$，

当$|PA|$取最大值时，P点与$M(-1,0)$重合，此时$|PA|=2-(-1)=3$，

所以$d_{\max}=3$，

故选：C.

【点睛】关键点点睛：解答本题的关键在于利用图像分析d取最大值时PA与直线l的位置关系，通过位置

关系的分析可将问题转化为点到点的距离问题，根据图像可直观求解.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】设 $P\left(x_0, y_0\right)$，由 $B(0,b)$，根据两点间的距离公式表示出 $|PB|$，分类讨论求出 $|PB|$ 的最大值，再构建齐次不等式，解出即可.

【详解】设 $P\left(x_0, y_0\right)$，由 $B(0,b)$，因为 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$，所以

$$|PB|^2=x_0^2+\left(y_0-b\right)^2=a^2\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\left(y_0-b\right)^2=-\frac{c^2}{b^2}\left(y_0+\frac{b^3}{c^2}\right)^2+\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2,$$

因为 $-b\le y_0\le b$，当 $-\frac{b^3}{c^2}\le -b$，即 $b^2\ge c^2$ 时，$|PB|_{\max}^2=4b^2$，即 $|PB|_{\max}=2b$，符合题意，由 $b^2\ge c^2$ 可得 $a^2\ge 2c^2$，即 $0<e\le\frac{\sqrt{2}}{2}$；

当 $-\frac{b^3}{c^2}>-b$，即 $b^2<c^2$ 时，$|PB|_{\max}^2=\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2$，即 $\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2\le 4b^2$，化简得，$\left(c^2-b^2\right)^2\le 0$，显然该不等式不成立.

故选：C.

【点睛】本题解题关键是如何求出 $|PB|$ 的最大值，利用二次函数求指定区间上的最值，要根据定义域讨论函数的单调性从而确定最值.

二、填空题（共 25 分）

11. 【答案】$(6,3,2)$（答案不唯一）

【解析】

【分析】首先表示出 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即可得到不定方程组，取值即可；

【详解】解：因为 $A(1,0,0),B(0,2,0),C(0,0,3)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$，

设平面 ABC 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+2y=0\\ -x+3z=0\end{cases}$，令 $x=6$，则 $y=3$，$z=2$，

所以 $\vec{n}=(6,3,2)$；

故答案为：$(6,3,2)$（答案不唯一）

12. 【答案】8

【解析】

【分析】

先由直线 l 的倾斜角求出其斜率，然后根据与 l 垂直求出的斜率并解得 a，最后由 l_1 与 l_2 平行解得 b，得到 $a+b$.

【详解】由直线 l 的倾斜角为 $45°$，则 l 的斜率 $k=\tan 45°=1$，由 l_1 与 l 垂直，

则 $a\neq 3$ 且 l_1 的斜率 $k_1=\dfrac{-1-2}{a-3}=-1$，得 $a=6$，

又由 l_1 与 l_2 平行，则 l_2 斜率 $k_2=-\dfrac{2}{b}=-1$，得 $b=2$，则 $a+b=8$.

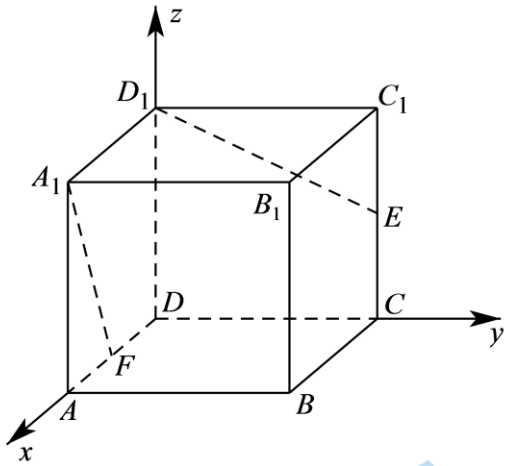
故答案为：8

13. 【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】

【分析】由已知，根据题意建立空间直角坐标系，分别表示出各点坐标，然后通过异面直线 D_1E 和 A_1F 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$，即可列式计算.

【详解】



以 D 为原点，以 DA，DC，DD_1 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系.

正方体的棱长为 2，则 $A_1(2，0，2)$，$D_1(0，0，2)$，$E(0，2，1)$，$A(2，0，0)$.

所以 $\overrightarrow{D_1E}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{A_1F}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{A_1A}+\lambda\overrightarrow{AD}=(0,0,-2)+\lambda(-2,0,0)=(-2\lambda,0,-2)$，

所以 $\left|\cos\langle\overrightarrow{A_1F},\overrightarrow{D_1E}\rangle\right|=\dfrac{\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{D_1E}}{\left|\overrightarrow{A_1F}\right|\left|\overrightarrow{D_1E}\right|}=\dfrac{2}{2\sqrt{\lambda^2+1}\cdot\sqrt{5}}$，

所以 $\dfrac{2}{2\sqrt{5}\sqrt{\lambda^2+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$（舍去）.

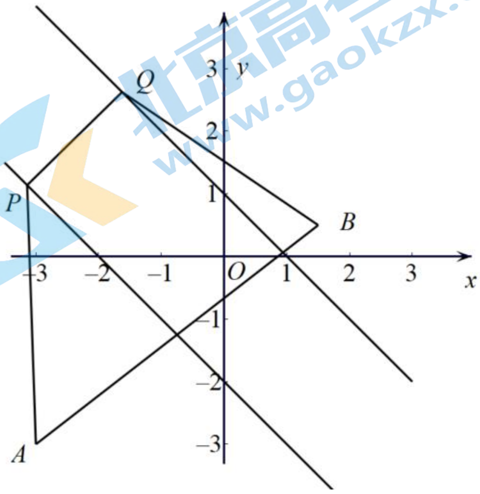
故答案为：$\frac{1}{3}$.

14. 【答案】$\sqrt{13}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】根据平行线间距离公式可得$|PQ|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，设$P(a,\ -a-2)$，$Q\left(a+\frac{3}{2},\ -a-\frac{1}{2}\right)$，由两点间距离公式可表达出$|AP|+|PQ|=\sqrt{(a+3)^2+(a-1)^2}+\sqrt{a^2+(a+1)^2}$，结合几何意义以及图形即可求解最小值.

【详解】由平行线距离公式得：$|PQ|=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

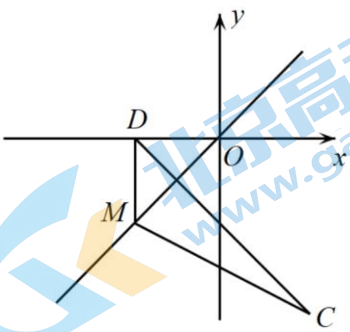


设$P(a,\ -a-2)$，则$Q\left(a+\frac{3}{2},\ -a-\frac{1}{2}\right)$，

所以$|AP|+|PQ|+|QB|=\sqrt{(a+3)^2+(-a+1)^2}+\sqrt{a^2+(-a-1)^2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{(a+3)^2+(a-1)^2}+\sqrt{a^2+(a+1)^2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

设点$M(a,\ a)$，$C(1,\ -3)$，$D(-1,0)$，如下图：



则有：$\sqrt{(a+3)^2+(a-1)^2}+\sqrt{a^2+(a+1)^2}=|MC|+|MD|\ge|CD|=\sqrt{13}$

（即当D、M、C三点共线时等号成立），

综上，$|AP|+|PQ|+|QB|\ge\sqrt{13}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

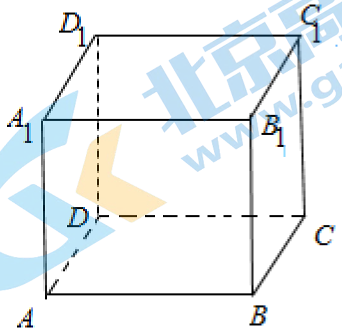
故答案为：$\sqrt{13}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

15. 【答案】$\left(\sqrt{2}+1\right)\pi$

【解析】

【分析】首先根据条件确定P点所处的平面，再建立坐标系求出动点P的轨迹方程，据此求出轨迹的长.

【详解】由$|PA|=\sqrt{2}|PB|, AB=2$可知，正方体表面上到点A距离最远的点为C_1，



所以P点只可能在面ABB_1A_1，面$ABCD$，面BB_1C_1C上运动，

当P在面$ABCD$上运动时，如图示，建立平面直角坐标系，

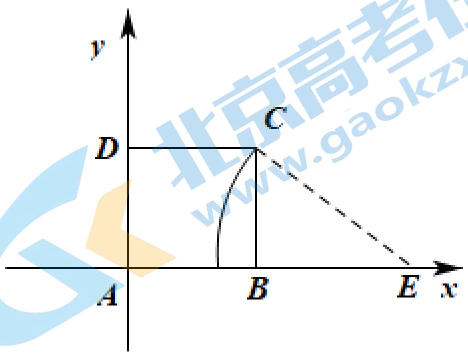
则$A(0,0), B(2,0)$，

设$P(x,y)$，由$|PA|=\sqrt{2}|PB|$得：$x^2+y^2=2[(x-2)^2+y^2]$，

即$(x-4)^2+y^2=8$，即P点在平面ABCD内的轨迹是以E（4,0）为圆心，以$2\sqrt{2}$为半径的一段圆弧，

因为$EA=2\sqrt{2}, BE=2$，故$\angle BEC=\frac{\pi}{4}$，

所以P点在面ABCD内的轨迹的长即为$\frac{\pi}{4}\times2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$



同理，P 点在面 ABB_1A_1 内情况亦为 $\frac{\pi}{4}\times2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$；

P 点在面 BB_1C_1C 上时，因为 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，$\angle PBA=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\angle PAB=\frac{\pi}{4},PB=2$，

所以此时 P 点轨迹为以 B 为圆心，2 为半径的圆弧，

其长为 $\frac{1}{4}\times2\pi\times2=\pi$ ，

综上述，P 点运动轨迹的周长为 $2\times\frac{\sqrt{2}\pi}{2}+\pi=(\sqrt{2}+1)\pi$ ，

故答案为：$\left(\sqrt{2}+1\right)\pi$.

三、解答题（共 85 分）

16. 【答案】（1） $x+y-7=0$；（2） $19x+y+7=0$.

【解析】

【分析】（1）设点 B 的坐标为 (a,b)，由直线 AB 与直线 $x-y-3=0$ 垂直，得出直线 AB 的斜率为 -1，再由点 B 在直线 $3x+y-7=0$ 上，可得出关于 a、b 的方程组，解出这两个未知数的值，即可求出 AB 边所在的直线方程；

（2）设点 C 的坐标为 (m,n)，由 AC 的中点 D 在直线 $3x+y-7=0$ 上以及点 C 在直线 $x-y-3=0$ 上建立方程组，求出点 C 的坐标，由此可求出 BC 边所在的直线方程.

【详解】（1）设点 B 的坐标为 (a,b)，直线 $x-y-3=0$ 的斜率为 1，

由于直线 AB 与直线 $x-y-3=0$ 垂直，则直线 AB 的斜率为 $\frac{b-3}{a-4}=-1$，整理得 $a+b-7=0$，

又因为点 B 在直线 $3x+y-7=0$，则 $3a+b-7=0$，

所以 $\begin{cases}a+b-7=0\\3a+b-7=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=0\\b=7\end{cases}$，即点 B 的坐标为 $(0,7)$，

因此，AB 边所在的直线方程为 $y=-x+7$，即 $x+y-7=0$；

（2）设点 C 的坐标为 (m,n)，由 AC 的中点 $D\left(\frac{m+4}{2},\frac{n+3}{2}\right)$ 在直线 $3x+y-7=0$ 上，

所以 $\frac{3(m+4)}{2}+\frac{n+3}{2}-7=0$，整理得 $3m+n+1=0$，

又因为点 C 在直线 $x-y-3=0$ 上，$\therefore m-n-3=0$，

所以$\begin{cases}3m+n+1=0\\ m-n-3=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\ n=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$，即点$C\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$.

则直线BC的斜率为$\dfrac{7+\dfrac{5}{2}}{0-\dfrac{1}{2}}=-19$，

因此，BC边所在直线的方程为$y=-19x+7$，即$19x+y-7=0$.

【点睛】本题考查三角形的边所在直线方程的求解，解题的关键就是确定顶点的坐标，根据题意建立方程组求顶点坐标是解题的关键，考查计算能力，属于中等题.

17. 【答案】(1) $\dfrac{\sqrt{42}}{42}$；(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

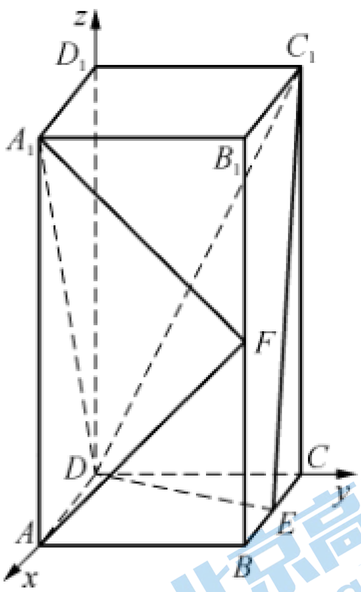
【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，写出各点坐标，

(1) 设出平面C_1DE的法向量，利用空间向量数量积求得法向量，设直线AF与平面C_1DE所成角为α，利用线面角的正弦值为直线的方向向量与平面法向量的余弦值的绝对值即可.

(2) 分别求出两个面的法向量，利用空间向量数量积公式求得二面角的余弦值.

【详解】以DA为x轴，DC为y轴，DD_1为z轴，建立如图的空间坐标系.则$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,4)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,2,4)$，$E(1,2,0)$，$F(2,2,2)$.



(1) 设平面C_1DE的法向量$\vec{n}=(x,y,1)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,y,1)\cdot(1,2,0)=0\\ (x,y,1)\cdot(0,2,4)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0\\ 2y+4=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(4,-2,1).$$

设直线 AF 与平面 C_1DE 所成角为 α，则 $\sin\alpha=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AF}|}\right|=\dfrac{\sqrt{42}}{42}$.

（2）平面 AA_1F 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$，设平面 A_1DF 的法向量 $\overrightarrow{n_2}$，则 $\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DF}=0$ 且 $\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$，

解得 $\overrightarrow{n_2}=(-2,1,1)$.

设二面角 $A-A_1F-D$ 为 β，由图可知，是 β 锐角，所以 $\cos\beta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

即二面角 $A-A_1F-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【点睛】本题主要考查线面角及二面角的求法，意在考查学生的数学运算的学科素养，属中档题.

18. 【答案】（1）$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

（2）$y=-\dfrac{3}{4}x$ 或 $x+y+5\sqrt{2}-7=0$ 或 $x+y-5\sqrt{2}-7=0$

【解析】

【分析】（1）设圆心 $C(a,b)$，半径为 r，然后根据条件建立方程组求解即可；

（2）分直线 l 经过原点、直线 l 不经过原点两种情况求解即可.

【小问 1 详解】

根据题意，设圆心 $C(a,b)$，半径为 r，标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

圆 C 经过点 $A(0,0)$，$B(7,7)$，圆心在直线 $y=\dfrac{4}{3}x$ 上，

则有 $\begin{cases}a^2+b^2=r^2\\(a-7)^2+(b-7)^2=r^2\\b=\dfrac{4a}{3}\end{cases}$，解可得 $\begin{cases}a=3\\b=4\\r=5\end{cases}$，

则圆 C 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$，

【小问 2 详解】

若直线 l 与圆 C 相切且与 x，y 轴截距相等，分 2 种情况讨论：

①直线 l 经过原点，设直线 l 的方程为 $y=kx$，则有 $\dfrac{|3k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=5$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$，此时直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4}x$；

②直线 l 不经过原点，设直线 l 的方程为 $x+y-m=0$，则有 $\dfrac{|7-m|}{\sqrt{1+1}}=5$，解得 $m=7+5\sqrt{2}$ 或 $7-5\sqrt{2}$，

此时直线 l 方程为 $x+y+5\sqrt{2}-7=0$ 或 $x+y-5\sqrt{2}-7=0$；

综合可得：直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4}x$ 或 $x+y+5\sqrt{2}-7=0$ 或 $x+y-5\sqrt{2}-7=0$.

19. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 先取 PC 的中点 M，连接 DM，得 $DM\perp PC$，利用面面垂直的性质定理得 $DM\perp$ 平面 PBC，进而得到 $DM\perp BC$，再由线面垂直的判定定理证明 $BC\perp$ 平面 PDC，得到 $BC\perp PD$，最后利用线面垂直的判定定理，即可得证；

(2) 先取 AB 的中点 Q，连接 DQ，得到 DQ，DC，DP 两两垂直，然后建立空间直角坐标系，分别求出平面 PAD 和平面 PAC 的法向量，最后利用向量的夹角公式即可得解.

【小问 1 详解】

解：取 PC 的中点 M，连接 DM，

因为 $PD=DC$，所以 $DM\perp PC$，

由平面 $PBC\perp$ 平面 PDC，平面 $PBC\cap$ 平面 $PDC=PC$，所以 $DM\perp$ 平面 PBC，

又由 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $DM\perp BC$，

又因为 $DC\perp BC$，$DC\cap DM=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PDC，

因为 $PD\subset$ 平面 PDC，所以 $BC\perp PD$.

又 $DC\perp PD$，$BC\cap DC=C$，所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$.

【小问 2 详解】

解：取 AB 的中点 Q，连接 DQ，

因为 $\angle DCB=\angle CBQ=90^\circ$，$DC=\dfrac{1}{2}AB=1$，所以 $DQ\perp DC$，

由 (1) 易知 $PD\perp DQ$，$PD\perp DC$，

以 D 为坐标原点，以 DQ，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图所示

则 $D(0,0,0)$，$A(1,-1,0)$，$P(0,0,1)$，$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{PA}=(1,-1,-1)$.

连接 BD，易知 $BD=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{2}$，

由 $AB=2$，所以 $AD^2+BD^2=AB^2$，所以 $BD\perp AD$，

又 $BD\perp PD$，$AD\cap PD=D$，所以 $BD\perp$ 平面 PAD，

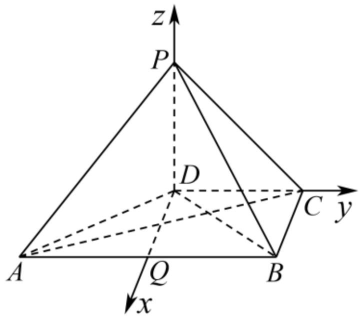
则平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}$，可得 $\begin{cases}-x+2y=0\\ x-y-z=0\end{cases}$，

取 $y=1$，可得 $x=2,z=1$，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{m}=(2,1,1)$，

所以$\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{DB}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\vec{m}||\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又由二面角$D-PA-C$为锐二面角，所以二面角$D-PA-C$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



20. 【答案】（1）$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（2）$x-y+2=0$

【解析】

【分析】（1）依题可知，$c=2\sqrt{2}$，$a=2\sqrt{3}$，根据a,b,c的关系求出b^2，即可写出椭圆的方程；

（2）先设出直线$y=x+m$，联立可得出AB中点$E(x_0,y_0)$ 坐标，再根据$\triangle PAB$为等腰三角形知$PE\perp AB$，解得中点坐标，即可写出直线方程.

【小问1详解】

由已知得$c=2\sqrt{2}$，而$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，解得$a=2\sqrt{3}$，所以$b^2=a^2-c^2=4$，

故椭圆G的方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

【小问2详解】

设直线l的方程为$y=x+m$，由$\begin{cases}y=x+m\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$得$4x^2+6mx+3m^2-12=0$

设A、B的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，AB中点为$E(x_0,y_0)$，

则$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{3m}{4}$，$y_0=x_0+m=\dfrac{m}{4}$，

因为AB是等腰$\triangle PAB$的底边，所以$PE\perp AB$.

所以PE的斜率为$k=\dfrac{2-\dfrac{m}{4}}{-3+\dfrac{3m}{4}}=-1$，解得$m=2$，即$x_0=-\dfrac{3}{2},y_0=\dfrac{1}{2}$，所以直线$AB$的方程为

$y-\frac{1}{2}=x+\frac{3}{2}$，即 $x-y+2=0$．

21．【答案】（1）$y=x$ 或 $y=x-4$

（2）存在，两个　　（3）$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$

【解析】

【分析】（1）设出直线 l 的方程，利用点到直线距离公式和垂径定理进行求解；（2）解设存在 $P(x,y)$，根据条件得到 $P(x,y)$ 满足的关系式 $x^2+(y-1)^2=4$，是一个圆，根据两圆的位置关系得到点 P 的个数；（3）设出 Q 与 N 点坐标，表达出 M 点坐标，根据题干条件得到以 $(1,2)$ 为圆心，r 为半径的圆与以 $(2-t,4)$ 为圆心，$2r$ 为半径的圆有公共点，所以 $(2r-r)^2\leqslant(t-1)^2+4\leqslant(2r+r)^2$ 对 $t\in[-1,2]$ 恒成立，根据 $4\leqslant(t-1)^2+4\leqslant8$ 得到不等式组，结合 Q 在圆 B 外，最终求得圆 B 的半径 r 的取值范围.

【小问 1 详解】

圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，所以 $C(2,0)$，半径为 2，其中 $k_{AB}=\frac{2-0}{1+1}=1$，因为 l 平行于 AB，所以设直线 l 的方程为 $y=x+m$，

则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m+2|}{\sqrt{2}}$，

因为 $DE=AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}=2\sqrt{4-d^2}$，

解得 $m=0$ 或 $m=-4$，

所以直线 l 的方程为 $y=x$ 或 $y=x-4$；

【小问 2 详解】

假设圆上存在点 P，设 $P(x,y)$，则 $(x-2)^2+y^2=4$，

又 $PA^2+PB^2=(x+1)^2+(y-0)^2+(x-1)^2+(y-2)^2=12$，即 $x^2+(y-1)^2=4$，

因为 $2-2<\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}<2+2$，

则圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 相交，所以点 P 的个数为 2；

【小问 3 详解】

设点 $Q(t,0),-1\leqslant t\leqslant2$，$N(x,y)$，由于点 M 是线段 QN 的中点，则 $M\left(\frac{x+t}{2},\frac{y}{2}\right)$，

又 M,N 都在半径为 r 的圆 B 上，

所以$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=r^2\\ \left(\dfrac{x+t}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}-2\right)^2=r^2\end{cases}$，即$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=r^2\\ (x+t-2)^2+(y-4)^2=(2r)^2\end{cases}$，

由方程组有解，即以$(1,2)$为圆心，r为半径的圆与以$(2-t,4)$为圆心，$2r$为半径的圆有公共点，所以

$(2r-r)^2\leqslant(t-1)^2+4\leqslant(2r+r)^2$对$t\in[-1,2]$恒成立，

又$4\leqslant(t-1)^2+4\leqslant8$，所以$r^2\leqslant4$且$9r^2\geqslant8$，解得$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant r\leqslant2$，

又Q在圆B外，所以$(t-1)^2+4>r^2$恒成立，

所以$r^2<4$，即$0<r<2$，

所以B的半径r的取值范围为$\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$.

【点睛】与圆有关的探索问题的解决方法：

第一步：假设符合要求的结论存在.

第二步：从条件出发(即假设)利用直线与圆的关系求解.

第三步：确定符合要求的结论存在或不存在.

第四步：给出明确结果.

第五步：反思回顾，查看关键点，易错点及答题规范.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。