

# 2023 北京四中高三 3 月月考

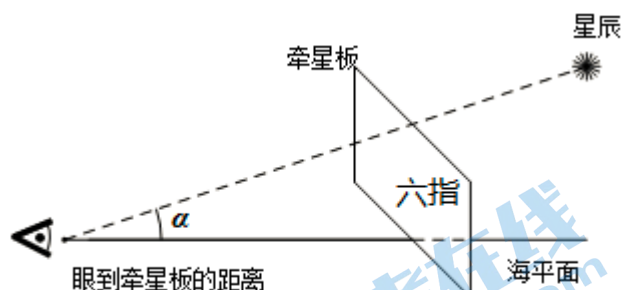
## 数 学

(试卷满分: 150 分 考试时间: 120 分钟)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- 已知集合  $A = \{x | 1 < 2^x \leq 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
A.  $(1, 2]$  B.  $[1, 2]$  C.  $\{1, 2\}$  D.  $\{1\}$
- 复数  $z = \frac{1-2i}{2+i}$  的模  $|z| =$  ( )  
A.  $\sqrt{2}$  B. 2 C.  $\sqrt{5}$  D. 1
- 设  $l, m$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 下列说法正确的是 ( )  
A. 若  $l // \alpha, m // \alpha$ , 则  $l // m$  B. 若  $l // \alpha, l // \beta$ , 则  $\alpha // \beta$   
C. 若  $l \perp \alpha, m \perp \alpha$ , 则  $l // m$  D. 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha // \beta$
- 设  $x \in \mathbb{R}$ , 则“ $\sin x = 1$ ”是“ $\cos x = 0$ ”的 ( )  
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 设  $\{a_n\}$  是等差数列. 下列结论中正确的是  
A. 若  $a_1 + a_2 > 0$ , 则  $a_2 + a_3 > 0$  B. 若  $a_1 + a_3 < 0$ , 则  $a_1 + a_2 < 0$   
C. 若  $0 < a_1 < a_2$ , 则  $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$  D. 若  $a_1 < 0$ , 则  $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$
- 已知  $2023^a = 2035$ ,  $2035^b = 2023$ ,  $c = \log_{2050} 2023$ , 则 ( )  
A.  $a^c < b^c$  B.  $c^a < c^b$  C.  $\log_a c > \log_b c$  D.  $\log_c a > \log_c b$
- 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知  $P$  是圆  $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$  上的动点. 若  $A(-a, 0)$ ,  $B(a, 0)$ ,  $a \neq 0$ , 则  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$  的最大值为 ( )  
A. 16 B. 12 C. 8 D. 6
- 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ), 在区间  $[a, b]$  上是增函数, 且  $f(a) = -A$ ,  $f(b) = A$ , 则函数  $g(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  在  $[a, b]$  上 ( )  
A. 单调递增 B. 单调递减 C. 最大值为  $A$  D. 最小值为  $-A$
- 明朝早起, 郑和七下西洋过程中, 将中国古代天体测量方面所取得的成就创造性地应用于航海, 形成了一套先进的航海技术——“过洋牵星术”, 简单地说, 就是通过观测不同季节、时辰的日月星辰在天空运行的位置和测量星辰在海面以上的高度来判断水位. 其采用的主要工具是牵星板, 其由 12 块正方形模板组成,

最小的一块边长约 2cm (称一指), 木板的长度按从小到大均两两相差 2cm, 最大的边长约 24cm (称十二指). 观测时, 将木板立起, 一手拿着木板, 手臂伸直, 眼睛到木板的距离大约为 72cm, 使牵星板与海平面垂直, 让板的下缘与海平面重合, 上边缘对着所观测的星辰依高低不停替换、调整木板, 当被测星辰落在木板上边缘时所用的是几指板, 观测的星辰离海平面的高度就是几指, 然后就可以推算出船在海中的地理纬度. 如图所示, 若在一次观测中, 所用的牵星板为六指板, 则  $\sin 2\alpha$  约为 ( )



- A.  $\frac{12}{35}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{6}$       D.  $\frac{12}{37}$

10. 给定函数  $f(x)$ , 若数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , 则称数列  $\{x_n\}$  为函数  $f(x)$  的牛顿数列. 已知  $\{x_n\}$  为  $f(x) = x^2 - x - 2$  的牛顿数列,  $a_n = \ln \frac{x_n - 2}{x_n + 1}$ , 且  $a_1 = 1, x_n > 2 (n \in \mathbf{N}_+)$ , 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 则  $S_{2023} =$  ( )

- A.  $2^{2023} - 1$       B.  $2^{2024} - 1$   
C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2022} - 1$       D.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2023} - 1$

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知抛物线  $y^2 = 2px$  的准线方程为  $x = -1$ , 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

12.  $(1+2x)^5$  的展开式中  $x^3$  项的系数为 \_\_\_\_\_.

13. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  的渐近线与圆  $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$  相切, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 能够说明“若  $a > b$ , 则  $\frac{1}{a + \sqrt[3]{a}} < \frac{1}{b + \sqrt[3]{b}}$ ”是假命题的一组非零实数  $a, b$  的值依次为 \_\_\_\_\_.

15. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,  $P$  是空间中任意一点. 给出下列四个结论:

①若点  $P$  在线段  $AD_1$  上运动, 则始终有  $C_1P \perp CB_1$ ;

②若点  $P$  在线段  $AA_1$  上运动, 则过  $P, B, D_1$  三点的正方体截面面积的最小值为  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ;

③若点  $P$  在线段  $AD_1$  上运动, 三棱锥  $D - BPC_1$  体积为定值;

④若点  $P$  在线段  $A_1B$  上运动, 则  $AP + PD_1$  的最小值为  $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ .

其中所有正确结论的序号有\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ . 已知  $b \sin A = \sqrt{3}a \cos B$ .

(1) 求角  $B$  的大小;

(2) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使得  $\triangle ABC$  存在且唯一确定, 求  $\triangle ABC$  的面积.

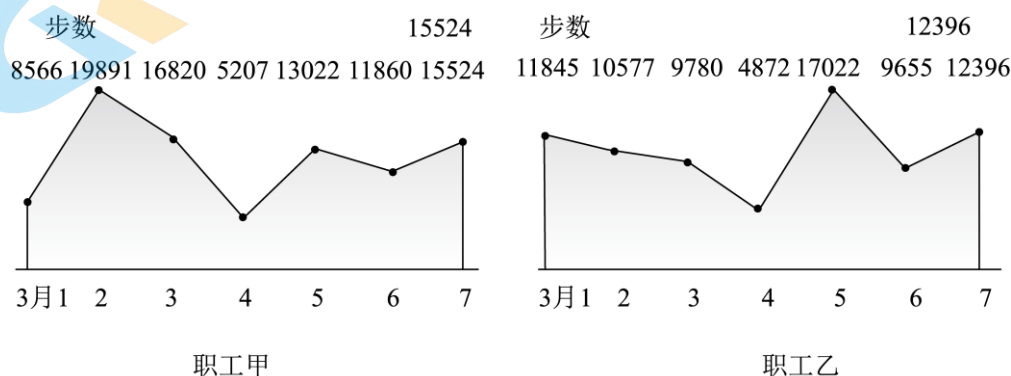
条件①:  $a = 4, b = 3$ ;

条件②:  $c - a = 1, b = \sqrt{7}$ ;

条件③:  $c = 3, \cos C = \frac{\sqrt{7}}{14}$ .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

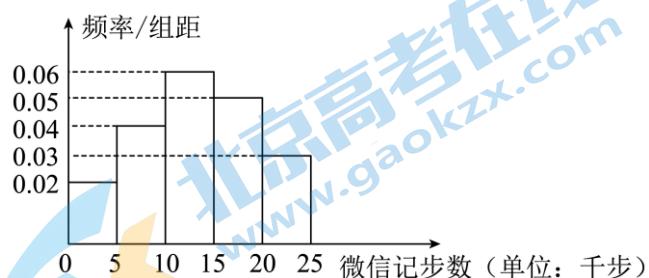
17. 某校工会开展健步走活动, 要求教职工上传 3 月 1 日至 3 月 7 日的微信记步数信息, 下图是职工甲和职工乙微信记步数情况:



(1) 从 3 月 2 日至 3 月 7 日中任选一天, 求这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000 的概率;

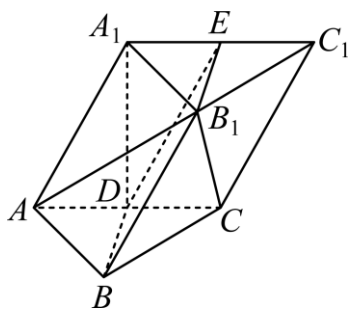
(2) 从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选两天, 记职工乙在这两天中微信记步数不低于 10000 的天数为  $X$ , 求  $X$  的分布列及数学期望;

(3) 下图是校工会根据 3 月 1 日至 3 月 7 日某一天的数据制作的全校 200 名教职工微信记步数的频率分布直方图. 已知这一天甲和乙微信记步数在单位 200 名教职工中排名 (按照从大到小排序) 分别为第 68 和第 142, 请指出这是根据哪一天的数据制作的频率分布直方图 (不用说明理由).



18. 如图所示, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $D$  是  $AC$  中点,  $A_1D \perp$  平面  $ABC$ , 平面  $BB_1D$  与棱  $A_1C_1$  交于

点  $E$ ， $AA_1 = AC = 2$ ， $AB = BC$



(1) 求证:  $BB_1 \parallel DE$ ;

(2) 若  $B_1C$  与平面  $A_1ABB_1$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ , 求三棱锥  $C-ABB_1$  的体积.

19. 已知  $F_1$ ,  $F_2$  分别为椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点, 点  $M(0, -1)$  为椭圆的一个顶点,

$\triangle F_1MF_2$  是顶角为  $120^\circ$  的等腰三角形.

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 过点  $M$  分别作直线  $MA$ ,  $MB$  交椭圆  $E$  于  $A$ ,  $B$  两点, 设两直线的斜率分别为  $k_1$ ,  $k_2$ , 且  $k_1 + k_2 = 4$ , 求证: 直线  $AB$  过定点.

20. 已知函数  $f(x) = \sin x - (x+a)\cos x$ , 函数  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上的单调性;

(2) 当  $a \geq 0$  时, 证明: 曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  有且只有一个公共点.

21. 已知集合  $M = \{1, 2, 3, \dots, n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 若集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq M (m \in \mathbf{N}^*)$ , 且对任意的  $b \in M$ , 存在  $a_i, a_j \in A (1 \leq i < j \leq m)$ , 使得  $b = \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_j$  (其中  $\lambda_1, \lambda_2 \in \{-1, 0, 1\}$ ), 则称集合  $A$  为集合  $M$  的一个  $m$  元基底.

(1) 分别判断下列集合  $A$  是否为集合  $M$  的一个二元基底, 并说明理由;

①  $A = \{1, 5\}$ ,  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;

②  $A = \{2, 3\}$ ,  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

(2) 若集合  $A$  是集合  $M$  的一个  $m$  元基底, 证明:  $m(m+1) \geq n$ ;

(3) 若集合  $A$  为集合  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的一个  $m$  元基底, 求出  $m$  的最小可能值, 并写出当  $m$  取最小值时  $M$  的一个基底  $A$ .

## 参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】C

【解析】

【分析】由指数函数的单调性解不等式，再求交集.

【详解】因为  $A = \{x | 1 < 2^x \leq 4\} = \{x | 0 < x \leq 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 1\}$ , 所以  $A \cap B = \{1, 2\}$ .

故选: C

2. 【答案】D

【解析】

【分析】首先根据题意得到  $z = -i$ , 再求模长即可.

【详解】 $z = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i-4i-2}{5} = -i$ ,

所以  $|z| = 1$ .

故选: D

3. 【答案】C

【解析】

【分析】根据直线与直线的位置关系、直线与平面的位置关系和平面与平面的位置关系依次判断选项即可.

【详解】对选项 A, 若  $l // \alpha$ ,  $m // \alpha$ , 则  $l$  与  $m$  的位置关系是平行, 相交和异面, 故 A 错误.

对选项 B, 若  $l // \alpha$ ,  $l // \beta$ , 则  $\alpha$  与  $\beta$  的位置关系是平行和相交, 故 B 错误.

对选项 C, 若  $l \perp \alpha$ ,  $m \perp \alpha$ , 则根据线面垂直的性质得  $l$  与  $m$  的位置关系是平行, 故 C 正确.

对选项 D, 若  $\alpha \perp \gamma$ ,  $\beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha$  与  $\beta$  的位置关系是平行和相交, 故 D 错误.

故选: C

4. 【答案】A

【解析】

【分析】由三角函数的性质结合充分条件、必要条件的定义即可得解.

【详解】因为  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  可得:

当  $\sin x = 1$  时,  $\cos x = 0$ , 充分性成立;

当  $\cos x = 0$  时,  $\sin x = \pm 1$ , 必要性不成立;

所以当  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin x = 1$  是  $\cos x = 0$  的充分不必要条件.

故选: A.

5. 【答案】C

【解析】

【详解】先分析四个答案，A 举一反例  $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = -4$ ， $a_1 + a_2 > 0$  而  $a_2 + a_3 < 0$ ，A 错误，B 举同样反例  $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = -4$ ， $a_1 + a_3 < 0$ ，而  $a_1 + a_2 > 0$ ，B 错误，

D 选项， $a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = -d, \therefore (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) = -d^2 \leq 0$ ，故 D 错，

下面针对 C 进行研究， $\{a_n\}$  是等差数列，若  $0 < a_1 < a_2$ ，则  $a_1 > 0$ ，设公差为  $d$ ，则  $d > 0$ ，数列各项均为

正，由于  $a_2^2 - a_1 a_3 = (a_1 + d)^2 - a_1(a_1 + 2d) = a_1^2 + 2a_1 d + d^2 - a_1^2 - 2a_1 d = d^2 > 0$ ，则  $a_1^2 > a_1 a_3$

$$\Rightarrow a_1 > \sqrt{a_1 a_3},$$

故选 C.

考点：本题考点为等差数列及作差比较法，以等差数列为载体，考查不等关系问题，重点是对知识本质的考查.

#### 6. 【答案】B

【解析】

【分析】由换底公式结合对数函数的单调性得出  $a > 1 > b > c > 0$ ，继而由幂函数、指数函数、对数函数的单调性作出判断即可.

【详解】 $a = \log_{2023} 2035 > \log_{2023} 2023 = 1$ ， $b = \log_{2035} 2023 < \log_{2035} 2035 = 1$ .

因为  $b = \frac{1}{\log_{2023} 2035}$ ， $c = \frac{1}{\log_{2023} 2050}$ ，且  $\log_{2023} 1 = 0 < \log_{2023} 2035 < \log_{2023} 2050$ ，

所以  $b > c > 0$ ，即  $a > 1 > b > c > 0$ .

由幂函数的性质可知， $a^c > b^c$ ，故 A 错误；

由指数函数的性质可知， $c^a < c^b$ ，故 B 正确；

因为  $\log_b c > \log_b 1 = 0$ ， $\log_a c < \log_a 1 = 0$ ，所以  $\log_a c < \log_b c$ ，故 C 错误；

由对数函数的性质可知， $\log_c a < \log_c b$ ，故 D 错误；

故选：B

#### 7. 【答案】B

【解析】

【分析】根据题意得到  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 2|\overrightarrow{PO}|$ ， $|\overrightarrow{PO}|_{\max} = |\overrightarrow{OC}| + 1$ ，即可得到答案.

【详解】因为  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 2|\overrightarrow{PO}|$ ， $|\overrightarrow{PO}|_{\max} = |\overrightarrow{OC}| + 1 = \sqrt{3^2 + 4^2} + 1 = 6$ ，

所以  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|_{\max} = 12$ .

故选：B

#### 8. 【答案】C

【解析】

【分析】由正弦函数的性质确定  $\omega x + \varphi$  的范围，进而由余弦函数的单调性得出结论.

【详解】函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是增函数，且  $f(a) = -A$ ， $f(b) = A$ ， $\omega > 0$ ，

则当  $x \in [a, b]$  时， $\omega x + \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$ 。

而函数  $y = \cos x$  在  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$  上先增后减，

即函数  $g(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  在  $[a, b]$  上先增后减，有最大值  $A$ 。

故选：C

9. 【答案】D

【解析】

【分析】根据题意得到六指，进而得到  $\tan \alpha$ ，再结合二倍角的正弦公式和商数关系求解。

【详解】由题意知：六指为  $2 + 5 \times \frac{24-2}{12-1} = 12$ ，

所以  $\tan \alpha = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$ ，

所以  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ ，

$$= \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{2 \times \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1} = \frac{12}{37}.$$

故选：D

10. 【答案】A

【解析】

【分析】由导数结合题设条件得出  $\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1} = \left(\frac{x_n-2}{x_n+1}\right)^2$ ，两边取对数，结合等比定义以及求和公式求解即可。

【详解】 $f'(x) = 2x - 1$ ， $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n - 1}$ ，

$$\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1} = \frac{\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}-2}{\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}+1} = \left(\frac{x_n-2}{x_n+1}\right)^2$$
，则两边取对数可得  $\ln \frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1} = 2 \ln \frac{x_n-2}{x_n+1}$ 。

即  $a_{n+1} = 2a_n$ ，所以数列  $\{a_n\}$  是以 1 为首项，2 为公比的等比数列。

所以  $S_{2023} = \frac{1 \times (1 - 2^{2023})}{1 - 2} = 2^{2023} - 1$ 。

故选：A

## 二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】2

【解析】

【分析】由抛物线的准线方程可直接求解.

【详解】由抛物线  $y^2 = 2px$ ，得准线方程为  $x = -\frac{p}{2}$ ，

由题意， $-\frac{p}{2} = -1$ ，得  $p = 2$ .

故答案为：2.

12. 【答案】80

【解析】

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第  $r+1$  项，令  $x$  的指数为 3 即可求解.

【详解】解：由  $(1+2x)^5$  得， $T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^r = C_5^r \cdot 2^r \cdot x^r$

令  $r = 3$ ， $T_4 = C_5^3 \cdot 2^3 \cdot x^3 = 80x^3$

故答案为：80.

13. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】求出双曲线的渐近线方程，利用圆心到渐近线的距离等于圆的半径可求得  $a$  的值.

【详解】由  $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$  得  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ，所以圆心为  $(0, 2)$ ，半径为 1，

双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{x}{a}$ ，即  $x \pm ay = 0$ ，

因为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  的渐近线与圆  $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$  相切，

所以  $\frac{|2a|}{\sqrt{1+a^2}} = 1$ ，化简得  $3a^2 = 1$ ，解得  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ （舍去）.

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

14. 【答案】1，-1(答案不唯一)

【解析】

【分析】根据反比例函数在各自象限具有单调性知：在各区间取一个数即  $a > 0 > b$  有  $\frac{1}{a+\sqrt[3]{a}} > \frac{1}{b+\sqrt[3]{b}}$ ，

即可确定  $a, b$  的值.

【详解】只要第 1 个数大于 0，第 2 个数小于 0 即可，即  $a > 0 > b$ ，

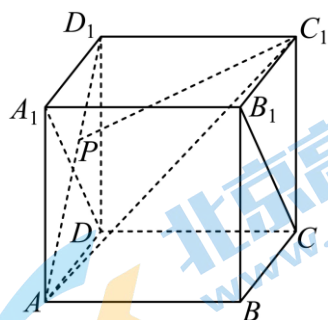
故答案为：1，-1.

15. 【答案】①③④

【解析】

【分析】由  $CB_1 \perp$  平面  $AC_1D_1$  判断①；由向量法判断②；由等体积法判断③；将  $\triangle AA_1B$  与四边形  $A_1D_1CB$  沿  $A_1B$  展开在同一平面上，由余弦定理得出  $AP + PD_1$  的最小值.

【详解】对于①：如下图，连接  $A_1D$ ，所以  $B_1C \parallel A_1D$ ，又  $A_1D \perp AD_1$ ，所以  $B_1C \perp AD_1$ ，因为  $C_1D_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ，所以  $C_1D_1 \perp CB_1$ ，由线面垂直的判定可知， $CB_1 \perp$  平面  $AC_1D_1$ ，因为  $C_1P \subset$  平面  $AC_1D_1$ ，所以  $C_1P \perp CB_1$ ，故①正确；

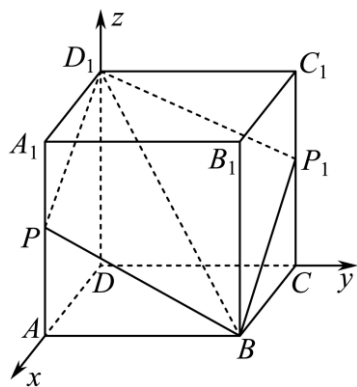


对于②：在  $C_1C$  上取一点  $P_1$ ，使得  $|AP| = |C_1P_1| = a, a \in [0, 1]$ ，连接  $D_1P_1, P_1B, PD_1, PB$ ，

易知  $PB \parallel D_1P_1$ ，且  $PB = D_1P_1$ ，即  $P, B, D_1, P_1$  四点共面，

即过  $P, B, D_1$  三点的截面为截面  $PBD_1P_1$ .

以点  $D$  为坐标原点，建立如下图所示的坐标系：



$B(1,1,0), D_1(0,0,1), P(1,0,a), P_1(0,1,1-a)$ ， $\overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1), \overrightarrow{BP} = (0, -1, a)$

因为  $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{3}, |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{1+a^2}$ ， $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 1+a$ ，

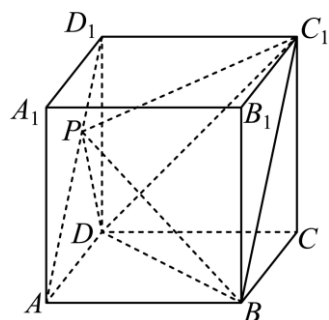
所以截面  $PBD_1P_1$  的面积为  $S = 2S_{\triangle BPD_1} = |\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BD_1}| \sin \angle PBD_1 = \sqrt{(|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BD_1}|)^2 - (\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BD_1})^2}$

$$= \sqrt{3+3a^2-1-2a-a^2} = \sqrt{2} \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$$

当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $P, B, D_1$  三点的正方体截面面积最小值为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , 故②错误;

对于③: 如下图, 由已知得  $B_1C \parallel A_1D$ , 所以直线  $A_1D$  上所有点到平面  $B_1CD$

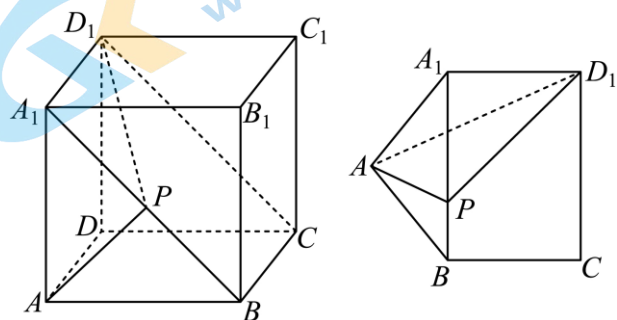
的距离相等, 又  $V_{D-BPC_1} = V_{P-BDC_1}$ , 而  $S_{\triangle BDC_1}$  是一个定值, 所以三棱锥  $D-BPC_1$  体积为定值, 故③正确;



对于④: 如下图, 将  $\triangle AA_1B$  与四边形  $A_1D_1CB$  沿  $A_1B$  展开在同一平面上, 由图可知, 线段

$AD_1$  的长度即为  $AP + PD_1$  的最小值, 在  $\triangle AA_1D_1$  中,

$$AD_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 135^\circ} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \text{ 故④正确;}$$



故答案为: ①③④

【点睛】方法点睛: 本题考查空间中的动点问题, 解决此类问题时, 常需证明线线, 线面, 面面间的平行和垂直关系, 从而得出点运动中, 存在的不变的位置关系, 存在着面积或体积的定值.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1)  $B = \frac{\pi}{3}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由正弦定理的边化角公式得出角  $B$  的大小;

(2) 选①: 由余弦定理以及判别式求解即可; 选②: 由余弦定理得出  $a, c$ , 进而求出面积; 选③: 由正弦定理得出  $b$ , 进而由余弦定理得出  $a$ , 从而作出判断.

【小问 1 详解】

因为  $b \sin A = \sqrt{3} a \cos B$ , 所以  $\sin B \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos B$ ,

又  $\sin A \neq 0$ , 所以  $\tan B = \sqrt{3}$ .

因为  $B \in (0, \pi)$ ，所以  $B = \frac{\pi}{3}$ 。

【小问 2 详解】

选①：由余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$  可得， $9 = 16 + c^2 - 8c \times \frac{1}{2}$ 。

即  $c^2 - 4c + 7 = 0$ ，此时  $\Delta = 16 - 28 < 0$ ，无解，不合题意。

选②：由余弦定理可得  $\begin{cases} 7 = a^2 + c^2 - ac \\ c - a = 1 \end{cases}$ ，整理得  $a^2 + a - 6 = 0$ ，

解得  $a = 2$  或  $a = -3$ （舍），即  $c = 3$ 。

满足  $\triangle ABC$  存在且唯一确定，则  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

选③：  $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$ ，由正弦定理可得  $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{21}}{14}} = \sqrt{7}$ 。

由余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$  可得， $7 = a^2 + 9 - 3a$ ，即  $a^2 - 3a + 2 = 0$ 。

解得  $a = 1, a = 2$ ，此时不满足  $\triangle ABC$  存在且唯一确定，不合题意。

17. 【答案】(1)  $\frac{1}{2}$

(2) 分布列见解析， $E(X) = \frac{8}{7}$

(3) 3月3日

【解析】

【分析】(1) 根据古典概型公式求解即可。

(2) 根据题意得到  $X = 0, 1, 2$ ， $P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$ ， $P(X=1) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$ ， $P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$ ，

再写出分布列数学期望即可。

(3) 根据折线图和频率分布直方图求解即可。

【小问 1 详解】

令时间 A 为“职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000”，

从 3 月 2 日至 3 月 7 日这 6 天中，3 月 2 日、5 日、7 日这 3 天中，

甲乙微信记步数都不低于 10000，

故  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

【小问 2 详解】

由 (1) 知：  $X = 0, 1, 2$ ，

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}, \quad P(X=1)=\frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}, \quad P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7},$$

$X$  的分布列为：

|     |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| $X$ | 0             | 1             | 2             |
| $P$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{2}{7}$ |

$$E(X)=0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$$

【小问 3 详解】

根据频率分步直方图知：微信记步数落在  $[20,25]$ ,  $[15,20)$ ,  $[10,15)$ ,  $[5,10)$ ,

$[0,5)$  (单位：千步) 区间内的人数依次为  $200 \times 0.15 = 30$  人,  $200 \times 0.25 = 50$  人,

$200 \times 0.3 = 60$  人,  $200 \times 0.2 = 40$  人,  $200 \times 0.1 = 20$  人,

由甲微信记步数排名第 68, 可知当天甲微信记步数在 15000 到 20000 万之间,

根据折线图知：只有 3 月 2 日, 3 月 3 日, 3 月 7 日.

由乙微信记步数排名第 142, 可知当天乙微信记步数在 5000 到 10000 万之间,

根据折线图知：只有 3 月 3 日和 3 月 6 日,

所以 3 月 3 日符合要求

18. 【答案】(1) 证明详见解析

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 根据线面平行的判定定理和性质定理证得  $BB_1 // DE$ .

(2) 建立空间直角坐标系, 根据  $B_1C$  与平面  $A_1ABB_1$  所成角的正弦值求得  $DB$ , 进而求得三棱锥  $C-ABB_1$  的体积.

【小问 1 详解】

根据棱柱的性质可知,  $BB_1 // AA_1$ ,

由于  $BB_1 \not\subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,  $AA_1 \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,

所以  $BB_1 //$  平面  $ACC_1A_1$ .

由于  $BB_1 \subset$  平面  $BB_1ED$ , 平面  $BB_1ED \cap$  平面  $ACC_1A_1 = DE$ ,

所以  $BB_1 // DE$ .

【小问 2 详解】

由于  $A_1D \perp$  平面  $ABC$ ,  $CD, BD \subset$  平面  $ABC$ ,

所以  $A_1D \perp CD, A_1D \perp BD$ ,

由于  $AB = BC, D$  是  $AC$  的中点, 所以  $BD \perp CD$ ,

由此以  $D$  为原点建立如图所示空间直角坐标系,

设  $BD = t (t > 0)$ ,  $A_1D = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ,

则  $B_1(t, 1, \sqrt{3}), C(0, 1, 0), A(0, -1, 0), B(t, 0, 0)$ ,

$\overrightarrow{B_1C} = (-t, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (t, 1, 0), \overrightarrow{BB_1} = (0, 1, \sqrt{3})$ ,

设平面  $A_1ABB_1$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

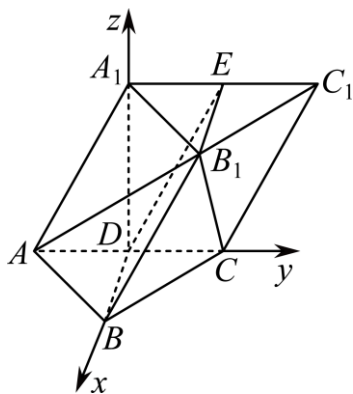
则  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = tx + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$ , 故可设  $\vec{n} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}t, -t)$ ,

所以  $\frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1C}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{3+4t^2} \times \sqrt{3+t^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ,

解得  $t = 1$  或  $t = \frac{3}{2}$ ,

当  $t = 1$ , 即  $BD = 1$  时,  $V_{C-ABB_1} = V_{B_1-ABC} = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \right) \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

当  $t = \frac{3}{2}$ , 即  $BD = \frac{3}{2}$  时,  $V_{C-ABB_1} = V_{B_1-ABC} = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2} \right) \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



19. 【答案】(1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题意得到  $b = 1$ ,  $c = b \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ,  $a = \sqrt{1+3} = 2$ , 即可得到答案.

(2) 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 将椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  向上平移 1 个单位得到  $E': \frac{x'^2}{4} + (y' - 1)^2 = 1$ , 则

$A'(x'_1, y'_1)$ ,  $B'(x'_2, y'_2)$ , 设直线  $A'B'$  为  $mx' + ny' = 1$ , 得到  $(4-8n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - 8m\left(\frac{y'}{x'}\right) + 1 = 0$ , 根据

$k_1 + k_2 = 4$  得到  $m = 2 - 4n$ , 从而得到直线  $A'B'$  恒过  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ , 再将  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  向下平移一个单位即可.

【小问 1 详解】

由题知:  $b = 1$ ,  $c = b \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ,  $a = \sqrt{1+3} = 2$ ,

所以  $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

【小问 2 详解】

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

将椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  向上平移 1 个单位得到  $E': \frac{x'^2}{4} + (y' - 1)^2 = 1$ ,

则  $A'(x'_1, y'_1)$ ,  $B'(x'_2, y'_2)$ ,

设直线  $A'B'$  为  $mx' + ny' = 1$ ,

则  $x'^2 + 4(y' - 1)^2 = 4 \Rightarrow x'^2 + 4y'^2 - 8y'(mx' + ny') = 0$ ,

即  $x'^2 + (4-8n)y'^2 - 8mx'y' = 0$ ,  $(4-8n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - 8m\left(\frac{y'}{x'}\right) + 1 = 0$ ,

所以  $k_1 + k_2 = k_{MA'} + k_{MB'} = \frac{8m}{4-8n} = 4$ , 即  $m = 2 - 4n$ .

所以直线  $A'B'$  为  $(2-4n)x' + ny' = 1$ , 即  $2x' + n(y' - 4x') = 1$ , 恒过点  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ .

将  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  向下平移 1 个单位得到  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 即直线  $AB$  过定点  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

综上: 直线  $AB$  过定点  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

20. 【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 讨论  $a \geq 0$ 、 $-\pi < a < 0$ 、 $a \leq -\pi$  三种情况, 利用导数得出单调性;

(2) 构造函数  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 讨论  $a = 0$ 、 $a > 0$  两种情况, 确定  $h(x)$  的单调性, 从而由  $h(x)$  的零点个数证明曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  有且只有一个公共点.

【小问 1 详解】

$f'(x) = \cos x - \cos x + (x+a)\sin x = (x+a)\sin x$ ,

当  $a \geq 0$  时,  $f'(x) = (x+a)\sin x > 0$ , 则函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递增.

当  $-\pi < a < 0$ , 即  $0 < -a < \pi$  时, 若  $f'(x) > 0$  时,  $x \in (-a, \pi)$ ;

若  $f'(x) < 0$  时,  $x \in (0, -a)$ .

即函数  $f(x)$  在  $(0, -a)$  上单调递减, 在  $(-a, \pi)$  上单调递增.

当  $a \leq -\pi$ , 即  $-a \geq \pi$  时,  $f'(x) = (x+a)\sin x \leq 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递减.

综上, 当  $a \geq 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递增.

当  $-\pi < a < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, -a)$  上单调递减, 在  $(-a, \pi)$  上单调递增.

当  $a \leq -\pi$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递减.

【小问 2 详解】

$$\text{设 } h(x) = f(x) - g(x) = \sin x - (x+a)\cos x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2,$$

题设等价于证明函数  $h(x)$  有且仅有一个零点,  $h'(x) = (x+a)\sin x - x^2 - ax = (x+a)(\sin x - x)$ ,

设  $t(x) = \sin x - x$ ,  $t'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ , 则函数  $t(x)$  在上单调递减, 又  $t(0) = 0$ ,

则当  $x < 0$  时,  $t(x) > 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $t(x) < 0$ ;

1° 当  $a = 0$  时,  $h'(x) = x \cdot t(x) \leq 0$ , 则函数在上单调递减, 又  $h(0) = 0$ ,

故此时函数  $h(x)$  有且仅有一个零点;

2° 当  $a > 0$  时, 函数  $h(x)$  在  $(-\infty, -a)$  上单调递减, 在  $(-a, 0)$  上单调递增,

在  $(0, +\infty)$  上单调递减,  $h(-a) < h(0) = -a < 0$ ,

则当  $x \in (-a, +\infty)$  时,  $h(x) < 0$  恒成立;

当  $x < -a$  且  $x < -1$  时,

$$h(x) = \sin x - (x+a)\cos x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 > -\frac{1}{3}x^3 - \left(\frac{3}{2}a+2\right)x^2 = 0, \quad x = -\frac{9}{2}a-6,$$

则  $h\left(-\frac{9}{2}a-6\right) > 0$ , 函数  $h(x)$  在  $\left(-\frac{9}{2}a-6, -a\right)$  上存在一个零点,

此时函数  $h(x)$  有且仅有一个零点;

综上所述即证.

【点睛】关键点睛: 解决问题 (2) 时, 关键在于将两个函数的交点问题, 转化为函数  $h(x)$  的零点问题, 利用导数得出单调性, 进而确定零点个数.

21. 【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用二元基底的定义加以验证, 可得  $A = \{1, 5\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  的一个二元基底.

$A = \{2, 3\}$  是  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的一个二元基底.

(2) 设  $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ , 计算出  $b = \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_j$  的各种情况下的正整数个数并求出它们的和, 结合题意得  $m + m + C_m^2 + C_m^2 \geq n$ , 即  $m(m+1) \geq n$ .

(3) 由 (2) 可知  $m(m+1) \geq 19$ , 所以  $m \geq 4$ , 并且得到结论“基底中元素表示出的数最多重复一个”. 再讨论当  $m = 4$  时, 集合  $A$  的所有情况均不可能是  $M$  的 4 元基底, 而当  $m = 5$  时,  $M$  的一个基底  $A = \{1, 3, 5, 9, 16\}$ , 由此可得  $m$  的最小可能值为 5.

【小问 1 详解】

①  $A = \{1, 5\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  的一个二元基底.

理由是  $3 \neq \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 5 (\lambda_1, \lambda_2 \in \{-1, 0, 1\})$ ;

②  $A = \{2, 3\}$  是  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的一个二元基底.

理由是  $1 = -1 \times 2 + 1 \times 3, 2 = 1 \times 2 + 0 \times 3, 3 = 0 \times 2 + 1 \times 3,$

$4 = 1 \times 2 + 1 \times 2, 5 = 1 \times 2 + 1 \times 3, 6 = 1 \times 3 + 1 \times 3.$

【小问 2 详解】

不妨设  $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ , 则

形如  $1 \cdot a_i + 0 \cdot a_j (1 \leq i \leq j \leq m)$  的正整数共有  $m$  个;

形如  $1 \cdot a_i + 1 \cdot a_i (1 \leq i \leq m)$  的正整数共有  $m$  个;

形如  $1 \cdot a_i + 1 \cdot a_j (1 \leq i < j \leq m)$  的正整数至多有  $C_m^2$  个;

形如  $(-1) \cdot a_i + 1 \cdot a_j (1 \leq i < j \leq m)$  的正整数至多有  $C_m^2$  个.

又集合  $M = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$  含  $n$  个不同的正整数,  $A$  为集合  $M$  的一个  $m$  元基底.

故  $m + m + C_m^2 + C_m^2 \geq n$ , 即  $m(m+1) \geq n$ .

【小问 3 详解】

由 (2) 可知  $m(m+1) \geq 19$ , 所以  $m \geq 4$ .

当  $m = 4$  时,  $m(m+1) - 19 = 1$ , 即用基底中元素表示出的数最多重复一个.\*

假设  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  为  $M = \{1, 2, 3, \cdots, 19\}$  的一个 4 元基底,

不妨设  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ , 则  $a_4 \geq 10$ .

当  $a_4 = 10$  时, 有  $a_3 = 9$ , 这时  $a_2 = 8$  或 7.

如果  $a_2 = 8$ , 则由  $1 = 10 - 9, 1 = 9 - 8, 18 = 9 + 9, 18 = 10 + 8$ , 与结论\*矛盾.

如果  $a_2 = 7$ ，则  $a_1 = 6$  或  $5$ 。易知  $A = \{6, 7, 9, 10\}$  和  $A = \{5, 7, 9, 10\}$  都不是  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的 4 元基底，矛盾。

当  $a_4 = 11$  时，有  $a_3 = 8$ ，这时  $a_2 = 7$ ， $a_1 = 6$ ，易知  $A = \{6, 7, 8, 11\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的 4 元基底，矛盾。

当  $a_4 = 12$  时，有  $a_3 = 7$ ，这时  $a_2 = 6$ ， $a_1 = 5$ ，易知  $A = \{5, 6, 7, 12\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的 4 元基底，矛盾。

当  $a_4 = 13$  时，有  $a_3 = 6$ ， $a_2 = 5$ ， $a_1 = 4$ ，易知  $A = \{4, 5, 6, 13\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的 4 元基底，矛盾。

当  $a_4 = 14$  时，有  $a_3 = 5$ ， $a_2 = 4$ ， $a_1 = 3$ ，易知  $A = \{3, 4, 5, 14\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的 4 元基底，矛盾。

当  $a_4 = 15$  时，有  $a_3 = 4$ ， $a_2 = 3$ ， $a_1 = 2$ ，易知  $A = \{2, 3, 4, 15\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的 4 元基底，矛盾。

当  $a_4 = 16$  时，有  $a_3 = 3$ ， $a_2 = 2$ ， $a_1 = 1$ ，易知  $A = \{1, 2, 3, 16\}$  不是  $M = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  的 4 元基底，矛盾。

当  $a_4 \geq 17$  时， $A$  均不可能是  $M$  的 4 元基底。

当  $m = 5$  时， $M$  的一个基底  $A = \{1, 3, 5, 9, 16\}$ ；或  $\{3, 7, 8, 9, 10\}$ ；或  $\{4, 7, 8, 9, 10\}$  等，只要写出一个即可。

综上， $m$  的最小可能值为 5。

**【点睛】方法点睛：**新定义题型的特点是：通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的：遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决。

## 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯