★启用前注意保密

2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（二）

数 学

本试卷共6页，22小题，满分150分　考试用时120分钟

注意事项： 1. 答卷前，考生务必将自己所在的市(县、区)、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-3\leqslant 0\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$

C. $\{-2,-1,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 已知复数 $z=\sqrt{3}\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(\theta\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位)，则 $|z|$ 的最大值为

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $\sqrt{3}$

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则双曲线的两条渐近线的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

4. 已知某摩天轮的半径为60 m，其中心到地面的距离为70 m，摩天轮启动后按逆时针方向匀速转动，每30分钟转动一圈．已知当游客距离地面超过100 m时进入最佳观景时间段，则游客在摩天轮转动一圈的过程中最佳观景时长约有

A. 5分钟　　B. 10分钟　　C. 15分钟　　D. 20分钟

5. 现有一个轴截面是边长为4的等边三角形的倒置圆锥(顶点在下方，底面在上方)，将半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的小球放入圆锥，使得小球与圆锥的侧面相切，过所有切点所在平面将

圆锥分割成两个部分，则分割得到的圆台的侧面积为

A. $\frac{27}{8}\pi$　　B. $\frac{33}{8}\pi$　　C. $\frac{45}{8}\pi$　　D. $\frac{55}{8}\pi$

6. 已知$\triangle ABC$是单位圆O的内接三角形，若$A=\frac{\pi}{4}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$的最大值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

7. 已知$(1-x)^{2\,023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2\,023}x^{2\,023}$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2\,023}}=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\frac{2\,023}{1\,012}$

8. 已知$a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{\mathrm{e}}$，$c=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$，则(参考数据：$\ln 2\approx 0.7$)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 已知直线m与平面α有公共点，则下列结论一定正确的是

A. 平面α内存在直线l与直线m平行

B. 平面α内存在直线l与直线m垂直

C. 存在平面γ与直线m和平面α都平行

D. 存在过直线m的平面β与平面α垂直

10. 已知$f(x)=\cos x+\tan x$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$是周期函数　　B. $f(x)$有对称轴

C. $f(x)$有对称中心　　D. $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

11. 现有甲、乙、丙三位篮球运动员连续5场篮球比赛得分情况的记录数据，已知三位球员得分情况的数据满足以下条件：

甲球员：5个数据的中位数是26，众数是24；

乙球员：5个数据的中位数是29，平均数是26；

丙球员：5个数据有1个是32，平均数是26，方差是9.6；

根据以上统计数据，下列统计结论一定正确的是

A. 甲球员连续5场比赛得分都不低于24分

B. 乙球员连续5场比赛得分都不低于24分

C. 丙球员连续5场比赛得分都不低于24分

D. 丙球员连续5场比赛得分的第60百分位数大于24

12. 在平面直角坐标系中，已知正方形 $ABCD$ 四边所在直线与 x 轴的交点分别为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，$(4,0)$，则正方形 $ABCD$ 四边所在直线中过点 $(0,0)$ 的直线的斜率可以是

A. 2　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. $\frac{3}{4}$　　　　D. $\frac{1}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_3=12$，$a_4=16$，则 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$________.

14. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60°$，除面 $ABCD$ 外，该四棱柱其余各个面的中心分别为点 E，F，G，H，I，则由点 E，F，G，H，I 构成的四棱锥的体积为________

15. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N. 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 3，且 $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{F_1N}$，则椭圆 C 的标准方程为________.

16. 已知 $f(x)=x^3-x$，若过点 $P(m,n)$ 恰能作两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，且这两条切线关于直线 $x=m$ 对称，则 m 的一个可能值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$，且满足 $a_1=1$，a_1，a_2，a_4 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}2^{a_n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{a_na_{n+2}}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项的和 T_{2n}.

18. （12 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{3}b\cos\frac{A+B}{2}=c\sin B$.

(1)求 C；

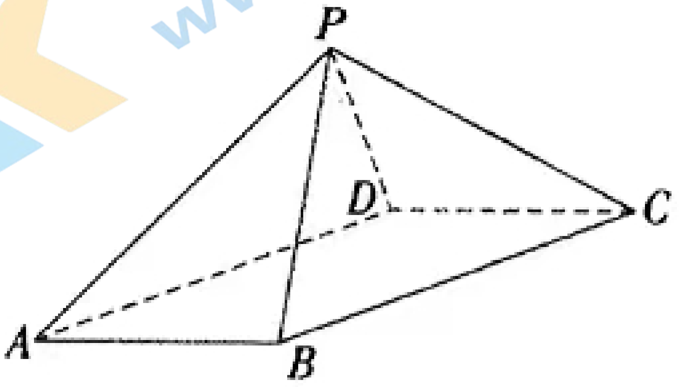
(2)若 $a+b=\sqrt{3}c$，求 $\sin A$.

19. （12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=120°$，$AB=1$，$BC=2$，$PD\perp CD$.

(1)证明：$AB\perp PB$；

(2)若平面 $PAB\perp$ 平面 PCD，且 $PA=\frac{\sqrt{10}}{2}$，求直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值.



20. (12 分)

甲、乙两名围棋学员进行围棋比赛，规定每局比赛胜者得1分，负者得0分，平局双方均得0分，比赛一直进行到一方比另一方多两分为止，多得两分的一方赢得比赛. 已知每局比赛中，甲获胜的概率为α，乙获胜的概率为β，两人平局的概率为γ($\alpha+\beta+\gamma=1$，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma\geqslant 0$)，且每局比赛结果相互独立.

(1)若$\alpha=\frac{2}{5}$，$\beta=\frac{2}{5}$，$\gamma=\frac{1}{5}$，求进行4局比赛后甲学员赢得比赛的概率；

(2)当$\gamma=0$时，

(i)若比赛最多进行5局，求比赛结束时比赛局数X的分布列及期望$E(X)$的最大值；

(ii)若比赛不限制局数，写出"甲学员赢得比赛"的概率(用α，β表示)，无需写出过程.

21. (12 分)

已知$f(x)=x^2-ae^x$，存在$x_1<x_2<x_3$，使得$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.

(1)求实数a的取值范围；

(2)试探究$x_1+x_2+x_3$与3的大小关系，并证明你的结论.

22. （12 分）

已知 A，B 是抛物线 E：$y=x^2$ 上不同的两点，点 P 在 x 轴下方，PA 与抛物线 E 交于点 C，PB 与抛物线 E 交于点 D，且满足 $\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|PB|}{|PD|}=\lambda$，其中 λ 是常数，且 $\lambda\neq1$.

（1）设 AB，CD 的中点分别为点 M、N，证明：MN 垂直于 x 轴；

（2）若点 P 为半圆 $x^2+y^2=1(y<0)$ 上的动点，且 $\lambda=2$，求四边形 $ABDC$ 面积的最大值.

★启用前注意保密

2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（二）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	B	D	C	A	B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

题号	9	10	11	12
答案	BD	ACD	AD	ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 2　　14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　15. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{54}=1$　　16. $\frac{2\sqrt{6}}{9}\left(或-\frac{2\sqrt{6}}{9}，或\frac{2\sqrt{30}}{15}，或-\frac{2\sqrt{30}}{15}\right)$

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1)因为 a_1，a_2，a_4 成等比数列，所以 $a_2^2=a_1a_4$，　…………………… 1分

即 $(1+d)^2=1\cdot(1+3d)$，　…………………… 2分

解得 $d=0$ 或 $d=1$.　…………………… 3分

因为 $d\geq0$，所以 $d=1$，　…………………… 4分

所以 $a_n=1+1\cdot(n-1)=n$.　…………………… 5分

(2)由(1)得 $b_n=\begin{cases}2^n，& n为奇数，\\ \frac{1}{n(n+2)}，& n为偶数，\end{cases}$　…………………… 6分

所以 $b_n=\begin{cases}2^n, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right), & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ ………………………… 7 分

所以 $T_{2n}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=(2^1+2^3+\cdots+2^{2n-1})+\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+2}\right)\right]$ …… 8 分

$=\dfrac{2^1-2^{2n-1}\cdot 2^2}{1-2^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n+2}\right)$ ………………………… 9 分

$=\dfrac{2^{2n+1}}{3}-\dfrac{1}{4n+4}-\dfrac{5}{12}$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项的和 $T_{2n}=\dfrac{2^{2n+1}}{3}-\dfrac{1}{4n+4}-\dfrac{5}{12}$. ………………… 10 分

18. 解：(1)由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\sqrt{3}\sin B\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin C\sin B$， ………… 1 分

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin C$. ………………………… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$. ………………… 3 分

所以 $\sqrt{3}\sin\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$. ………………………… 4 分

因为 $\sin\dfrac{C}{2}\neq 0$，所以 $\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ………………………… 5 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………… 6 分

(2)方法一：因为 $a+b=\sqrt{3}c$，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\sin A+\sin B=$

$\sqrt{3}\sin C=\dfrac{3}{2}$， ………………………… 7 分

因为 $A+B=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\sin A+\sin B=\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)$ ………………………… 8 分

$=\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A=\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\dfrac{3}{2}$.

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………… 9 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$， ………………………… 10 分

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$. ………………………… 11 分

所以 $\sin A=\frac{1}{2}$或 1. …………………………………………………………………… 12 分

方法二：因为 $C=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-ab(*)$， …………………… 7 分

将 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)$代入$(*)$式得$\frac{1}{3}(a+b)^2=a^2+b^2-ab$，整理得 $2a^2-5ab+2b^2=0$，

因式分解得$(2a-b)(a-2b)=0$，解得 $a=2b$ 或 $b=2a$， …………………………… 9 分

①当 $a=2b$ 时，$c=\sqrt{3}b$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+3b^2-4b^2}{2\sqrt{3}b^2}=0$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$， …………………………………………………… 10 分

②当 $b=2a$ 时，$c=\sqrt{3}a$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4a^2+3a^2-a^2}{4\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$， …………………………………………………… 11 分

所以 $\sin A$ 的值为$\frac{1}{2}$或 1. ……………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：如图 1，连接 BD，

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\angle ABC=120°$，$AB=1$，$BC=2$，

所以 $CD=1$，$\angle BCD=60°$，$AB/\!/CD$， …………………………………………… 1 分

所以 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，

所以 $BD=\sqrt{3}$， …………………………………………………………………………… 2 分

所以 $BC^2=BD^2+CD^2$，所以 $CD\perp BD$， ……………………………………………… 3 分

又因为 $CD\perp PD$，$BD\cap PD=D$，BD，$PD\subset$平面 PBD，

所以 $CD\perp$平面 PBD， ……………………………………………………………………… 4 分

因为 $PB\subset$平面 PBD，所以 $CD\perp PB$，

因为 $AB/\!/CD$，所以 $AB\perp PB$. ………………………………………………………… 5 分

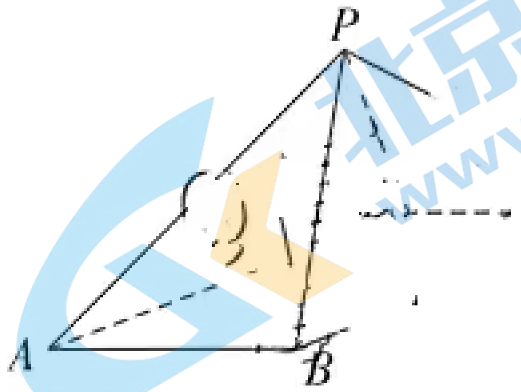


图 1

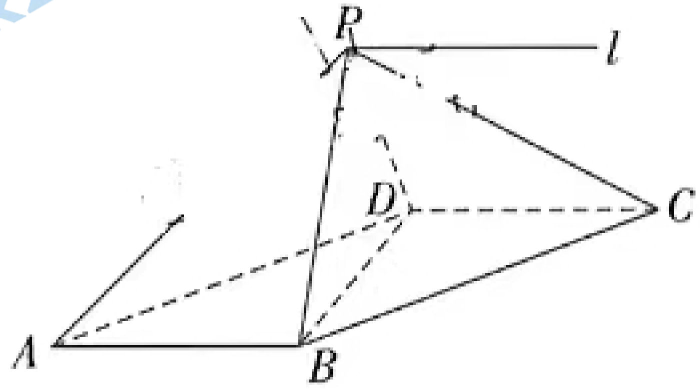


图 2

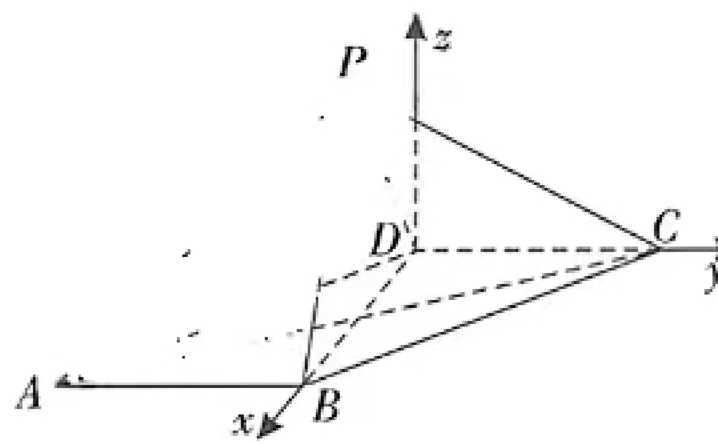


图 3

(2)解：如图2，设平面 PAB 和平面 PCD 的交线为直线 l，

因为 $CD /\!/ AB$，$CD \not\subset$ 平面 PAB，$AB \subset$ 平面 PAB，所以 $CD /\!/$ 平面 PAB，

因为 $CD \subset$ 平面 PCD，平面 $PAD \cap$ 平面 $PBC = l$，

所以 $CD /\!/ l$，

因为 $CD \perp$ 平面 PBD，所以 $l \perp$ 平面 PBD，

因为 PB，$PD \subset$ 平面 PBD，所以 $\angle BPD$ 是平面 PAB 与平面 PCD 的二面角，　…… 7 分

因为平面 $PAB \perp$ 平面 PCD，所以 $\angle BPD = 90°$，即 $BP \perp DP$

在 Rt$\triangle ABP$ 中，因为 $PA = \frac{\sqrt{10}}{2}$，$AB = 1$，所以 $PB = \frac{\sqrt{6}}{2}$，

在 Rt$\triangle BPD$ 中，因为 $BD = \sqrt{3}$，所以 $PD = \frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $\triangle BPD$ 为等腰直角三角形，… 8 分

方法一： 由(1)得 $CD \perp$ 平面 PBD，如图3，以点 D 为坐标原点，DB 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，过点 D 垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(\sqrt{3}, -1, 0)$，$B(\sqrt{3}, 0, 0)$，$C(0, 1, 0)$，$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　……… 9 分

所以 $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{3}, 2, 0)$，$\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$，$\overrightarrow{BP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　…… 10 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -\sqrt{3}x + y = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BP} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x, \\ z = x, \end{cases}$ 取 $x = 1$，得 $\boldsymbol{n} = (1, \sqrt{3}, 1)$，…… 11 分

记直线 AC 与平面 PBC 所成角为 θ，则

$$\sin\theta = |\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{AC}\rangle| = \left|\frac{\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right| = \left|\frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 0}{\sqrt{1+3+1} \times \sqrt{3+4}}\right| = \frac{\sqrt{105}}{35},$$

所以直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{35}$.　……………………… 12 分

方法二： 在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB = 1$，$BC = 2$，$\angle ABC = 120°$，则 $AC = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC = \sqrt{1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{7}$，　……………………… 9 分

设点 A 到平面 PBC 的距离为 d，

由(1)知 $CD \perp$ 平面 PBD，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD /\!/ BC$，

又因为 $AD \not\subset$ 平面 PBC，$BC \subset$ 平面 PBC，所以 $AD /\!/$ 平面 PBC，

所以 $V_{A-PBC} = V_{D-PBC}$，

因为 V_{D-PBC} 与 V_{C-BPD}，

所以 $V_{A-PBC} - V_{C-BPD}$，

设点 A 到平面 PBC 的距离为 d，由(1)知 $CD \perp$ 平面 PBD，

所以$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBC}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BPD}\cdot CD$， ………………………………………… 10 分

在$\triangle PBC$中，$PB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$BC=2$，$PC=PA=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

因为$PB^2+PC^2=BC^2$，所以$PB\perp PC$，

所以$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times 1$，解得$d=\frac{\sqrt{15}}{5}$， ………………………… 11 分

记直线AC与平面PBC所成角为θ，则

$$\sin\theta=\frac{d}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{5}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{105}}{35}$$

所以直线AC与平面PBC所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{105}}{35}$. ……………………………… 12 分

20. (1)解：用事件A，B，C分别表示每局比赛"甲获胜""乙获胜"或"平局"，则$P(A)=\alpha=\frac{2}{5}$，$P(B)=\beta=\frac{2}{5}$，$P(C)=\gamma=\frac{1}{5}$， ……………………………………………… 1 分

记"进行4局比赛后甲学员赢得比赛"为事件N，则事件N包括事件$ABAA$，$BAAA$，$ACCA$，$CACA$，$CCAA$共5种， ………………………………………………… 3 分

所以$P(N)=P(ABAA)+P(BAAA)+P(ACCA)+P(CACA)+P(CCAA)$

$=2P(B)P(A)P(A)P(A)+3P(C)P(C)P(A)P(A)$ ……………………………… 4 分

$=2\times\left(\frac{2}{5}\right)^4+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{44}{625}$. ……………………………………… 5 分

(2)(i)因为$\gamma=0$，所以每局比赛结果仅有"甲获胜"和"乙获胜"，即$\alpha+\beta=1$，

由题意得X的所有可能取值为2，4，5，则 …………………………………… 6 分

$P(X=2)=\alpha^2+\beta^2$，

$P(X=4)=(\alpha\beta+\beta\alpha)\alpha^2+(\alpha\beta+\beta\alpha)\beta^2=2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$，

$P(X=5)=(\alpha\beta+\beta\alpha)\cdot(\alpha\beta+\beta\alpha)\cdot 1=4\alpha^2\beta^2$.

所以X的分布列为

X	2	4	5
P	$\alpha^2+\beta^2$	$2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$	$4\alpha^2\beta^2$

………………………………………… 8 分

所以X的期望$E(X)=2(\alpha^2+\beta^2)+8\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+20\alpha^2\beta^2$

$=2(1-2\alpha\beta)+8\alpha\beta(1-2\alpha\beta)+20\alpha^2\beta^2=4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2$， ………………… 9 分

因为$\alpha+\beta=1\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$，所以$\alpha\beta\leq\frac{1}{4}$，当且仅当$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以$\alpha\beta\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，

所以 $E(X)=4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2=(2\alpha\beta+1)^2+1\leq\left(2\times\frac{1}{4}+1\right)^2+1=\frac{13}{4}$. ……… 10 分

(ii)记“甲学员赢得比赛”为事件 M，则 $P(M)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$. ……… 12 分

注：(第(ii)小问推导过程参考)由(1)得前两局比赛结果可能有 AA，BB，AB，BA，其中事件 AA 表示“甲学员赢得比赛”，事件 BB 表示“乙学员赢得比赛”，事件 AB，BA 表示“甲、乙两名学员各得 1 分”，当甲、乙两名学员得分总数相同时，甲学员赢得比赛的概率与比赛一开始甲学员赢得比赛的概率相同，

所以 $P(M)=P(AA)\cdot 1+P(BB)\cdot 0+P(AB)\cdot P(M)+P(BA)\cdot P(M)$

$=P(A)P(A)+P(A)P(B)P(M)+P(B)P(A)P(M)$

$=\alpha^2+\alpha\beta P(M)+\beta\alpha P(M)$

$=\alpha^2+2\alpha\beta P(M)$

所以 $(1-2\alpha\beta)P(M)=\alpha^2$，即 $P(M)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$，

因为 $\alpha+\beta=1$，所以 $P(M)=\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

21. 解：(1)由题意得 $f(x)=x^2-ae^x$ 有三个零点，转化为函数 $y=a$ 与函数 $y=\frac{x^2}{e^x}$ 的图象有三个公共点，……… 1 分

设 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{2x-x^2}{e}$，……… 2 分

令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<2$；令 $g'(x)<0$，解得 $x<0$ 或 $x>2$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递减，……… 3 分

因为当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，且 $g(0)=0$，$g(2)=\frac{4}{e^2}$，

……… 4 分

所以 $g(0)<a<g(2)$，即实数 a 的取值范围为 $0<a<\frac{4}{e^2}$. ……… 5 分

(2)因为 $x_1<x_2<x_3$，由(1)得 $x_1<0<x_2<2<x_3$，……… 6 分

由 $a=\frac{x_2^2}{e^{x_2}}=\frac{x_3^2}{e^{x_3}}$，得 $2\ln x_2-x_2=2\ln x_3-x_3$，设 $h(x)=2\ln x-x$，则 $h(x_2)=h(x_3)$，

求导得 $h'(x)=\frac{2}{x}-1$，令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<2$，令 $h'(x)<0$，解得 $x>2$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

设 $m(x)=h(4-x)-h(x)$，$0<x<2$，……… 7 分

则 $m(x)=2\ln(4-x)-4+x-2\ln x+x=2\ln(4-x)-2\ln x+2x-4$，$0<x<2$，

求导得 $m'(x)=\frac{2}{x-4}-\frac{2}{x}+2=\frac{2(x-2)^2}{x(x-4)}<0$ 恒成立，

所以 $m(x)$ 在 $(0,\ 2)$ 上单调递减，

所以 $m(x)>m(2)=0$，即 $h(4-x)>h(x)$， ······························ 8 分

因为 $0<x_2<2$，所以 $h(4-x_2)>h(x_2)=h(x_3)$，

又因为 $x_3>2$，$4-x_2>2$，$h(x)$ 在 $(2,\ +\infty)$ 上单调递减，

所以 $4-x_2<x_3$，即 $x_2+x_3>4$， ······························ 9 分

设 $g(x_0)=\frac{4}{e^2}$ 且 $x_0<0$，则 $g(x_1)=a<\frac{4}{e^2}=g(x_0)$，

因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递减，所以 $x_1>x_0$， ······························ 10 分

因为 $e^3>4$，所以 $\frac{1}{e^{-1}}>\frac{4}{e^2}$，

所以 $g(-1)=\frac{1}{e^{-1}}>\frac{4}{e^2}=g(x_0)$，

因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递减，所以 $x_0>-1$， ······························ 11 分

所以 $x_1>x_0>-1$，

所以 $x_1+x_2+x_3>4-1=3$. ······························ 12 分

22. (1) 证明：因为 $\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|PB|}{|PD|}=\lambda$，且 P，A，C 共线，P，B，D 共线，

所以 $AB/\!/CD$， ······························ 1 分

所以直线 AB 和直线 CD 的斜率相等，即 $k_{AB}=k_{CD}$， ······························ 2 分

设 $A(x_1,\ x_1^2)$，$B(x_2,\ x_2^2)$，$C(x_3,\ x_3^2)$，$D(x_4,\ x_4^2)$，则点 M 的横坐标 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$，

点 N 的横坐标 $x_N=\frac{x_3+x_4}{2}$，

由 $k_{AB}=k_{CD}$，得 $\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=\frac{x_4^2-x_3^2}{x_4-x_3}$， ······························ 3 分

因式分解得 $\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_4-x_3)(x_4+x_3)}{x_4-x_3}$，约分得 $x_2+x_1=x_4+x_3$，

所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_3+x_4}{2}$，即 $x_M=x_N$，

所以 MN 垂直于 x 轴. ······························ 4 分

(2) 解：设 $P(x_0,\ y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=1$，且 $-1\leqslant y_0<0$， ······························ 5 分

当 $\lambda=2$ 时，C 为 PA 中点，则 $x_3=\frac{x_0+x_1}{2}$，$y_3=\frac{y_0+x_1^2}{2}$，

因为 C 在抛物线上，所以 $\frac{y_0+x_1^2}{2}=\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)^2$，整理得 $x_1^2-2x_0x_1+2y_0-x_0^2=0$，

当 $\lambda=2$ 时，D 为 PB 中点，同理得 $x_2^2-2x_0x_2+2y_0-x_0^2=0$， ······························ 6 分

所以 x_1，x_2 是方程 $x^2-2x_0x+2y_0-x_0^2=0$ 的两个根，

由韦达定理得 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=2y_0-x_0^2$， ······························ 7 分

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=x_M$，所以 PM 也垂直于 x 轴，

所以 $|PM|=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-y_0=\frac{4x_0^2-4y_0+2x_0^2}{2}-y_0=3(x_0^2-y_0)$， …………………… 8 分

因为 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4x_0^2-8y_0+4x_0^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x_0^2-y_0}$， …… 9 分

所以 $S_{四边形ABDC}=\frac{3}{4}S_{\triangle PAB}$ ……………………………………………………………… 10 分

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\cdot|PM|\cdot|x_1-x_2|$

$=\frac{3}{8}\cdot 3(x_0^2-y_0)\times 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x_0^2-y_0}=\frac{9\sqrt{2}}{4}(\sqrt{x_0^2-y_0})^3$

$=\frac{9\sqrt{2}}{4}(\sqrt{-y_0^2-y_0+1})^3$，$-1\leqslant y_0<0$， ………………………………………… 11 分

当 $y_0=-\frac{1}{2}$ 时，$-y_0^2-y_0+1$ 取得最大值 $\frac{5}{4}$，

所以 $S_{四边形ABDC}\leqslant\frac{9\sqrt{2}}{4}\times\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^3=\frac{45\sqrt{10}}{32}$，

所以四边形 $ABDC$ 面积的最大值为 $\frac{45\sqrt{10}}{32}$. ………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。