天一大联考

2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(三)

文科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　B

命题意图　本题考查集合的运算、函数的值域,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意,$A=\{y\mid -4\leqslant y\leqslant 2\}$,$\complement_{\mathbf{R}}B=\{y\mid y<-1\}$,故 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{y\mid -4\leqslant y<-1\}$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查等差数列的基本运算,考查数学运算的核心素养.

解析　设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由题意可知 $5\times1+\frac{5\times(5-1)}{2}d=25$,解得 $d=2$,所以 $a_7=1+(7-1)\times2=13$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查平面向量的概念、向量数量积的应用,考查数学运算的核心素养.

解析　依题意,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $6+\lambda=0$,解得 $\lambda=-6$,则 $\boldsymbol{b}=(2,-6)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,-5)$,故 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$.

4. 答案　A

命题意图　本题考查基本不等式,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意,$4-2m=2n$,$4-2n=2m$,故 $\frac{m}{4-2m}+\frac{2n}{2-n}=\frac{m}{2n}+\frac{2n}{m}\geqslant2\sqrt{\frac{m}{2n}\cdot\frac{2n}{m}}=2$,当且仅当 $\frac{2n}{m}=\frac{m}{2n}$,即 $m=\frac{4}{3}$,$n=\frac{2}{3}$ 时等号成立,故 $\frac{m}{4-2m}+\frac{2n}{2-n}$ 的最小值为 2.

5. 答案　C

命题意图　本题考查三视图、空间几何体的体积,考查数学运算、直观想象的核心素养.

解析　设模型的体积为 V. 由三视图可知,该矛头模型是由一个圆锥与一个圆台拼接而成的组合体,故所求体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times6+\frac{1}{3}\times\pi\times(1^2+2^2+1\times2)\times4=\frac{52}{3}\pi$.

6. 答案　A

命题意图　本题考查充分条件与必要条件的判定、直线与圆的位置关系,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意,$|a|\geqslant4\Leftrightarrow a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant4$. 若直线 $l:x-2y=0$ 与圆 $C:x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=5$ 相离,则 $\frac{|0-a|}{\sqrt{1^2+2^2}}>\sqrt{5}$,解得 $a<-5$ 或 $a>5$. 故“$|a|\geqslant4$”是“直线 $l:x-2y=0$ 与圆 $C:x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=5$ 相离”的必要不充分条件.

7. 答案　B

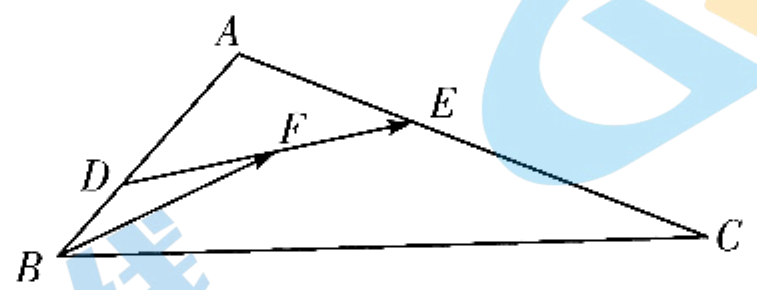
命题意图　本题考查三角函数的诱导公式、两角差的余弦公式,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意,$\frac{\sin 1100^\circ-2\sin 100^\circ}{\cos 160^\circ}=\frac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$.

8. **答案**　A

命题意图　本题考查平面向量的基本定理、向量的数量积，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

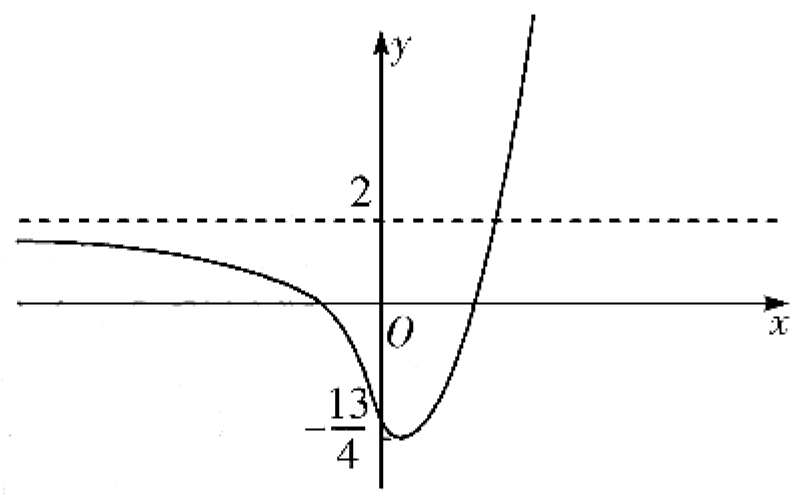
解析　作出图形如图所示，其中$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，故$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{18}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2=\frac{25}{18}+\frac{5}{2}+4=\frac{71}{9}$.



9. **答案**　D

命题意图　本题考查分段函数的图象与性质、函数的零点，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析　当$x\leqslant 0$时，$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2x-2+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}$，可知函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减. 令$g(x)=0$，得$f(x)=m$. 作出函数$f(x)$的大致图象如图所示，观察可知，$m\in\left(-\frac{13}{4},2\right)$.



10. **答案**　B

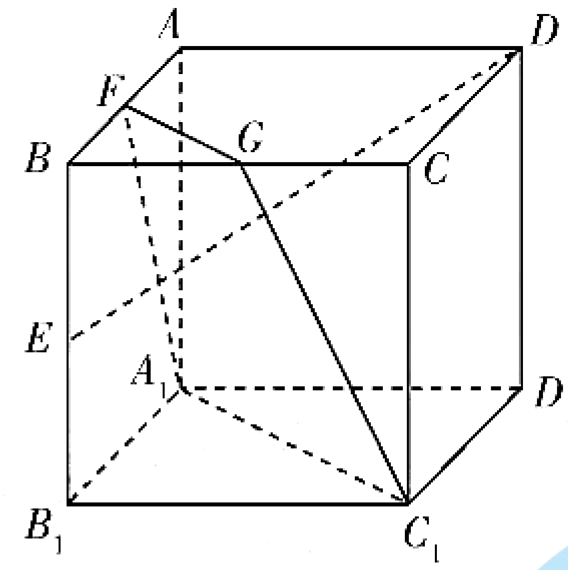
命题意图　本题考查函数模型的应用、指对数的运算，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

解析　易知初始状态下，废气中的污染物浓度为P_0，则$\frac{3}{4}P_0=P_0\cdot e^{-2k}$，则$\frac{3}{4}=e^{-2k}$，解得$k=\ln 2-\frac{\ln 3}{2}$，故①错误；当$t=1$时，$P=P_0\cdot e^{\frac{\ln 3}{2}-\ln 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}P_0$，此时消除的污染物为原来的$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故②错误；当$t=5$时，$P=P_0\cdot e^{5\left(\frac{\ln 3}{2}-\ln 2\right)}=P_0\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=P_0\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1}{2}P_0$，故③正确.

11. **答案**　D

命题意图　本题考查空间线面的位置关系，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

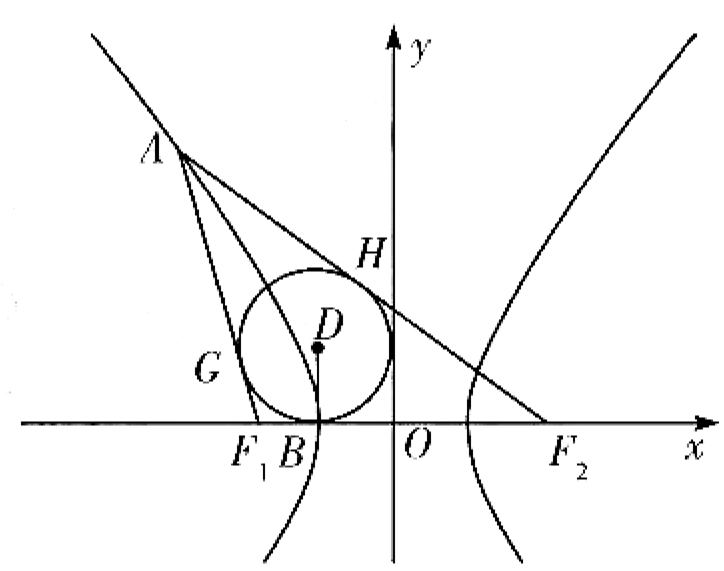
解析　作出图形如图所示. 设该正方体外接球的半径为R，依题意，$4\pi R^2=27\pi$，解得$R^2=\frac{27}{4}$，故$R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故$AB=3$. 分别取棱AB，BC的中点F，G，连接FG，A_1F，C_1G，A_1C_1，易证截面图形为等腰梯形C_1A_1FG，由题可知$FG=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$A_1F=C_1G=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，所以等腰梯形$C_1A_1FG$的高为$\frac{9\sqrt{2}}{4}$，故截面图形的面积为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}\right)\times\frac{9\sqrt{2}}{4}=\frac{81}{8}$.



12. **答案** D

命题意图 本题考查平面向量与三角形的四心、双曲线的方程与几何性质，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

解析 由题可知 D 为 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆圆心，点 B 在 x 轴上，且 F_1F_2 与内切圆 D 相切于点 B，作出大致图形，如图所示. 设直线 AF_1，AF_2 分别与圆 D 相切于 G，H，则 $|AG|=|AH|$，$|F_1G|=|F_1B|$，$|F_2B|=|F_2H|$. 因为 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，所以 $|F_2H|-|F_1G|=2a$，即 $|F_2B|-|F_1B|=2a$，设 $B(x_0,0)$，则 $c-x_0-(c+x_0)=2a$，解得 $x_0=-a$. 因为 $4\overrightarrow{BF_2}+3\overrightarrow{F_2F_1}=\mathbf{0}$，故 $4(c-x_0)+3(-2c)=0$，故 $x_0=-\dfrac{c}{2}$，则 $c=2a$，故 $c^2=4a^2=a^2+b^2$，故 $3a^2=18$，解得 $a=\sqrt{6}$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则点 $B(-\sqrt{6},0)$ 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 $\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{6}|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

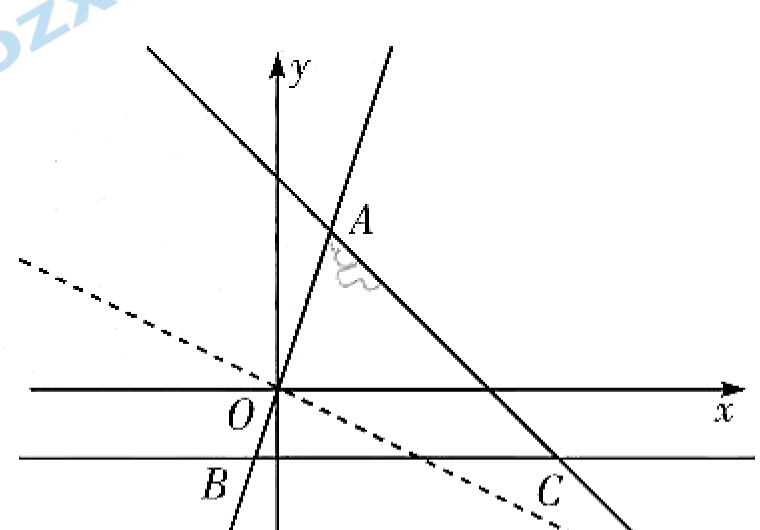


二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $\dfrac{21}{4}$

命题意图 本题考查线性规划，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 作出不等式组所表示的平面区域，如图中阴影部分所示. 观察可知，当直线 $z=x+2y$ 过点 A 时，z 有最大值. 联立 $\begin{cases}x+y=3,\\3x-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\y=\dfrac{9}{4},\end{cases}$ 故 z 的最大值为 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{18}{4}=\dfrac{21}{4}$.



14. **答案** 78

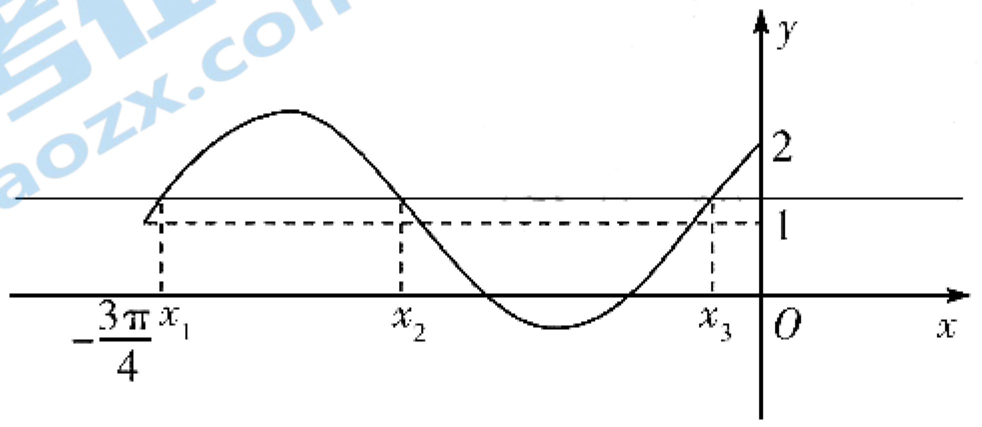
命题意图 本题考查函数的值域、对数的运算，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 当 $x\in[0,6]$ 时，$f(x)=\log_9(x+3)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，因为 $\forall x_1\in[0,m]$，$\exists x_2\in[0,m]$，使得 $f(x_1)=\frac{1}{f(x_2)}$，故当 $x\in[6,m]$ 时，$f(x)\in[1,2]$ 即可，故 $\log_9(m+3)=2$，则 $m=78$.

15. **答案** $-\frac{5\pi}{3}$

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 令 $f(x)=0$，故 $\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1=m$. 作出函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},0\right]$ 上的大致图象如图所示. 令 $3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=-1$，得 $x=-\frac{\pi}{4}$，令 $k=-2$，得 $x=-\frac{7\pi}{12}$，则 $x_1+x_2=-\frac{\pi}{2}$，$x_2+x_3=-\frac{7\pi}{6}$，故 $x_1+2x_2+x_3=-\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{6}=-\frac{5\pi}{3}$.



16. **答案** $\left(0,-\frac{7}{2}\right)$；$2\sqrt{3}$

命题意图 本题考查直线的方程、抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 依题意，直线 $l_2:(1+3\lambda)x+(2+4\lambda)y+14\lambda+7=0$，联立 $\begin{cases}x+2y+7=0,\\3x+4y+14=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-\frac{7}{2},\end{cases}$ 故 $A\left(0,-\frac{7}{2}\right)$. 由题可知抛物线 $C:x^2=4y$，$F(0,1)$. 设直线 $MN:y=kx+1$，联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$ 则 $x^2-4kx-4=0$，设 $M\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$N\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，则 $x_1x_2=-4$. 而 $\angle ANM=90^\circ$，则 $NF\perp AN$，故 $\overrightarrow{NF}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，故 $-x_2^2+\left(\frac{x_2^2}{4}+\frac{7}{2}\right)\left(1-\frac{x_2^2}{4}\right)=0$，则 $x_2^4+26x_2^2-56=0$，解得 $x_2^2=2$. 而 $x_1x_2=-4$，故 $x_1^2x_2^2=16$，则 $x_1^2=8$，故 $y_1=\frac{x_1^2}{4}=2$，则 $|MO|=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$f(x)=3\cdot\frac{1-\cos 3x}{2}+a\sin 3x=a\sin 3x-\frac{3}{2}\cos 3x+\frac{3}{2}$， ……………………（2 分）

故 $\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，故 $\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}=3$. ……………………（3 分）

因为 $a>0$，所以 $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）依题意，$f(x)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\right)+\frac{3}{2}=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$. ……………………（5 分）

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

解得$\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. ……(7 分)

令 $k=1$,得$\frac{8\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{9}$,令 $k=2$,得$\frac{14\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{9}$,

故$f(x)$在$[\pi,2\pi]$上的单调递减区间为$\left[\pi,\frac{11\pi}{9}\right]$和$\left[\frac{14\pi}{9},\frac{17\pi}{9}\right]$. ……(10 分)

18. **命题意图** 本题考查等比数列的定义、错位相减法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 (Ⅰ)依题意,$a_{n+2}+4S_n+4a_n=4S_{n+1}$,故 $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$,

则 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$. ……(2 分)

因为 $a_2=2a_1=6$,所以 $a_2-2a_1=0$.

所以 $a_{n+1}-2a_n=0$,即数列$\{a_n\}$是首项为 3,公比为 2 的等比数列. ……(4 分)

故 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$. ……(6 分)

(Ⅱ)依题意,$\frac{8n+10}{3}\cdot a_{2n}=(4n+5)\cdot 4^n$, ……(8 分)

故 $T_n=9\cdot 4^1+13\cdot 4^2+17\cdot 4^3+\cdots+(4n+5)\cdot 4^n$,

$4T_n=9\cdot 4^2+13\cdot 4^3+17\cdot 4^4+\cdots+(4n+5)\cdot 4^{n+1}$, ……(9 分)

两式相减可得,$-3T_n=9\cdot 4^1+4\cdot 4^2+4\cdot 4^3+\cdots+4\cdot 4^n-(4n+5)\cdot 4^{n+1}$

$=4\cdot 4^1+4\cdot 4^2+4\cdot 4^3+\cdots+4\cdot 4^n-(4n+5)\cdot 4^{n+1}+20$ ……(10 分)

$=\frac{16(4^n-1)}{4-1}-(4n+5)\cdot 4^{n+1}+20$

$=-\left(4n+\frac{11}{3}\right)4^{n+1}+\frac{44}{3}$. ……(11 分)

故 $T_n=\left(\frac{4n}{3}+\frac{11}{9}\right)4^{n+1}-\frac{44}{9}$. ……(12 分)

19. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式、三角恒等变换,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 (Ⅰ)在$\triangle AMC$中,由余弦定理可得 $CM^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cdot\cos\angle MAC$,① ……(2 分)

又 $AM+MC=2\sqrt{3}$,② ……(3 分)

联立①②解得 $AM=MC=\sqrt{3}$,故$\triangle AMC$是等腰三角形. ……(4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$\angle AMC=\frac{2\pi}{3}$,故$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$. ……(5 分)

因为$\begin{cases}\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{5},\\ \sin^2B+\cos^2B=1,\end{cases}$故 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}$,$\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. ……(7 分)

在$\triangle AMB$中,由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{AM}{\sin B}$,故 $AB=\sqrt{21}$, ……(8 分)

由余弦定理可得 $AB^2=AM^2+MB^2-2AM\cdot MB\cdot\cos\angle AMB$,

则 $MB^2-\sqrt{3}MB-18=0$,解得 $MB=3\sqrt{3}$. ……(10 分)

故$\triangle AMB$的面积为$\frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM\cdot\sin\angle AMB=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,

$\triangle AMC$ 的面积为$\frac{1}{2}\cdot AM\cdot CM\cdot \sin\angle AMC=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故$\triangle ABM$与$\triangle ACM$的面积之差为$\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的体积,考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

解析 (Ⅰ)如图,在平面图形中,连接 BD 交 AM 于 O,连接 MN.

因为 $BC/\!/AM$,$AB/\!/CM$,所以四边形 $ABCM$ 为平行四边形,所以 $AB=CM$. ……………………………… (1 分)

在$\triangle CBD$中,由余弦定理,得 $BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cdot\cos\angle BCD=CB^2$,

所以 $CB=BD$,则 $CB^2+BD^2=CD^2$,故$\angle CBD=90°$, ……………………………………………………… (2 分)

则$\angle ABD=45°$,则 $AB=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\frac{1}{2}CD$,故 $CM=DM$.

因为 M,N 分别为 CD,BC 的中点,所以 $MN/\!/BD$,所以 $MN\perp AM$. ……………………………… (3 分)

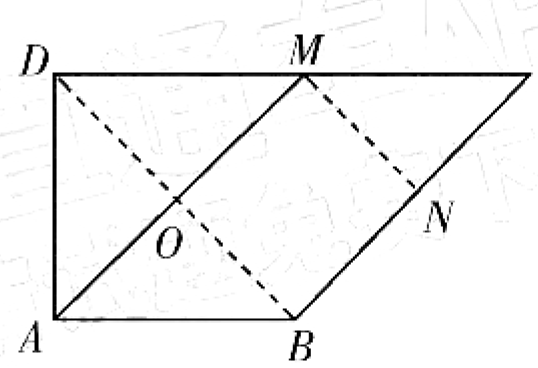
在立体图形中,连接 MN. 因为平面 $PAM\perp$平面 AMC,且平面 $PAM\cap$平面 $AMC=AM$,$MN\subset$平面 $ABCM$,

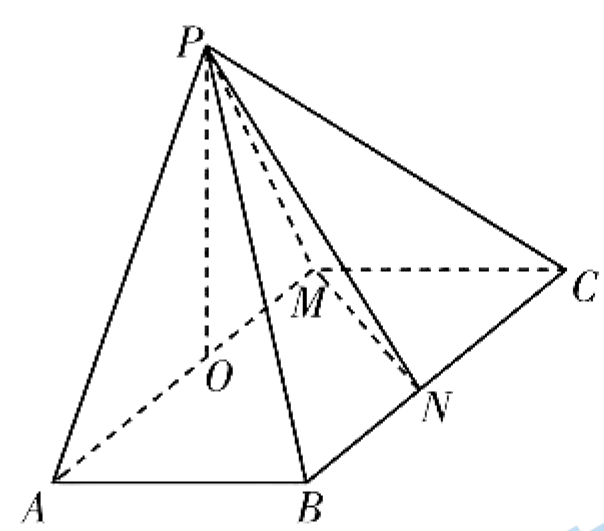
故 $MN\perp$平面 PAM. ……………………………………………………………………………… (4 分)

因为 $PA\subset$平面 PAM,故 $PA\perp MN$.

又 $AP\perp MP$,$MN\cap MP=M$,故 $AP\perp$平面 PMN. ……………………………………………… (5 分)

而 $PN\subset$平面 PMN,故 $AP\perp PN$. ………………………………………………………………… (6 分)





(Ⅱ)如图,取 AM 的中点 O,连接 PO.

由(Ⅰ)可知 $AP=PM$,则 $PO\perp AM$,

又平面 $PAM\perp$平面 AMC,且平面 $PAM\cap$平面 $AMC=AM$,

所以 $PO\perp$平面 AMC. …………………………………………………………………………… (7 分)

又 $AB=2$,所以点 P 到平面 MNC 的距离为 $PO=\sqrt{2}$,$S_{\triangle MNC}=1$,

所以 $V_{P-MNC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle MNC}\cdot PO=\frac{\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………………………… (9 分)

由(Ⅰ)可知,$MN\perp PM$,且 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$. ………………………………… (10 分)

设点 C 到平面 PMN 的距离为 h.

因为 $V_{P-MNC}=V_{C-PMN}$,即$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times h$,所以 $h=1$,

即点 C 到平面 PMN 的距离为 1. ……………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程、中点弦问题、直线与椭圆的综合性问题,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

(Ⅰ)依题意,M 为线段 AB 的中点.

因为 A,B 在椭圆 C 上,故$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$ ……………………(1 分)

两式相减可得$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$, ……………………(3 分)

则$\dfrac{3}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=0$,

故$\dfrac{3}{4}+4k_{OM}=0$,解得 $k_{OM}=-\dfrac{3}{16}$. ……………………(5 分)

(Ⅱ)假设定点存在,根据椭圆对称性,可知该直线所过定点在 x 轴上,设定点坐标为$(t,0)$,

则直线 l 的方程为 $y=k(x-t)$,

联立$\begin{cases}y=k(x-t),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去 y 整理得$(3+4k^2)x^2-8k^2tx+4k^2t^2-12=0$, ……………………(7 分)

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2t}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{4k^2t^2-12}{3+4k^2}$. ……………………(8 分)

设直线 FA,FB 的斜率分别为 k_1,k_2,由题可知 $F(1,0)$,

$$
\begin{aligned}
\text{则 } k_1+k_2&=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}\\
&=\frac{k(x_1-t)}{x_1-1}+\frac{k(x_2-t)}{x_2-1}\\
&=k\frac{(x_1-t)(x_2-1)+(x_2-t)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}\\
&=k\frac{2x_1x_2-(t+1)(x_1+x_2)+2t}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}\\
&=0.
\end{aligned}
$$
……………………(10 分)

即 $2\cdot\dfrac{4k^2t^2-12}{3+4k^2}-(t+1)\dfrac{8k^2t}{3+4k^2}+2t=\dfrac{8k^2t^2-24-8k^2t^2-8k^2t+6t+8k^2t}{3+4k^2}=0$,

所以 $-24+6t=0$,$t=4$,

即直线 l 过定点$(4,0)$. ……………………(12 分)

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 (Ⅰ)依题意,$x\in\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x-\sqrt{2}$, ……………………(1 分)

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

因为当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$时,$f'(x)<0$,

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2}\ln 2,+\infty\right)$时,$f'(x)>0$, ……………………(3 分)

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$,单调递增区间为$\left(\dfrac{1}{2}\ln 2,+\infty\right)$. ……………………(4 分)

(Ⅱ)依题意,$f(x)\geqslant 2-a\cos x\Leftrightarrow e^x-\sqrt{2}x+a\cos x-2\geqslant 0$,

令 $g(x)=e^x-\sqrt{2}x+a\cos x-2$，则 $g(0)=1+a-2\geqslant 0$，故 $a\geqslant 1$. ……………………………………（5 分）

下面证明当 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上恒成立.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$0\leqslant \cos x\leqslant 1$，

所以当 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant e^x+\cos x-\sqrt{2}x-2$. ……………………………………（6 分）

令 $h(x)=e^x+\cos x-\sqrt{2}x-2$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，

则 $h'(x)=e^x-\sin x-\sqrt{2}$，令 $\varphi(x)=e^x-\sin x-\sqrt{2}$，则 $\varphi'(x)=e^x-\cos x$. ……………………（7 分）

令 $m(x)=e^x-\cos x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，

而 $m'(x)=e^x+\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增，

又 $m'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}<e^{-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，

所以 $\varphi'(x)=e^x-\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，……………………………………（8 分）

又 $\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，

$\varphi'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}<e^{-1}-\frac{1}{2}<0$，……………………………………（9 分）

所以存在 $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，使得 $\varphi'(x_1)=0$.

因为当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},x_1\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$h'(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_1,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减，所以 $x=x_1$ 时，$h'(x)$ 取得最大值，且 $[h'(x)]_{\max}=h'(x_1)$，因为 $\varphi'(x_1)=0$，故 $e^{x_1}=\cos x_1$. ……………………（10 分）

所以 $[h'(x)]_{\max}=h'(x_1)=\cos x_1-\sin x_1-\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\leqslant 0$，……………………（11 分）

所以 $h(x)$ 单调递减，故当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$h(x)\geqslant h(0)=0$，即 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………………………（12 分）