

昌平区 2021—2022 第一学期高一年级期末质量抽测 数学试卷 2022.1

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$ ， $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $\{-1, 0\}$ (B) $\{-1, 0, 1\}$ (C) $\{0, 1\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2\}$

(2) 已知命题 $P: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x < 0$ ，则 $\neg P$ 为

- (A) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x \leq 0$ (B) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x > 0$
(C) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x \geq 0$ (D) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x < 0$

(3) 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是

- (A) $y = -x^2$ (B) $y = 2^x$ (C) $y = x^3$ (D) $y = \ln|x|$

(4) 函数 $f(x) = x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的零点个数为

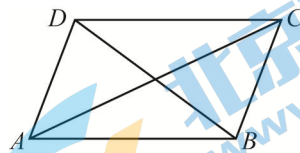
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(5) 北京 2022 年冬奥会新增了女子单人雪车、短道速滑混合团体接力、跳台滑雪混合团体、男子自由式滑雪大跳台、女子自由式滑雪大跳台、自由式滑雪空中技巧混合团体和单板滑雪障碍追逐混合团体等 7 个比赛小项。现有甲、乙两名志愿者分别从 7 个比赛小项中各任选一项参加志愿服务工作，且甲、乙两人的选择互不影响，那么甲、乙两名志愿者选择同一个比赛小项进行志愿服务工作的概率是

- (A) $\frac{2}{49}$ (B) $\frac{6}{49}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{2}{7}$

(6) 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BD} =$

- (A) \vec{AB} (B) \vec{CD}
(C) \vec{CB} (D) \vec{AD}



(7) 农科院的专家为了了解新培育的甲、乙两种麦苗的长势情况，从种植有甲、乙两种麦苗的两块试验田中各抽取 6 株麦苗测量株高，得到的样本数据如下（单位：cm）：

甲：9, 10, 11, 12, 10, 20；

乙：8, 14, 13, 10, 12, 21.

根据所抽取的甲、乙两种麦苗的株高数据，给出下面四个结论，其中正确的结论是

- (A) 甲种麦苗样本株高的平均值大于乙种麦苗样本株高的平均值
(B) 甲种麦苗样本株高的极差小于乙种麦苗样本株高的极差
(C) 甲种麦苗样本株高的 75% 分位数为 10
(D) 甲种麦苗样本株高的中位数大于乙种麦苗样本株高的中位数

(8) 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，则“函数 $f(x) = a^x$ 在 \mathbf{R} 上是减函数”是“函数 $g(x) = (4 - a)x$ 在 \mathbf{R} 上是增函数”

的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 为了鼓励大家节约用水,北京市居民用水实行阶梯水价,其中每户的户年用水量与水价的关系如下表所示:

分档	户年用水量(立方米)	水价(元/立方米)
第一阶梯	0-180(含)	5
第二阶梯	181-260(含)	7
第三阶梯	260以上	9

假设居住在北京的某户家庭2021年的年用水量为 200m^3 ,则该户家庭2021年应缴纳的水费为

- (A) 1800元 (B) 1400元 (C) 1040元 (D) 1000元

(10) 已知函数 $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$. 给出下面四个结论:

- ① $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$; ② $f(x)$ 是偶函数;
③ $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增; ④ $f(x)$ 的图像与 $g(x) = \frac{1}{4}$ 的图像有4个不同的交点.

其中正确的结论是

- (A) ①② (B) ③④ (C) ①②③ (D) ①②④

第二部分 (非选择题 共100分)

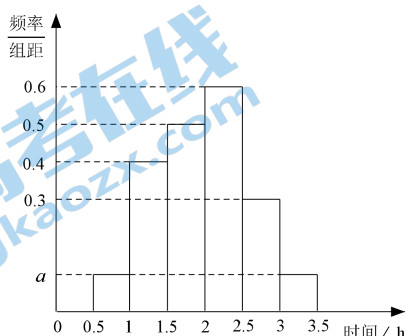
二、填空题共6小题,每小题5分,共30分。

(11) 实数 $27^{\frac{1}{3}} - \log_3 9$ 的值为_____.

(12) 某校高中三个年级共有学生2000人,其中高一年级有学生750人,高二年级有学生650人.为了了解学生参加整本书阅读活动的情况,现采用分层抽样的方法从中抽取容量为200的样本进行调查,那么在高三年级的学生中应抽取的人数为_____.

(13) 已知 $a = (0.3)^2, b = 4^{\frac{1}{3}}, c = \log_{\frac{1}{3}} 2$,则 a, b, c 的大小关系是_____.(用“>”连接)

(14) 某高中校为了减轻学生过重的课业负担,提高育人质量,在全校所有的1000名高中学生中随机抽取了100名学生,了解他们完成作业所需要的时间(单位:h),将数据按照 $[0.5, 1), [1, 1.5), [1.5, 2), [2, 2.5), [2.5, 3), [3, 3.5]$ 分成6组,并将所得的数据绘制成频率分布直方图(如图所示).



由图中数据可知 $a =$ _____ ; 估计全校高中学生中完成作业时间不少于3h的人数为_____.

(15) 函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，给出下列两个条件：

① $f(1) = 0$ ；

② 任取 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 恒成立.

请写出一个同时满足条件①②的函数 $f(x)$ ，则 $f(x) =$ _____.

(16) 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \leq 2 \\ \log_a x, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

① 若 $a = \frac{1}{2}$ ，则 $f(f(-1)) =$ _____；

② 若 $f(x)$ 有最小值，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(17) (本小题 13 分)

设向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$ ， $\mathbf{b} = (1, -1)$ ， $\mathbf{c} = (4, -5)$.

(I) 求 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$ ；

(II) 若 $\mathbf{c} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b}$ ， $l, m \in \mathbf{R}$ ，求 $l + m$ 的值；

(III) 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{CD} = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ ，求证： A, C, D 三点共线.

(18) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = mx^2 + 4mx + 3$, $m \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $m = 1$, 求 $f(x) \leq 0$ 的解集;

(II) 若方程 $f(x) = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 > 0$, 求 m 的取值范围.

(19) (本小题 14 分)

近年来, 手机逐渐改变了人们的生活方式, 已经成为了人们生活中的必需品, 因此人们对手机性能的要求也越来越高. 为了了解市场上某品牌的甲、乙两种型号手机的性能, 现从甲、乙两种型号手机中各随机抽取了 6 部手机进行性能测评, 得到的评分数据如下 (单位: 分):

甲型号手机	90	89	90	88	91	92
乙型号手机	88	91	89	93	85	94

假设所有手机性能评分相互独立.

(I) 在甲型号手机样本中, 随机抽取 1 部手机, 求该手机性能评分不低于 90 分的概率;

(II) 在甲、乙两种型号手机样本中各抽取 1 部手机, 求其中恰有 1 部手机性能评分不低于 90 分的概率;

(III) 试判断甲型号手机样本评分数据的方差与乙型号手机样本评分数据的方差的大小. (只需写出结论)

(20) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \log_2(4 - x^2)$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域;

(II) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;

(III) 若 $f(x) \leq \log_2(mx + 5)$ 对于 $x \in (0, 2)$ 恒成立, 求实数 m 的最小值.



(21) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，如果存在 $x_0 \in D$ ，使得 $f(x_0) = x_0$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一阶不动点；如果存在 $x_0 \in D$ ，使得 $f(f(x_0)) = x_0$ ，且 $f(x_0) \neq x_0$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶周期点.

(I) 分别判断函数 $y = 2^x$ 与 $y = \sqrt{x}$ 是否存在一阶不动点；(只需写出结论)

(II) 求 $f(x) = x|x^2 - 1|$ 的一阶不动点；

(III) 求 $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 1 < x < 4. \end{cases}$ 的二阶周期点的个数.

又因为 $mx^2 + 4mx + 3 = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = \frac{3}{m}$.

因为 $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 > 0$,

所以 $(x_1 + x_2)^2 - 5x_1 x_2 > 0$.

所以 $16 - \frac{15}{m} > 0$.

所以 $m < 0$ 或 $m > \frac{15}{16}$.

综上所述, m 的取值范围是 $\{m \mid m < 0 \text{ 或 } m > \frac{15}{16}\}$ 14 分

(19) (共 14 分)

解: (I) 记“抽取的甲型号手机性能评分不低于 90 分”为事件 A , 甲型号手机样本共有 6 部, 其中手机性能评分不低于 90 分的手机有 4 部,

所以 $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 4 分

(II) 记“抽取的甲型号手机性能评分不低于 90 分”为事件 A , “抽取的乙型号手机性能评分不低于 90 分”为事件 B , “甲、乙两种型号手机性能评分中恰有 1 个评分不低于 90 分”为事件 C , 则

$P(A) = \frac{2}{3}, P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}; P(B) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{2};$

$P(C) = P(\bar{A}B \cup A\bar{B})$
 $= P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})$
 $= P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B})$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

..... 11 分

(III) 甲型号手机样本评分数据的方差小于乙型号手机样本评分数据的方差.

..... 14 分

(20) (共 14 分)

解: (I) 由 $4 - x^2 > 0$, 解得 $-2 < x < 2$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$.

..... 4 分

(II) 结论: 函数 $f(x)$ 为偶函数.

证明如下:

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$.

因为 $f(-x) = \log_2(4 - (-x)^2)$

$= \log_2(4 - x^2)$

$= f(x),$

所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

..... 8 分

(III) 由题意, 得 $\log_2(-x^2 + 4) \leq \log_2(mx + 5)$.

因为 $y = \log_2 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递增函数,

所以 $0 < -x^2 + 4 \leq mx + 5$.

因为 $x \in (0, 2)$,

所以 $m \geq -(x + \frac{1}{x})$.

因为 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 其中等号成立当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x^2 = 1$, 解得 $x = 1$

或 $x = -1$ (舍).

所以 $-(x + \frac{1}{x}) \leq -2$.

由 $f(x) \leq \log_2(mx + 5)$ 对于 $x \in (0, 2)$ 恒成立, 得 $m \geq -2$.

所以实数 m 的最小值为 -2 .

..... 14 分

(21) (共 15 分)

解: (I) $y = 2^x$ 不存在一阶不动点, $y = \sqrt{x}$ 存在一阶不动点. 3 分

(II) 由题意, 令 $f(x) = x|x^2 - 1| = x$,

整理得 $x|x^2 - 1| - x = 0$.

解得 $x = 0$ 或 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = -\sqrt{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的一阶不动点为 $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ 7 分

(III) (1) 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = e^x \in (1, e]$, 易知 $f(x) = e^x \neq x$.

而 $f(f(x)) = f(e^x) = 2 - \frac{1}{2}e^x$,

若 $f(f(x)) = 2 - \frac{1}{2}e^x = x$, 则 $e^x + 2x - 4 = 0$,

令函数 $g(x) = e^x + 2x - 4$, 易知 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增,

且 $g(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 3 < 0$, $g(1) = e - 2 > 0$,

所以存在点 $x_1 \in (0, 1]$, 使得 $g(x_1) = 0$.

所以故函数 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上存在唯一的零点.

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上存在唯一的二阶周期点.

(2) 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) = 2 - \frac{x}{2} \in (1, \frac{3}{2})$.

因为 $f(f(x)) = f(2 - \frac{x}{2}) = 2 - \frac{1}{2}(2 - \frac{x}{2}) = 1 + \frac{x}{4}$,

令 $f(f(x)) = x$, 解得 $x = \frac{4}{3}$.

又因为 $f(x) = 2 - \frac{x}{2} = x$, 则 $x = \frac{4}{3}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上不存在二阶周期点.

(3) 当 $2 \leq x < 4$ 时, $f(x) = 2 - \frac{x}{2} \in (0, 1]$, 易知 $f(x) \neq x$.

$$f(f(x)) = f\left(2 - \frac{x}{2}\right) = e^{2 - \frac{x}{2}}, \text{ 令 } f(f(x)) = x, \text{ 整理得 } e^{2 - \frac{x}{2}} - x = 0.$$

令函数 $h(x) = e^{2 - \frac{x}{2}} - x$, 易知 $h(x) = e^{2 - \frac{x}{2}} - x = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^x - x$ 在 $[2, 4)$ 上单调递减,

$$\text{且 } h(2) = e - 2 > 0, \quad h(3) = \sqrt{e} - 3 < 0,$$

所以存在 $x_2 \in [2, 4)$, 使得 $h(x_2) = 0$.

所以 $h(x)$ 在 $[2, 4)$ 上存在唯一的零点.

所以 $f(x)$ 在 $[2, 4)$ 上存在唯一的二阶周期点.

综上所述, $f(x)$ 有 2 个二阶周期点.

..... 15 分

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了【2022年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【北京高考资讯】公众号，对话框回复【期末】或者底部栏目<试题下载→期末试题>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

