2018 北京市清华附中高二（上）期末

数　学

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为

（A）（$1,0$）　　（B）（$-1,0$）　　（C）（$0,1$）　　（D）（$0,-1$）

2. 已知 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $f'(x)=$

（A）$e^x(x+1)$　　（B）$e^x(x-1)$　　（C）$\frac{e^x(x+1)}{x^2}$　　（D）$\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程为

（A）$y=\pm\frac{1}{2}x$　　（B）$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$　　（C）$y=\pm 2x$　　（D）$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

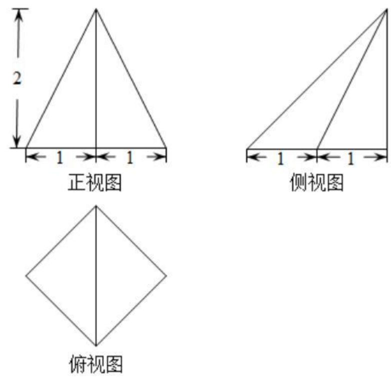
4. 若过原点的直线 l 与圆 $x^2+(y-4)^2=4$ 切于第二象限，则直线 l 的方程是

（A）$y=\sqrt{3}x$　　（B）$y=-\sqrt{3}x$　　（C）$y=2x$　　（D）$y=-2x$

5. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点为 F_1，F_2，点 P 是椭圆上任意一点（非左右顶点），则！PF_1F_2 的周长为

（A）8　　（B）6　　（C）4　　（D）3

6. 一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图为正方形，则该几何体最大的侧面的面积为

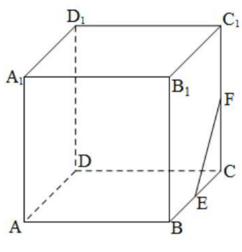


（A）1　　（B）$\sqrt{2}$

（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

7. 如果函数 $y=x^3-3x^2+ax$ 存在极值，则实数 a 的取值范围是

（A）（$3,+\infty$）　　（B）[$3,+\infty$）　　（C）（$-\infty,3$）　　（D）（$-\infty,3$]



8. 如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 是棱 BC、CC_1 的中点，P 是底面 $ABCD$ 上（含边界）一动点，满足 $A_1P\perp EF$，则线段 A_1P 长度的取值范围是

（A）$[1,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　（B）$[\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{3}{2}]$

（C）$[1,\sqrt{3}]$　　（D）$[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

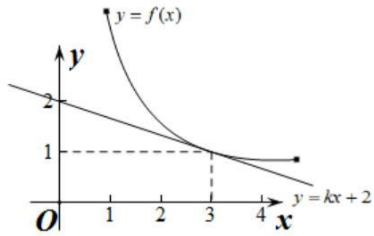
9. 已知 $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$，则 $f'(1)=$______.

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，则它的离心率为______.

11. 已知圆锥的底面半径为3，母线长为4，则该圆锥的体积等于______.

12. 若函数 $f(x)=x^2-aInx$ 在 $x=1$ 处取极值，则 $a=$______.

13. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，直线 $y=kx+2$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切，如图所示，则函数 $g(x)=xf(x)$ 的图象在点（$3,g(3)$）处的切线方程为______.



14. 某网店统计了连续三天售出商品的种类情况：第一天售出20种商品，第二天售出14种商品，第三天售出18种商品；前两天都售出的商品有5种，后两天都售出的商品有4种. 则该网店

①第一天售出但第二天未售出的商品有______种；

②这三天售出的商品最少有______种.

三、解答题：

15. 已知｛a_n｝是等比数列，$a_1=3$，$a_4=24$. 数列｛b_n｝满足 $b_1=1$，$b_4=-8$，且｛a_n+b_n｝是等差数列.

（Ⅰ）求数列｛a_n｝和｛b_n｝的通项公式；

（Ⅱ）求数列｛b_n｝的前 n 项和.

16. 已知函数 $f(x)=\sin$ （$x+\frac{\pi}{3}$）， $x\in\mathbf{R}$

（Ⅰ）如果点 P （$\frac{3}{5},\frac{4}{5}$）是角 α 终边上一点, 求 $f(\alpha)$ 的值;

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)+\sin x$, 求 $g(x)$ 的单调增区间.

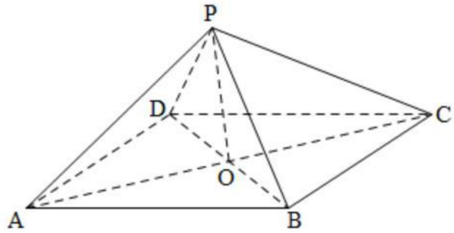
17. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-x$ 为奇函数.

（Ⅰ）求 a 的值;

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 的最小值;

（III）若函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+\frac{1}{2}]$ 上单调递减, 求实数 t 的取值范围.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AD\perp BD$ 且 $AD=BD$, $AC\cap BD=O$, $PO\perp$ 平面 $ABCD$.



（Ⅰ） E 为棱 PC 的中点, 求证: OE // 平面 PAB ;

（Ⅱ）求证: 平面 $PAD\perp$ 平面 PBD ;

（III）若 $PD\perp PB$, $AD=2$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

19. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$）的右焦点为 F （$1,0$）, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）过 F 且斜率为1的直线交椭圆于 M , N 两点， P 是直线 $x=4$ 上任意一点. 求证: 直线 PM , PF , PN 的斜率成等差数列.

20. 已知函数 $f(x)=e^x\sin x-ax$,

（Ⅰ）若 $a=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在（$0,f(0)$）处的切线方程;

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

（III）当 $a\le 1$ 时, 求证: 对于任意的 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$, 均有 $f(x)\ge 0$.

数学试题答案

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	B	D	C	D

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. -1 10. $\frac{5}{4}$

11. $3\sqrt{7}\pi$ 12. 2

13. $y=3$ 14. 15;29

三、解答题:

15. 解:（Ⅰ）因为｛a_n｝是等比数列，$a_1=3$，$a_4=24$，

所以公比 $q=2$，通项公式为 $a_n=3\times 2^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

因为｛a_n+b_n｝是等差数列，$a_1+b_1=4$，$a_4+b_4=16$，

所以公差 $d=4$，通项公式为 $a_n+b_n=4n$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

故 $b_n=4n-a_n=4n-3\times 2^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（Ⅱ）设数列｛b_n｝的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=b_1+b_2+\cdots b_n$$

$$=4\times 1-3\times 2^{1-1}+4\times 2-3\times 2^{2-1}+\cdots+4\times n-3\times 2^{n-1}$$

$$=4\times(1+2+\cdots+n)-3\times(2^{1-1}+2^{2-1}+\cdots+2^{n-1})$$

$$=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3\times(2^n-1)$$

$= 2n^2+2n+3-3\times 2^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）

16. 解:（Ⅰ）因为点 P（$\frac{3}{5},\frac{4}{5}$）是角 α 终边上一点,

所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$, 则

$f(\alpha)=\sin$（$\alpha+\frac{\pi}{3}$）

$=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

（Ⅱ）$g(x)=f(x)+\sin x$

$=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x$

$=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$=\sqrt{3}\sin$（$x+\frac{\pi}{6}$）

令 $x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$），

得 $x\in[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

故 $g(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

17. 解:（Ⅰ）因为函数 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(-x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+x=-f(x)=-\frac{1}{3}x^3-ax^2+x$

解得 $a=0$

（Ⅱ）因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$，所以 $f'(x)=x^2-1$.

令 $f^{'}(x)=0$，得 $x=\pm 1$.

则在 $[-2,2]$ 上，随着 x 的变化， $f^{'}(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$
$f^{'}(x)$	>0	=0	<0	=0	>0
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

因为 $f(-2)=-\frac{2}{3}$，$f(1)=-\frac{2}{3}$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 的最小值为 $-\frac{2}{3}$.

（III）由（II）可知，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，

故 $[t,t+\frac{1}{2}]\subseteq[-1,1]$，解得 $t\in[-1,\frac{1}{2}]$.

18. 解：（I）证明：因为点 E 为棱 PC 的中点，点 O 为 AC 的中点，

所以 $OE\ //\ PA$，又因为 $PA\subseteq$ 平面 PAB，

所以 $OE\ //$ 平面 PAB.

（II）证明：因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AD\subseteq$ 平面 $ABCD$

所以 $PO\perp AD$，又因为 $AD\perp BD$，

所以 $AD\perp$ 平面 PBD，又因为 $AD\subseteq$ 平面 PAD.

所以平面 $PAD\perp$ 平面 PBD.

（III）因为 $AD=BD=2$，又 $AD\perp BD$，

所以四边形 $ABCD$ 的面积为 4

因为 $PD\perp PB$，点 O 为 BD 的中点，

所以 $PO=\frac{1}{2}BD=1$.

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为: $\frac{1}{3}\times 4\times 1=\frac{4}{3}$.

19. 解:（Ⅰ）因为 $c=1$, $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, 所以 $a=2$, 则 $b=\sqrt{3}$.

故椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）证明:因为直线 MN 方程为: $y=x-1$, 联立椭圆 C 的方程解得

$$M\left(\frac{4+6\sqrt{2}}{7},\frac{6\sqrt{2}-3}{7}\right),\ N\left(\frac{4-6\sqrt{2}}{7},\frac{-3-6\sqrt{2}}{7}\right).$$

设 P（$4,y_0$）, 则 $k_{PM}=\dfrac{y_0-\frac{6\sqrt{2}-3}{7}}{4-\frac{4+6\sqrt{2}}{7}}=\dfrac{7y_0-6\sqrt{2}+3}{24-6\sqrt{2}}$,

$k_{PN}=\dfrac{y_0-\frac{-6\sqrt{2}-3}{7}}{4-\frac{4-6\sqrt{2}}{7}}=\dfrac{7y_0+6\sqrt{2}+3}{24+6\sqrt{2}}$, $k_{PF}=\dfrac{y_0}{3}$

有 $k_{PM}+k_{PN}=\dfrac{7y_0-6\sqrt{2}+3}{24-6\sqrt{2}}+\dfrac{7y_0+6\sqrt{2}+3}{24+6\sqrt{2}}=\dfrac{2y_0}{3}=2k_{PF}$

所以直线 PM, PF, PN 的斜率成等差数列.

20. 解:（Ⅰ）因为函数 $f(x)=e^x\sin x-x$, 则 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1$.

又因为 $f(0)=0$, $f'(0)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在（$0,f(0)$）处的切线方程为: $y=0$.

（Ⅱ）因为 $f(x)=e^x\sin x-ax$, 所以 $f'(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-a$.

函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上恒有 $f'(x)\geq 0$.

即 $\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq a$ 恒成立. 令 $g(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 则

$g(x)_{\min} \ge a$. 又因为 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$，

所以 $a \le 1$.

（III）证明：因为 $f(x)=e^x\sin x-ax$，所以 $f'(x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})-a$.

令 $g(x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $g'(x)=2e^x\cos x$.

①当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 递增，有 $g(x)\ge g(x)_{\min}=g(0)=1$，

因为 $a\le 1$，此时，$f'(x)=g(x)-a\ge 0$，$f(x)$ 递增，

有 $f(x)\ge f(x)_{\min}=f(0)=0$ 成立.

②当 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ 时，$g'(x)\le 0$，$g(x)$ 递减，有 $g(x)\ge g(x)_{\min}=g(\frac{3\pi}{4})=0$，

若 $a\le 0$，此时 $f'(x)=g(x)-a\ge 0$，$f(x)$ 递增，　$f(x)\ge 0$ 显然成立.

若 $a\in(0,1]$，此时记 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},x_0]$ 上递增，

在 $(x_0,\frac{3\pi}{4}]$ 上递减. 此时有 $f(\frac{\pi}{2})\ge f(0)=0$，

$f(\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{3\pi}{4}a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{3\pi}{4}$，

构造 $t(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^x-x$，则 $t'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^x-1$，

令 $t'(x)=0$，求得 $x=In\sqrt{2}$. 故 $t(x)$ 在 $(-\infty,In\sqrt{2}]$ 上递减，

在 $(In\sqrt{2},+\infty)$ 上递增，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{3\pi}{4}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}e^{In\sqrt{2}}-In\sqrt{2}=1-In\sqrt{2}>0$

所以 $f(\frac{3\pi}{4})>0$，此时满足 $f(x)\ge 0$

综上所述，当 $a\le 1$ 时，对于任意的 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，均有 $f(x)\ge 0$.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao