巢湖一中　合肥八中　淮南二中　六安一中　南陵中

宣城中学　滁州中学　池州一中　阜阳一中　灵璧中

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 若$z=-1-i^{2023}$，则$|z|=$（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

2. 设集合$P=\{x|\log_2 x<2\}$，$Q=\{y|y=\sqrt{25-x^2},x\in P\}$，则$P\cap Q=$（　　）

A. $\{x|3<x<4\}$　　B. $\{x|3<x\leq 4\}$

C. $\{x|0<x<4\}$　　D. $\{x|0<x\leq 5\}$

3. 下图是国家统计局2022年6月发布的规模以上工业日均原油产量（单位：万吨）的月度走势情况，现有如下说法：

①2021年5月至2022年5月，规模以上工业原油的日均产量的极差为4；

②从2021年5月至2021年12月中随机抽取1个月份，月增速超过2.9%的概率为$\frac{1}{2}$；

③2022年4月份，规模以上工业原油总产量约为1701万吨；

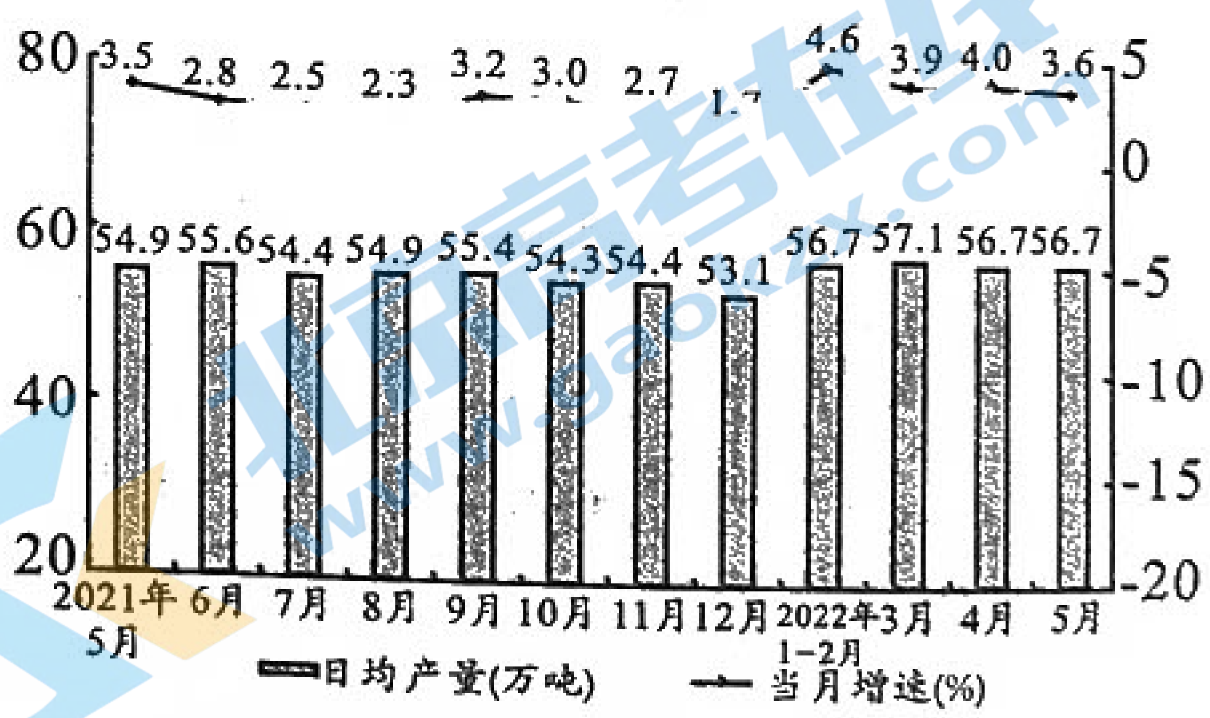
则说法错误的个数为（　　）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3



4. 若$\tan\alpha=3$，则$\sin(2\alpha-3\pi)=$（　　）

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

5. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_n=3S_n-1$，则$S_4=$（　　）

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{9}{16}$　　C. $\frac{7}{24}$　　D. $\frac{5}{16}$

6. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M在线段CC_1上，点N为线段AA_1的中点，记平面$BDM\cap$平面$B_1D_1M=l$，则下列说法一定正确的是（　　）

A. $l\perp$平面BDN　　B. $l\perp$平面B_1D_1N

C. $l\perp$平面CDD_1C_1　　D. $l\perp$平面ACC_1A_1

试题

学 舒城中学 太湖中学 天长中学 屯溪一中
学 宿城一中 合肥六中 太和中学 合肥七中

满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

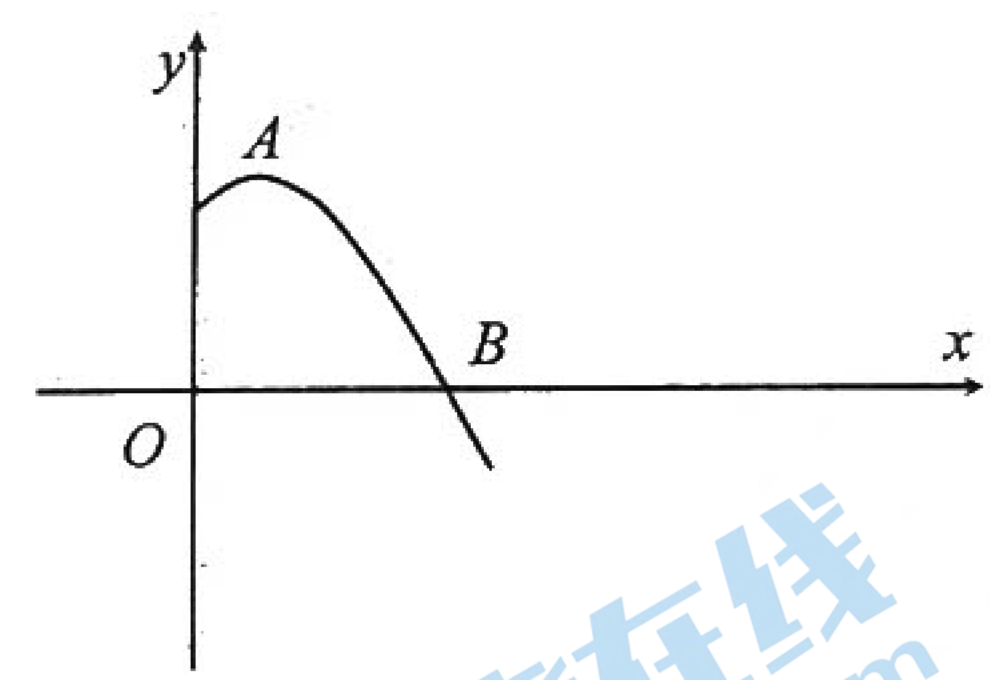
7. 已知函数 $f(x)=(a-1)x^3+x^2+\ln(x^2+2)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则不等式 $f(2x-1)\leqslant f(a)$ 的解集为（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,2]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,1]$

8. 已知 $(mx+1)^n(n\in\mathbf{N}^*,m\in\mathbf{R})$ 的展开式只有第5项的二项式系数最大，设 $(mx+1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_1=8$，则 $a_2+a_3+\cdots+a_n=$（　　）

A. 63　　B. 64　　C. 247　　D. 255

9. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，其中 $A\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$，$B\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$，则下列说法错误的是（　　）



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后关于原点对称

C. $f(x)$ 在 $\left[-\pi,-\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减

D. 直线 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴

10. 在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 都是边长为2的等边三角形，且点 A 在底面 BCD 的射影落在 $\triangle BCD$ 的中心上，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为（　　）

A. 4π　　B. 6π　　C. 8π　　D. $4\sqrt{2}\pi$

11. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 A 在 C 的过第二、四象限的渐近线 l 上，且 $AF_2\perp l$，若 $|BF_2|-|BF_1|=2a$，且 $\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$

12. 已知 x_0 是函数 $f(x)=2^{4x}-2^{2(x+1)}-5$ 的零点，设 $a=4-3^{x_0}$，$b=6-5^{x_0}$，则（　　）

A. $a>0>b$　　B. $b>a>0$　　C. $a>b>0$　　D. $b>0>a$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．将答案填写在题中的横线上．）

13. 已知某次考试的数学成绩 X 服从正态分布 $N(100,\sigma^2)(\sigma>0)$，且 $P(80<X<120)=\dfrac{2}{3}$，现从

这次考试随机抽取3位同学的数学成绩，则这3位同学的数学成绩都在$(100,120)$内的概率为______.

14. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的余弦值为______.

15. 已知抛物线$C_1:y^2=12x$的焦点为F，圆$C_2:x^2+y^2-6x=0$，过F的直线l与C_1交于A,B两点，与C_2交于M,N两点，且A,M在同一象限，则$|AM|+4|BN|$的最小值为______.

16. 函数$f(x)=x\left(e^x-1\right)-\ln x+1$的值域是______.

三、解答题（本大题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分10分）

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{n}{2a_n-5}$，且数列$\{b_n\}$的前n项和为$\dfrac{n}{3}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）已知$c_n=\dfrac{1}{[illegible]}$，记数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求证：$S_n<\dfrac{4}{33}$.

18.（本小题满分12分）

已知某校高三进行第一次摸底考试，从全校选考地理的高三学生中，随机抽取100名学生的地理成绩制成如图所示的频率分布直方图，满分为100分，其中80分及以上为优秀，其他为一般. 已知成绩优秀的学生中男生有10名，成绩一般的学生中男生有40名，得到如下的2×2列联表.

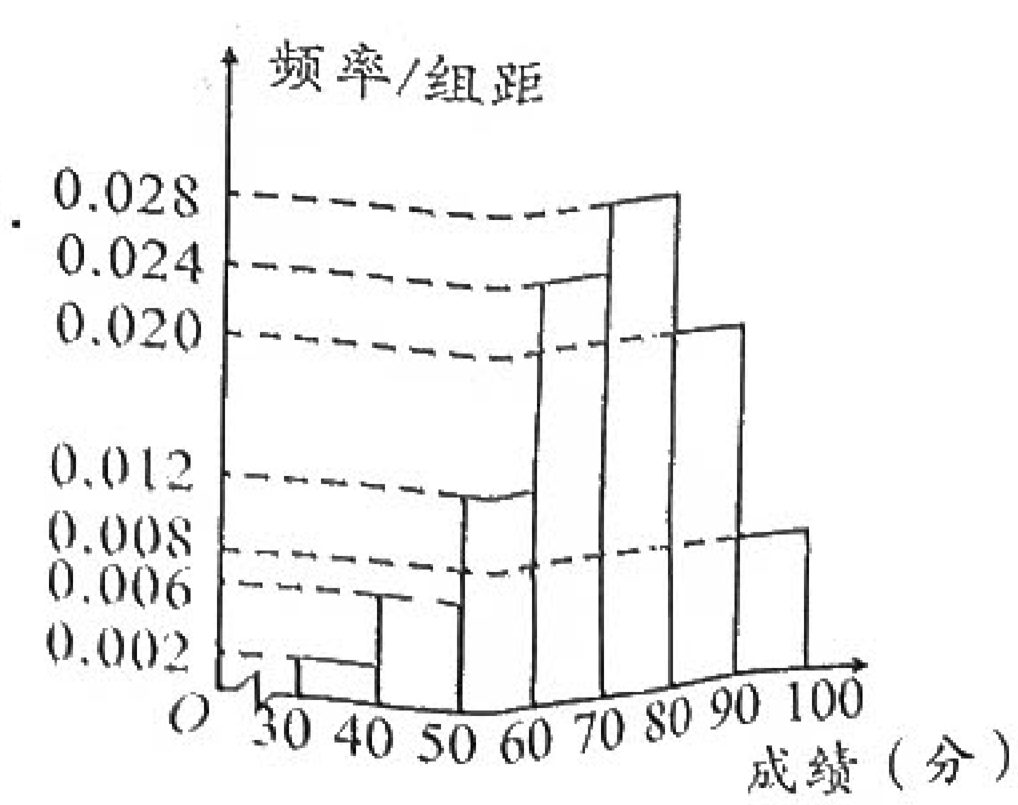
性别	考试成绩		合计
	优秀	一般	
男生	10	40	
女生			
合计			

（1）根据上述数据，完成上面2×2列联表，并依据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，分析“考试成绩优秀”与“性别”是否有关？

（2）从考试成绩在$[80,90),[90,100]$中，利用分层随机抽样抽取7名学生进行学习方法经验介绍，从抽取的学生中，再确定3名学生做学习经验的介绍，则抽取的3名学生中，考试成绩在$[90,100]$的学生数为ξ，求ξ的分布列与数学期望.

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.01	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	10.828



19.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，点 M,N 分别在线段 BC,BA 上，且 $BM=CM$，$\angle ACN=\angle BCN$，$AB=\sqrt{13}$，$AM=\dfrac{3}{2}$，$AC=2$.

（1）求 BM 的长；

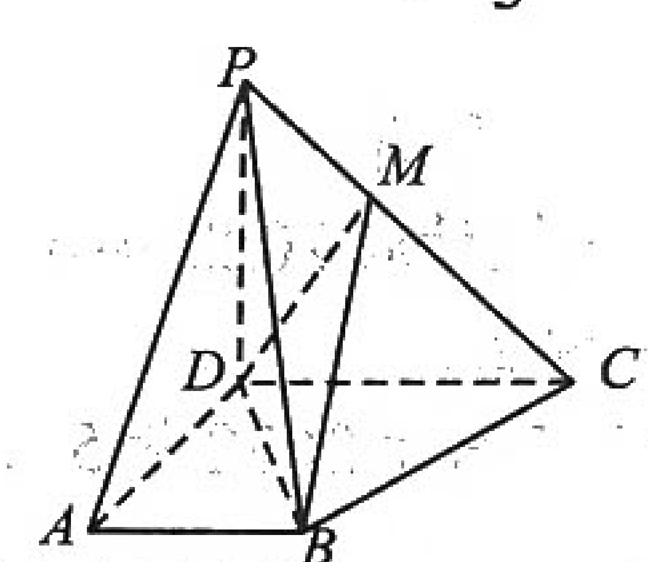
（2）求 $\triangle BCN$ 的面积.

20.（本小题满分 12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，且 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\,//\,DC$，$DC=2AB=4$，$AB\perp AD$，$PD=2$，点 M 在棱 PC 上.

（1）当 $MC=2MP$ 时，求证：$PA\,//$ 平面 MBD；

（2）若直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，二面角 $P-BD-M$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 $\dfrac{PM}{PC}$ 的值.



21.（本小题满分 12 分）

已知 O 为坐标原点，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 过点 M,N,P，记线段 MN 的中点为 Q.

（1）若直线 MN 的斜率为 3，求直线 OQ 的斜率；

（2）若四边形 $OMPN$ 为平行四边形，求 $|MN|$ 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax,a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

（2）若 $x\in(-1,0]$，$f(x)\leq 1-\cos x$，求 a 的取值范围.

1号卷·A10联盟2023届高三开学摸底考

数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	A	D	D	D	C	C	B	B	A

1. C　由题意得，$z=-1-i^{2023}=-1+i$，则$|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. 故选 C.

2. A　$\because P=\{x|\log_2 x<2\}=\{x|0<x<4\}$，$Q=\{y|y=\sqrt{25-x^2},x\in P\}=\{y|3<y<5\}$，$\therefore P\cap Q=\{x|3<x<4\}$. 故选 A.

3. B　由图可知，极差为$57.1-53.1=4$，故①正确；2021年5月至2021年12月，月增速超过2.9%的有5月、9月、10月，故所求概率为$\frac{3}{8}$，故②错误；$56.7\times30=1701$，故③正确. 故选 B.

4. A　由题意得，$\sin(2\alpha-3\pi)=-\sin2\alpha=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{3}{5}$. 故选 A.

5. D　当$n=1$时，$a_1=3a_1-1$，$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，当$n\geqslant2$时，$a_{n-1}=3S_{n-1}-1$，两式相减可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-\frac{1}{2}$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，$\therefore a_n=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\therefore S_4=\frac{5}{16}$. 故选 D.

6. D　由题意得，$B_1D_1//BD$，则$B_1D_1//$平面BDM，又平面$BDM\cap$平面$B_1D_1M=l$，$\therefore B_1D_1//l$，$\therefore l\perp$平面ACC_1A_1. 故选 D.

7. D　由函数$f(x)$为偶函数，得$a=1$，则函数$f(x)=x^2+\ln(x^2+2)$，且在$[0,+\infty)$上单调递增，则$f(2x-1)\leqslant f(1)$可以变为$f(|2x-1|)\leqslant f(1)$，则$|2x-1|\leqslant1$，解得$0\leqslant x\leqslant1$. 故选 D.

8. C　由题意得，$n=8$，$a_1=C_8^7m=8$，$\therefore m=1$，$\therefore(x+1)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，令$x=1$，得$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=2^8=256$，令$x=0$，得$a_0=1$，$\therefore a_2+a_3+\cdots+a_n=247$. 故选 C.

9. C　由题意得，$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，则$T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，而$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2$，即$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 A 正确；函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，得到$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin2x$，该函数图象关于原点对称，故 B 正确；$\because x\in\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{3},-\pi\right]$，则$f(x)$在$\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$上先增后减，故 C 错误；$\because f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$，$\therefore$直线$x=\frac{7\pi}{12}$为$f(x)$图象的一条对称轴，故 D 正确. 故选 C.

10. B　由点A的投影落在底面BCD的中心上，得四面体$ABCD$为正四面体，且棱长为2. 设点A在底面的投影为O'，四面体$ABCD$的外接球的半径为R，球心为O，可得$BO'=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

又 $AB=2$，$\therefore AO'=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOO'$ 中，$R^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-R\right)^2$，

解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore$ 四面体的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{3}{2}=6\pi$. 故选 B.

11. B $\because |BF_2|-|BF_1|=2a$，$\therefore$ 点 B 在双曲线 C 的左支上，$\because \overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$，$\therefore$ 点 A 为线段 F_2B 的中点，$\therefore |BF_2|=2|AF_2|=2b$，又 $AF_2\perp l$，$\therefore BF_1\perp BF_2$，$\therefore |BF_1|=2a$，$\therefore 2b-2a=2a$，即 $b=2a$，$\therefore e=\sqrt{5}$. 故选 B.

12. A 由 $f(x)=2^{4x}-2^{2(x+1)}-5=0$ 可得 $\left(4^x+1\right)\left(4^x-5\right)=0$，故 $x_0=\log_4 5>1$，

$\because \lg 3\times\lg 5<\left(\frac{\lg 3+\lg 5}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 15}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 16}{2}\right)^2=(\lg 4)^2$，$\therefore \frac{\lg 4}{\lg 3}>\frac{\lg 5}{\lg 4}$，即 $x_0<\log_3 4$，

$\therefore a=4-3^{x_0}>4-3^{\log_3 4}=0$. 又 $\lg 4\times\lg 6<\left(\frac{\lg 4+\lg 6}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 24}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 25}{2}\right)^2=(\lg 5)^2$，

$\therefore \frac{\lg 5}{\lg 4}>\frac{\lg 6}{\lg 5}$，即 $x_0>\log_5 6$，$\therefore b=6-5^{x_0}<6-5^{\log_5 6}=0$. 综上，$a>0>b$. 故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. $\frac{1}{27}$

由题意得，该正态曲线的对称轴为 $X=\mu=100$，$\because P(80<X<120)=\frac{2}{3}$，

$\therefore P(100<X<120)=\frac{1}{3}$，$\therefore$ 3 位同学的数学成绩都在 $(100,120)$ 的概率为 $P=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

14. $-\frac{1}{4}$

$\because |\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$\therefore$ 两边平方可得 $\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，又 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，

$\therefore 12\boldsymbol{b}^2\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=-3\boldsymbol{b}^2$，$\therefore \cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=-\frac{1}{4}$.

15. 12

显然直线 l 不与 y 轴垂直，设直线 l：$x=my+3$，联立 $\begin{cases}y^2=12x\\ x=my+3\end{cases}$，得 $y^2-12my-36=0$，$\Delta>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=12m, y_1y_2=-36$，$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{144}=9$，$\therefore |AM|+4|BN|=$ $(|AF|-3)+4(|BF|-3)=x_1+4x_2\geqslant 2\sqrt{4x_1x_2}=12$，当且仅当 $x_1=4x_2=6$ 时，等号成立.

16. $[2,+\infty)$

$f(x)=x\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\ln x+1=x\cdot\mathrm{e}^x-(\ln x+x)+1$，令 $t=x\mathrm{e}^x>0$，记 $f(t)=t-\ln t+1$，则

$f'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$，易知当 $t\in(0,1)$ 时，$f(t)$ 为减函数；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$f(t)$ 为增函数，

$\therefore f(t)_{\min}=f(1)=2$，$\therefore f(x)$ 的值域为 $[2,+\infty)$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

（1）记数列$\{b_n\}$的前n项和为Q_n，则$Q_n=\dfrac{n}{3}$.

当$n\geqslant 2$时，$b_n=Q_n-Q_{n-1}=\dfrac{n}{3}-\dfrac{n-1}{3}=\dfrac{1}{3}$，……………………3 分

当$n=1$时，$b_1=\dfrac{1}{3}$，则$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$b_n=\dfrac{n}{2a_n-5}=\dfrac{1}{3}$，……………………4 分

$\therefore a_n=\dfrac{3n+5}{2}$. ……………………5 分

（2）由题意得，$c_n=\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{4}{(3n+8)(3n+11)}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{3n+8}-\dfrac{1}{3n+11}\right)$，……………………7 分

$\therefore S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{14}-\dfrac{1}{17}+\cdots+\dfrac{1}{3n+8}-\dfrac{1}{3n+11}\right)$

$=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{3n+11}\right)<\dfrac{4}{33}$. ……………………10 分

18.（本小题满分 12 分）

（1）根据频率分布直方图可得考试成绩优秀的总人数为$100\times(0.020+0.008)\times 10=28$，则女生的人数为$18$，考试成绩一般的人数为$72$，则女生的人数为$72-40=32$，则$2\times 2$列联表为

性别	考试成绩		合计
	优秀	一般	
男生	10	40	50
女生	18	32	50
合计	28	72	100

假设H_0：考试成绩优秀与性别无关.

$\chi^2=\dfrac{100\times(10\times 32-40\times 18)^2}{28\times 72\times 50\times 50}\approx 3.175<3.841$，……………………5 分

根据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，

即认为“考试成绩优秀”与“性别”无关. ……………………6 分

（2）易得考试成绩在$[80,90),[90,100]$的学生人数分别为20，8，利用分层随机抽样抽取的学生人数分别为5，2，则ξ的所有可能取值为$0,1,2$，

则$P(\xi=0)=\dfrac{C_5^3}{C_7^3}=\dfrac{2}{7}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\dfrac{4}{7}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\dfrac{1}{7}$，……………………9 分

则ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

……………………10 分

$\therefore E(\xi)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$. ……………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（1）由题意得，$\cos\angle AMB=-\cos\angle AMC$，……………………1 分

在$\triangle AMB$，$\triangle AMC$中，由余弦定理得$\dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM\cdot BM}+\dfrac{AM^2+MC^2-AC^2}{2AM\cdot MC}=0$，……3 分

$\because AB=\sqrt{13},AM=\dfrac{3}{2},AC=2$，$BM=CM$，

$\therefore \dfrac{9}{4}+BM^2-13+\dfrac{9}{4}+BM^2-4=0$，……………………5 分

即$BM^2=\dfrac{25}{4}$，则$BM=\dfrac{5}{2}$. ……………………6 分

（2）由（1）知，$\triangle AMC$为直角三角形，

$\therefore S_{\triangle AMC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMC}=3$. ……………………8 分

$\because \angle ACN=\angle BCN$，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ACN}}{S_{\triangle BCN}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times AC\times CN\times\sin\angle ACN}{\frac{1}{2}\times BC\times CN\times\sin\angle BCN}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{2}{5}$，…………………… 10 分

$\therefore S_{\triangle BCN}=\dfrac{5}{7}S_{\triangle ABC}=\dfrac{15}{7}$，即$\triangle BCN$的面积为$\dfrac{15}{7}$. ……………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

（1）连接AC交BD于点O，连接OM，

由$AB//DC$知，$\triangle ABO\backsim\triangle CDO$，$\therefore \dfrac{OA}{OC}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{2}$，……………………2 分

$\because MC=2MP$，$\therefore \dfrac{OA}{OC}=\dfrac{MP}{MC}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore PA//MO$，……………………3 分

又$MO\subset$平面MBD，$PA\not\subset$平面MBD，$\therefore PA//$平面MBD. ……………………5分

（2）$\because PD\perp$平面$ABCD$，$\therefore \angle PAD$为PA与底面$ABCD$所成的角，

$\because \angle PAD=45°$，$\therefore AD=2$.

以D为坐标原点，分别以DA，DC，DP为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则$A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,4,0),P(0,0,2)$，

$\therefore \overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$. ……………………6 分

设平面PBD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，

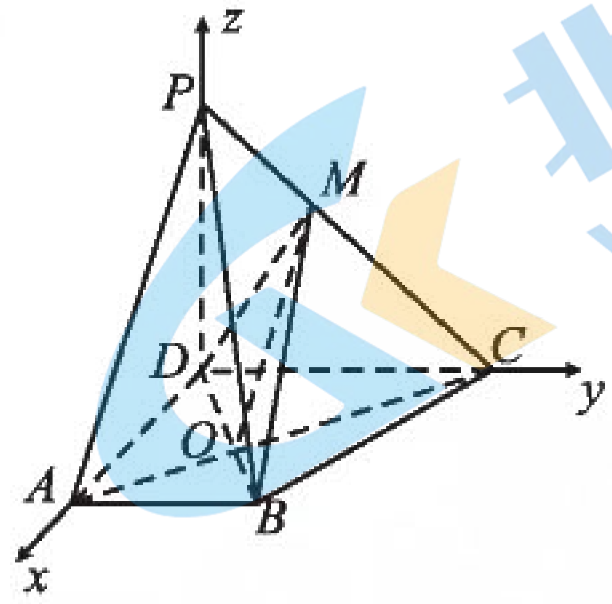
即$\begin{cases}2z_1=0\\ 2x_1+2y_1=0\end{cases}$，令$x_1=1$，则$\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$，……………………8 分

设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PM}=(0,4\lambda,2-2\lambda)$，

设平面MBD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}2x_2+2y_2=0\\ 4\lambda y_2+(2-2\lambda)z_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，则$\boldsymbol{n}=\left(1,-1,\dfrac{2\lambda}{1-\lambda}\right)$，……………………10 分

$$\therefore\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1\times1+(-1)\times(-1)+0\times\frac{2\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{1+(-1)^2}\cdot\sqrt{1+(-1)^2+\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{PM}{PC}=\frac{1}{2}$.…………12 分



21.（本小题满分 12 分）

（1）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}=1\\ \frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{12}=1\end{cases}$，

两式相减可得，$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{16}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{12}=0$，……………………2 分

则 $\frac{12}{16}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=0$，……………………3 分

即 $k_{MN}\cdot k_{OQ}=-\frac{3}{4}$，……………………4 分

故直线 OQ 的斜率为 $-\frac{1}{4}$.……………………5 分

（2）①若直线 MN 垂直于 x 轴，易得 $P(4,0),M(2,3),N(2,-3)$ 或 $P(-4,0),M(-2,3),N(-2,-3)$，

此时 $|MN|=6$；……………………6 分

②若直线 MN 不垂直于 x 轴，设 $MN:y=kx+m(m\neq0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-48=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-48}{3+4k^2}$，……………………7 分

$\because\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，$\therefore x_0=x_1+x_2$，$y_0=y_1+y_2$，

$\therefore x_0=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$y_0=y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{6m}{3+4k^2}$，

即 $P\left(-\frac{8km}{3+4k^2},\frac{6m}{3+4k^2}\right)$……………………8 分

$\because P$ 在椭圆上，$\therefore\frac{\left(-\frac{8km}{3+4k^2}\right)^2}{16}+\frac{\left(\frac{6m}{3+4k^2}\right)^2}{12}=1$，化简得 $m^2=3+4k^2$.

此时 $\Delta=64k^2m^2-16(3+4k^2)(m^2-12)=144m^2>0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}=\dfrac{-8k}{m}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-48}{3+4k^2}=\dfrac{4m^2-48}{m^2}$，

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{12\sqrt{1+k^2}}{|m|}=12\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3+4k^2}}=12\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\left(3+4k^2\right)}}$. ……………………10 分

$\because 3+4k^2\geqslant 3$，$\therefore 0<\dfrac{1}{3+4k^2}\leqslant\dfrac{1}{3}$，$\therefore \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\left(3+4k^2\right)}\leqslant\dfrac{1}{3}$，$\therefore 6<|MN|\leqslant 4\sqrt{3}$. ………11 分

综上，$|MN|$的取值范围为$\left[6,4\sqrt{3}\right]$. ……………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

（1）由题意得，$x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a=\dfrac{1-ax-a}{x+1}$，……………………1 分

当$a\leqslant 0$时，$f'(x)>0$，则函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；……………………2 分

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{1-a}{a}=\dfrac{1}{a}-1$；

当$a\geqslant 1$，$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)<0$，则函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；……………………3 分

当$0<a<1$时，当$x\in\left(0,\dfrac{1-a}{a}\right)$时，$f'(x)>0$，当$x\in\left(\dfrac{1-a}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，

故函数$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1-a}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1-a}{a},+\infty\right)$上单调递减. ……………………5分

（2）由题意得，$\ln(x+1)-ax\leqslant 1-\cos x$，即$\ln(x+1)+\cos x-ax\leqslant 1$.

令$g(x)=\ln(x+1)+\cos x-ax$，则$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\sin x-a$，……………………7分

当$-1<x\leqslant 0$时，$g'(x)$单调递减，$\therefore g'(x)\geqslant g'(0)=1-a$. ……………………8分

①当$a\leqslant 1$时，$1-a\geqslant 0$，则$g'(x)\geqslant 0$恒成立，$\therefore g(x)$为增函数，$\therefore g(x)\leqslant g(0)=1$；………10分

②当$a>1$时，$1-a<0$，$-1<\dfrac{1}{a}-1<0$，

$\because g'(0)=1-a<0$，$g'\left(\dfrac{1}{a}-1\right)=-\sin\left(\dfrac{1}{a}-1\right)>0$，

$\therefore$存在$x_0\in(-1,0]$，使$g'(x_0)=0$，且$x\in[x_0,0]$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

$\therefore g(x_0)>g(0)=1$，与$g(x)\leqslant 1$矛盾，舍去.

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,1]$. ……………………12 分