学校:_____________ 准考证号:_____________ 姓名:________

福建省2023届高中毕业班适应性练习卷

数学

注意事项:

1.答题前，学生务必在练习卷、答题卡规定的地方填写自己的学校、准考证号、姓名。学生要认其核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与学生本人准考证号、姓名是否一致。

2.回答选择题时，选出每小圆答案后，用2B铅笔把答题卡上对应圈目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本练习卷上无效。

3.答题结束后，学生必须将练习卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

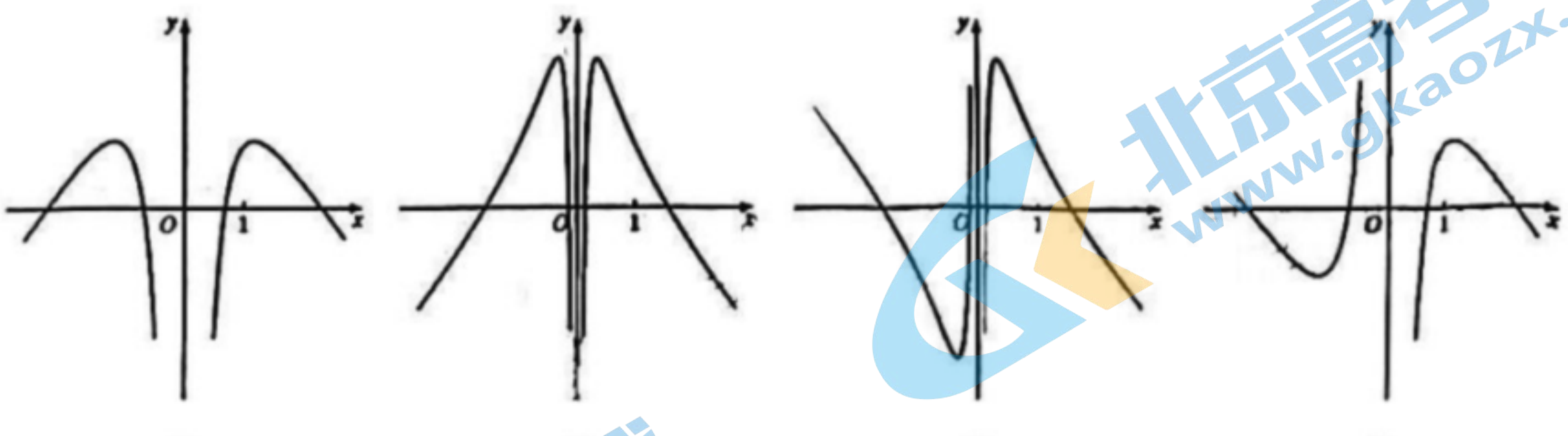
1.已知集合A＝$\{x|y=\lg x\}$，B＝$\{y|y=x^2\}$，则

A.A∪B＝R　　B.$\complement_R A\subseteq B$　　C.A∩B＝B　　D.A⊆B

2.已知z是方程$x^2-2x+2=0$的一个根，则$|\bar{z}|=$

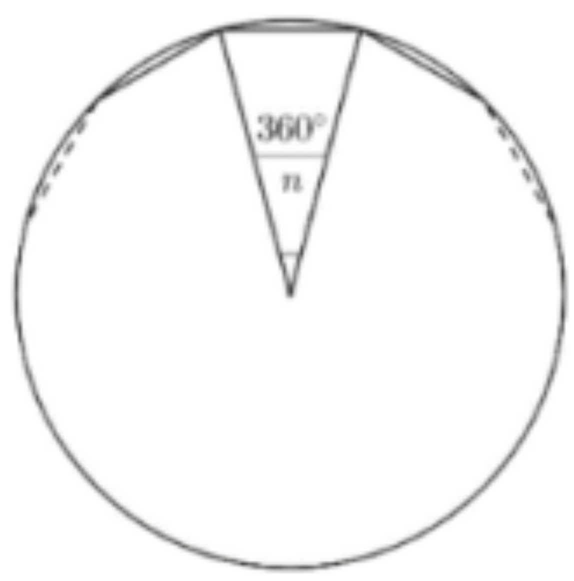
A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.2

3.函数$f(x)=\frac{\ln|x|-x^2+2}{x}$的图象大数为



A　　B　　C　　D

4.中国古代数学专著《九章算术》的第一章“方田”中载有“半周半径相乘得积步”，其大意为:圆的帐周长乘以其半径等于圆面积.南北朝时期杰出的数学家祖冲之曾用圆内接正多边形的面积“替代”圆的面积，并通过增加圆内接正多边形的边数n使得正多边形的面积更接近圆的面积，从而更为“精确”地估计圆周率π.据此，当n足够大时，可以得到π与n的关系为



A. $\pi\approx\frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$　　B. $\pi\approx n\sin\frac{180°}{n}$

C. $\pi\approx n\sqrt{2(1-\cos\frac{360°}{n})}$　　D. $\pi\approx\frac{n}{2}\sqrt{1-\cos\frac{180°}{n}}$

5.已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的离心率为$\sqrt{5}$，左，右焦点分别为$F_1$、$F_2$，$F_1$关于C的一条渐近线的对称点为P.若$|PF_1|=2$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为

A.2　　B.$\sqrt{5}$　　C.3　　D.4

6.中国救援力量在国际自然灾害中为拯救生命作出了重要贡献，很好地展示了国际形象，增进了国际友谊，多次为祖国赢得了荣誉.现有5支救援队前往A，B，C等3个受灾点执行救援任务，若每支救援队只能去其中的一个受灾点，且每个受灾点至少安排1支救援队，其中甲救援队只能去B，C两个数点中的一个，则不同的安排方法数是

A.72　　B.84　　C.88　　D.100

7.已知$a=\ln 2$，$b=e-\frac{1}{a}$，$c=2^a-a$，则

A.$b>c>a$　　B.$b>a>c$　　C.$c>a>b$　　D.$c>b>a$

8.已知X~N（μ，σ^2），则P（$\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma$）≈0.6827，P（$\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma$）≈0.9545，P（$\mu-3\sigma\leqslant X\leq\mu+3\sigma$）≈0.9973. 今有一批数量庞大的零件.假设这批零件的某项质量指标引单位:毫米）服从正态分布N（5.40，0.05^2），现从中随机抽取N个，这N个零件中恰有K个的质量指标ξ位于区间（5.35，5.55）.若K=45，试以使得P（K=45）最大的N值作为N的估计值，则N为

A.45　　B.53　　C.54　　D.90

二、选择题:本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目数。部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9.已知向量$\boldsymbol{a}=$（1，2），$\boldsymbol{b}=$（4，2），则

A.（$\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{b}$）⊥（$\boldsymbol{a}$+$\boldsymbol{b}$）　　B.$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

C.$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量是$-\boldsymbol{a}$　　D.$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$上的投影向量是（-3，4）

10.已知函数$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x$（$\omega>0$）满足:$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$，则

A.曲线$y=f(x)$关于直线$x=\frac{7\pi}{6}$对称　　B.函数$y=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$是奇函数

C.函数$y=f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$单调递减　　D.函数$y=f(x)$的值域为[-2，2]

11.已知抛物线C的焦点为F，准线为l，点P在C上，PQ垂直l于点Q，直线QF与C相交于M、N两点.若M为QF的三等分点，则

A.$\cos\angle PQM=\frac{1}{2}$　　B.$\sin\angle QPM=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

C. NP=QF　　D. $PN=\sqrt{3}PQ$

12.正方体ABCD-$A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，M为侧面AA_1D_1D上的点，N为侧面CC_1D_1D上的点，则下列判断正确的是

A.若$BM=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则M到直线A_1D的距离的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$

B.若$B_1N\perp AC_1$，则$N\in CD_1$，且直线B_1N∥平面A_1BD

C.若$M\in A_1D$，则B_1M与平面A_1BD所成角正弦的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

D.若$M\in A_1D$，$N\in CD_1$，则M，N两点之间距离的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

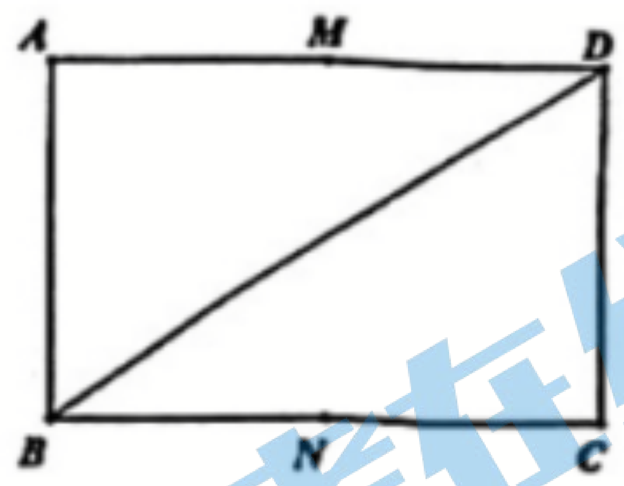
三、填空题:本题共4小圈，每小题5分，共20分，其中第16题第一空2分，第二空3分。

13.写出过点（2，0）且被圆$x^2-4x+y^2-2y+4=0$截得的弦长为$\sqrt{2}$的一条直线的方程______.

14.已知$\{a_n\}$是单调递增的等比数列，$a_4+a_5=24$，$a_3a_6=128$，则公比q的值是______.

15.已知函数$f(x)=\begin{cases} e^{-2x}-1, x\le 0, \\ \frac{1}{2}\ln(x+1), x>0. \end{cases}$若$x(f(x)-a|x|)\le 0$，则$a$的取值范围是______.

16.如图，一张A_4纸的长$AD=2\sqrt{2}a$，宽$AB=2a$，.M，N分别是AD，BC的中点.现将△ABD沿BD折起，得到以A，B，C，D为顶点的三棱锥，则三棱锥A-BCD的外接球O的半径为______;在翻折的过程中，直线MN被球O截得的线段长的取值范围是______.



四、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b=2c\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求C;

（2）若$c=1$，D为△ABC的外接圆上的点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2$，求四边形ABCD面积的最大值.

18.（12分）

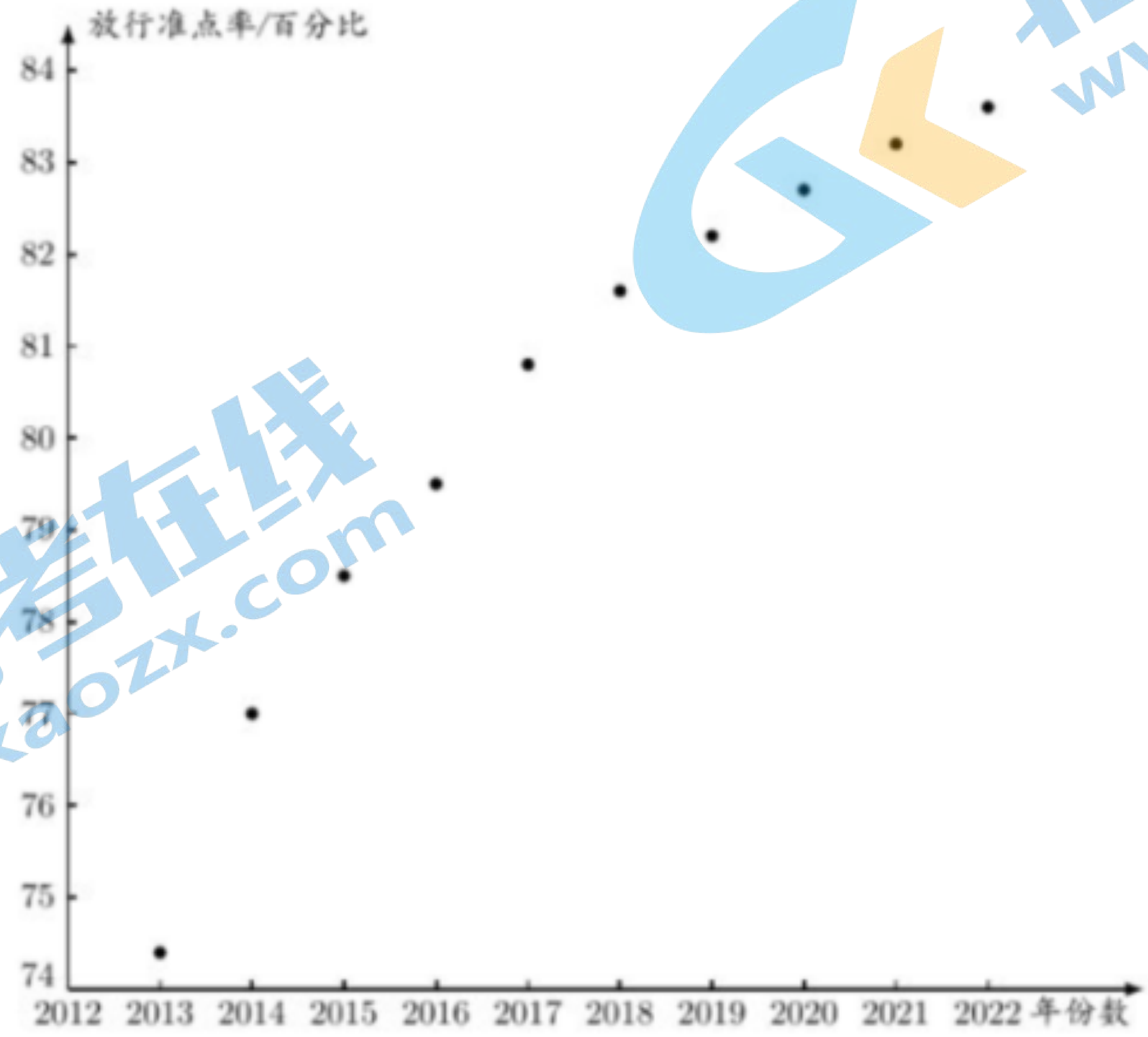
已知数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1$，$a_2=8$，$a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，$a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$.

（1）证明:$\{a_{2n-1}\}$是等差数列:

（2）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n>2023$，求n的最小值.

19.（12分）

放行准点率是衡量机场运行效率和服务质量的重要指标之一.某机场自2012年起采取相关策略优化各个服务环节，运行效率不断提升.以下是根据近10年年份数x_i与该机场飞往A地航班放行准点率y_i（$i=1, 2, \cdots, 10$）（单位:百分比）的统计数据所作的散点图及经过初步处理后得到的一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{t}$	$\sum_{i=1}^{10}x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i$	$\sum_{i=1}^{10}t_i^2$	$\sum_{i=1}^{10}t_iy_i$
2017.5	80.4	1.5	40703145.0	1621254.2	27.7	1226.8

其中$t_i=\ln(x_i-2012)$，$\bar{t}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}t_i$.

（1）根据散点图判断，$y=bx+a$与$y=c\ln(x-2012)+d$哪一个适宜作为该机场飞往A地航班放行准点率y关于年份数x的经验回归方程类型（给出判断即可，不必说明理由），并根据表中数据建立经验回归方程，由此预测2023年该机场飞往A地的航班放行准点率.

（2）已知2023年该机场飞往A地、B地和其他地区的航班比例分别为0.2、0.2和0.6.若以（1）中的预测值作为2023年该机场飞往A地航班放行准点率的估计值，且2023年该机场飞往B地及其他地区（不包含A、B两地）航班放行准点率的估计值分别为80%和75%，试解决以下问题:

（i）现从2023年在该机场起飞的航班中随机抽取一个，求该航班准点放行的概率;

（ii）若2023年某航班在该机场准点放行，判断该航班飞往A地、B地、其他地区等三种情况中的哪种情况的可能性最大，说明你的理由.

附:（1）对于一组数据(u_1, v_1)，(u_2, v_{12})，$\cdots$，(u_n, v_n)，其回归直线$v=\alpha+\beta u$的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}, \quad \hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u};$$

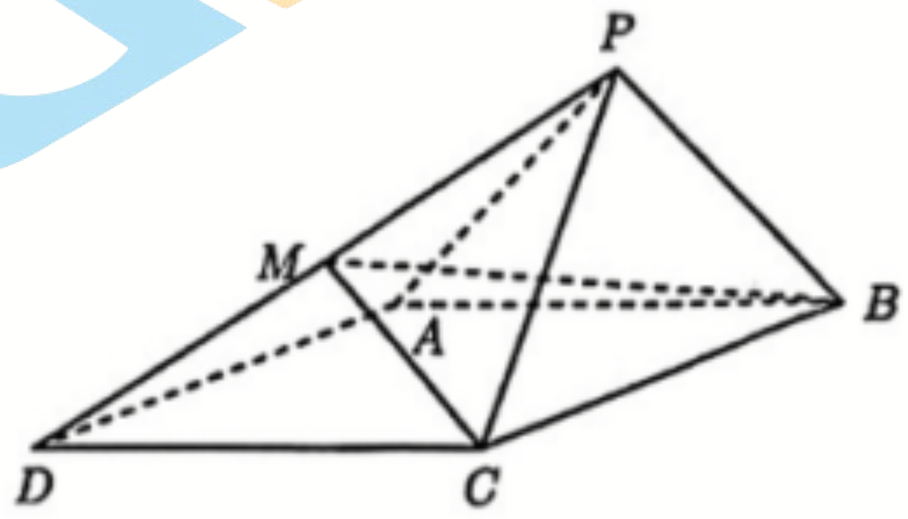
（2）参考数据: $\ln10\approx2.30$，$\ln11\approx2.40$，$\ln12\approx2.48$.

20.（12分）

如图，已知四棱锥P-ABCD的底面为菱形，且∠ABC＝60°，AB＝PC＝2，PA＝PB＝$\sqrt{2}$.M是棱PD上的点，且四面体MPBC的体积为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

（1）证明:PM＝MD;

（2）若过点C，M的平面α与BD平行，且交PA于点Q，求平面BCQ与平面ABCD夹角的余弦值.



21.（12分）

已知圆A_1:（x+1）^{2}+y^2＝16，直线l_1过点A4，0）且与圆A_2交于点B，C，BC中点为D，她A_2C中点E且平行于A_1D的直线交A_1C于点P，记P的轨迹为Γ

（1）求Γ的方程;

（2）坐标原点O关于A_1，A_2的对称点分别为B_1，B_2点A_1，A_2关于直线$y=x$的对称点分别为C_1，C_2过A_1的直线l_2与Γ交于点M，N，直线B_1M，B_2N相交于点Q.请从下列结论中，选择一个正确的结论并给予证明.

① △QBC的面积是定值;② △BB_1B_2的面积是定值:③ △QC_1C_2的面积是定值.

22.（12分）

已知函数f（x）＝（x+a）e^x，a∈R.

（1）讨论f（x）在（0，+∞）的单调性;

（2）是否存在a，x_0，x_1，且$x_0 \neq x_1$，使得曲线$y=f$（x）在$x=x_0$和$x=x_1$处有相同的切线？证明你的结论.

福建省 2023 届高中毕业班适应性练习卷

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。

1．D　2．B　3．C　4．A　5．D　6．D　7．A　8．B

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．BC　10．ABD　11．ACD　12．BD

三、填空题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。

13．$y=x-2$，$y=-x+2$（只需填其中的一个即可）

14．2　15．$\left[\frac{1}{2},2\right]$　16．$\sqrt{3}a$，$\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}a,2\sqrt{3}a\right)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．本小题主要考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换、三角形面积及平面向量等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想等，考查数学运算、逻辑推理、直观想象等核心素养，体现基础性和综合性．满分 10 分．

解法一：（1）因为 $b=2c\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，

$\sin B=2\sin C\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，……………………………………………………1 分

又因为 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)$，

所以 $\sin(A+C)=2\sin C\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，……………………………………………2 分

展开得 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=2\sin C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A\right)$，……………………3 分

即 $\sin A\cos C-\sqrt{3}\sin C\sin A=0$，

因为 $\sin A\neq 0$，故 $\cos C=\sqrt{3}\sin C$，即 $\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$．……………………………4 分

又因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$．……………………………………………………5 分

（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，半径为 R，

因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\right)=0$，即 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

所以 $DA\perp BA$ ……………………………………………………………………………6 分

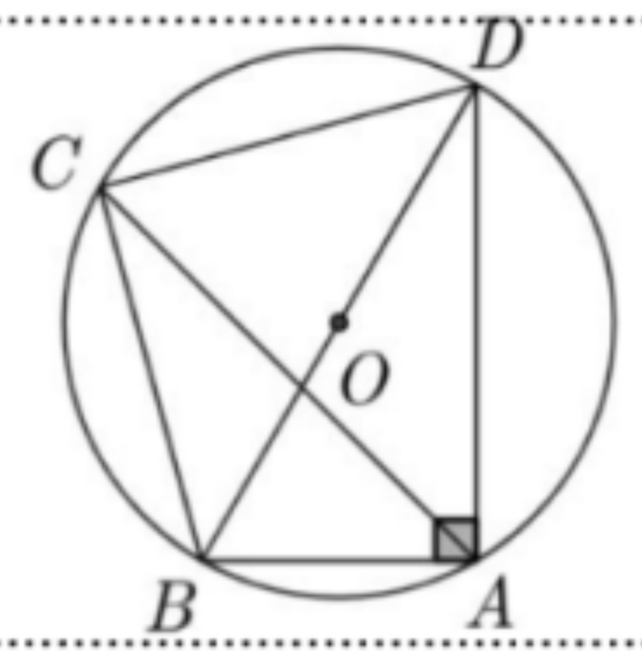
故 BD 是 $\odot O$ 的直径，所以 $BC\perp CD$．

在 $\triangle ABC$ 中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，所以 $BD=2$．…………………7 分

在 $\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{3}$．

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，$BC=x$，$CD=y$，则 $x^2+y^2=4$，…………………8 分

$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD+\dfrac{1}{2}BC\cdot CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}xy$ ……………………9 分



$\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$，

当且仅当 $x=y=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$．……………………………………10 分

解法二：（1）同解法一；…………………………………………………………5 分

（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，半径为 R，$\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 上的投影向量为 $\lambda\overrightarrow{BA}$，

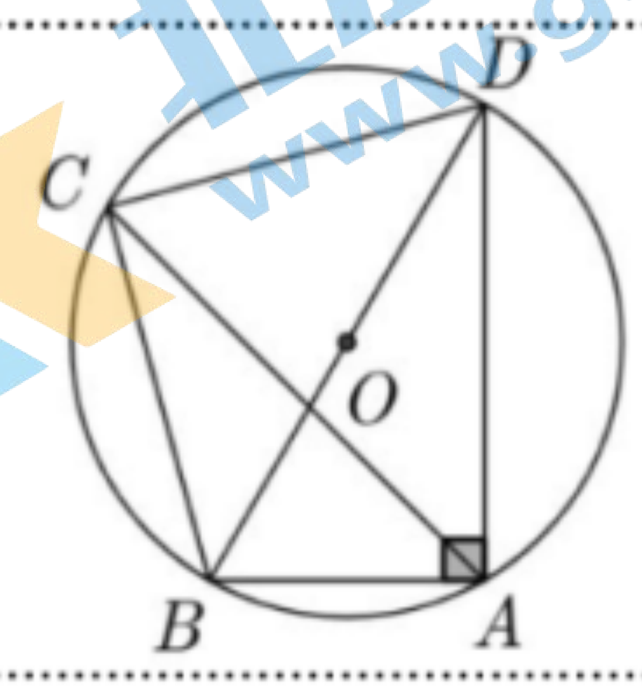
所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\lambda\overrightarrow{BA}\right)=\lambda\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$．又 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2=\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$，所以 $\lambda=1$，

所以 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{BA}$．

所以 $DA\perp BA$ ……………………………………………………………………………6 分

故 BD 是 $\odot O$ 的直径，所以 $BC\perp CD$．

在 $\triangle ABC$ 中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，所以 $BD=2$．…………………7 分



在 $\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{3}$．

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，$\angle CBD=\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $CB=2\cos\theta$，$CD=2\sin\theta$，……………………………………………………8 分

$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD+\dfrac{1}{2}CB\cdot CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\theta$ ……………………9 分

当 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，S 最大，所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$．…………………10 分

解法三：（1）同解法一；…………………………………………………………5 分

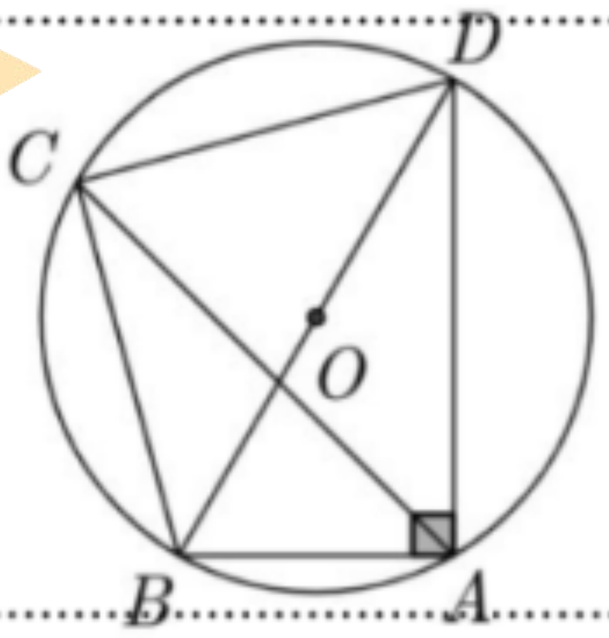
（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，半径为 R，

因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\right)=0$，即 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

所以 $DA\perp BA$ ……………………………………………………………… 6 分

故 BD 是 $\odot O$ 的直径，所以 $BC\perp CD$．

在 $\triangle ABC$ 中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，所以 $BD=2$ ………………………… 7 分



在 $\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{3}$．

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，点 C 到 BD 的距离为 h，

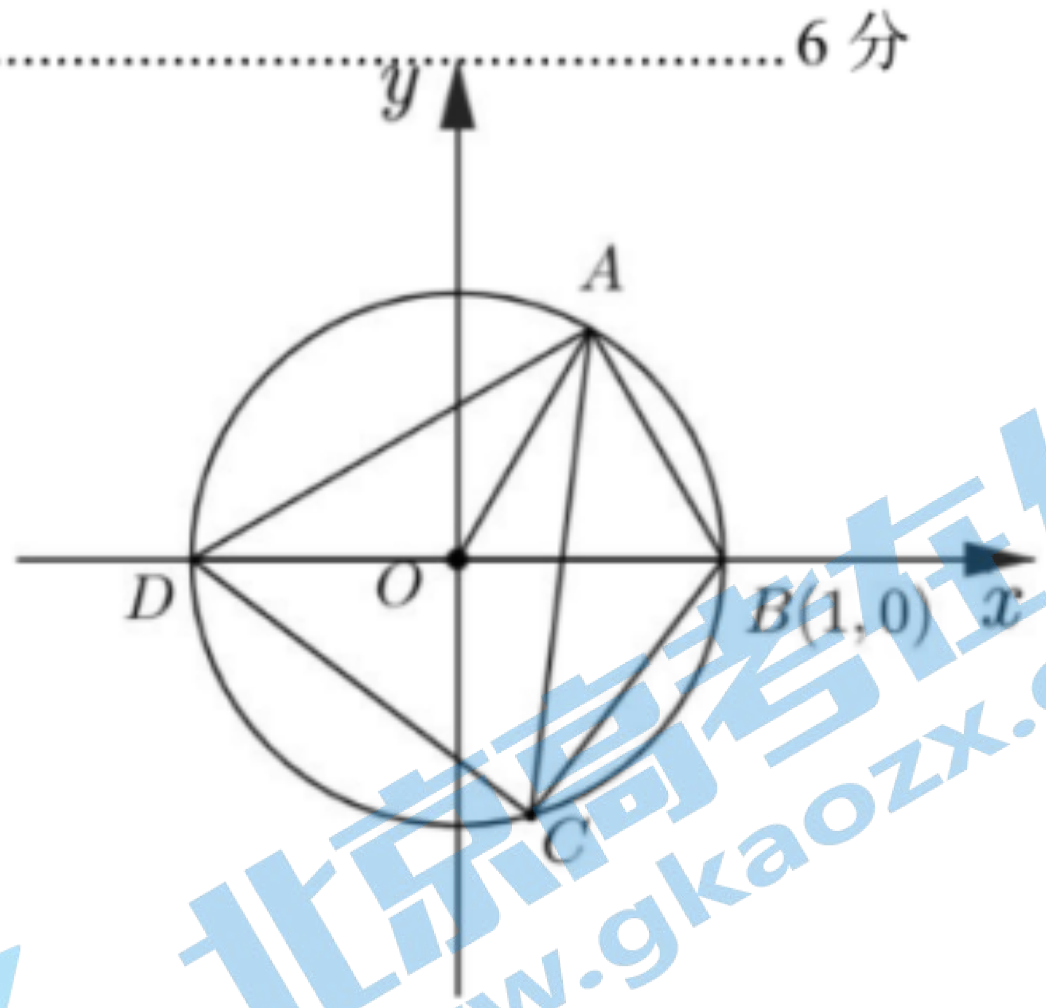
则 $S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD+\dfrac{1}{2}BD\cdot h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+h$ ……………………………… 9 分

当 $h=R=1$ 时，S 最大，所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$ ……………………………… 10 分

解法四：（1）同解法一； ……………………………………………………………… 5 分

（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，半径为 R，

在 $\triangle ABC$ 中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$， ……………………………… 6 分



故 $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot O$ 的半径 $R=1$．

即 $OA=OB=AB=1$，所以 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$．

如图，以 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为原点，OB 所在直线为 x 轴，

建立平面直角坐标系 xOy，则 $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(1,0)$．

因为 C，D 为单位圆上的点，设 $C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$D(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 $\alpha\in(0,2\pi)$，$\beta\in(0,2\pi)$．

所以 $\overrightarrow{BA}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(\cos\beta-1,\sin\beta)$， ……………………………… 7 分

代入 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2$，即 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=1$，可得 $-\dfrac{1}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta=1$， ……………… 8 分

即 $\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$．

由 $\beta\in(0,2\pi)$ 可知 $\beta-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)$，所以解得 $\beta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\beta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，即 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\beta=\pi$．

当$\beta=\dfrac{\pi}{3}$时，A,D重合，舍去；当$\beta=\pi$时，BD是$\odot O$的直径.

设四边形$ABCD$的面积为S，

则$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\dfrac{1}{2}BD\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}BD\cdot|\sin\alpha|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+|\sin\alpha|$，……9分

由$\alpha\in(0,2\pi)$知$|\sin\alpha|\leqslant 1$，所以当$\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$时，即C的坐标为$(0,-1)$时，S最大，

所以四边形$ABCD$面积最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$. ……10分

18. 本小题主要考查指数与对数基本运算、递推数列、等差数列、等比数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性和创新性. 满分12分.

解法一：（1）由$a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，得$a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}$，……2分

则$a_{2n+2}=2^{a_{2n+1}+a_{2n+3}}$，从而$a_{2n}a_{2n+2}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}\cdot 2^{a_{2n+1}+a_{2n+3}}=2^{a_{2n-1}+2a_{2n+1}+a_{2n+3}}$，……3分

又$a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}=2^{4a_{2n+1}}$，……4分

所以$a_{2n-1}+2a_{2n+1}+a_{2n+3}=4a_{2n+1}$，……5分

即$a_{2n-1}+a_{2n+3}=2a_{2n+1}$，所以$\{a_{2n-1}\}$是等差数列. ……6分

（2）设等差数列$\{a_{2n-1}\}$的公差为d.

当$n=1$时，$a_1+a_3=\log_2 a_2$，即$1+a_3=\log_2 8$，

所以$a_3=2$，所以$d=a_3-a_1=1$，……7分

所以数列$\{a_{2n-1}\}$是首项为1，公差为1的等差数列，

所以$a_{2n-1}=n$；……8分

又$a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}=2^{n+(n+1)}=2^{2n+1}$；……9分

$S_9=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8)$

$=(1+2+3+4+5)+(2^3+2^5+2^7+2^9)=15+680=695<2023$，

又$S_{10}=S_9+a_{10}=695+2^{11}=2743>2023$；

又 $a_n>0$，则 $S_n<S_{n+1}$，且 $S_9<2023<S_{10}$，……11分

所以 n 的最小值为 10……12分

解法二：（1）由 $a_{2n}>0$，且 $a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$，

则 $\log_2(a_{2n}a_{2n+2})=\log_2 16^{a_{2n+1}}$，……2分

得 $\log_2 a_{2n}+\log_2 a_{2n+2}=4a_{2n+1}$，……4分

因为 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，$a_{2n+1}+a_{2n+3}=\log_2 a_{2n+2}$，

所以 $(a_{2n-1}+a_{2n+1})+(a_{2n+1}+a_{2n+3})=4a_{2n+1}$，……5分

即 $a_{2n-1}+a_{2n+3}=2a_{2n+1}$，所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列.……6分

（2）设等差数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的公差为 d.

当 $n=1$ 时，$a_1+a_3=\log_2 a_2$，即 $1+a_3=\log_2 8$，

所以 $a_3=2$，所以 $d=a_3-a_1=1$，……7分

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_{2n-1}=n$；……8分

又 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，

所以 $a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}=2^{n+(n+1)}=2^{2n+1}$；……9分

当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，

$S_{2k}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2k}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k})$

$=(1+2+3+\cdots+k)+(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2k+1})$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{8(4^k-1)}{3}$，

$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{8(4^k-1)}{3}-2^{2k+1}=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{2\times4^k-8}{3}$，

所以 $S_9=S_{2\times5-1}=\dfrac{5\times6}{2}+\dfrac{2\times4^5-8}{3}=695<2023$，

$S_{10}=S_{2\times5}=\dfrac{5\times6}{2}+\dfrac{8\left(4^5-1\right)}{3}=2743>2023$，

又 $a_n>0$，则 $S_n<S_{n+1}$，且 $S_9<2023<S_{10}$，......11 分

所以 n 的最小值为 10......12 分

解法三：（1）同解法一；......6 分

（2）设等差数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的公差为 d，

当 $n=1$ 时，$a_1+a_3=\log_2 a_2$，即 $1+a_3=\log_2 8$，

所以 $a_3=2$，所以 $d=a_3-a_1=1$；......7 分

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_{2n-1}=n$；......8 分

又 $a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}=2^{n+(n+1)}=2^{2n+1}$；......9 分

当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，

$S_{2k-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2k-1}$

$=\left(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}\right)+\left(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k-2}\right)$

$=\left(1+2+3+\cdots+k\right)+\left(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2k-1}\right)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+8\left(\dfrac{1-4^{k-1}}{1-4}\right)=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{8\left(4^{k-1}-1\right)}{3}$，

所以 $S_9=S_{2\times5-1}=\dfrac{5\times6}{2}+\dfrac{8\left(4^4-1\right)}{3}=695<2023$，$S_{10}=S_9+a_{10}=695+2^{2\times5+1}=2743>2023$.

又 $a_n>0$，则 $S_n<S_{n+1}$，且 $S_9<2023<S_{10}$，......11 分

所以 n 的最小值为 10......12 分

19. 本小题主要考查一元线性回归模型、条件概率与全概率公式等基础知识，考查数学建模能力、运算求解能力、逻辑推理能力、直观想象能力等，考查统计与概率思想、分类与整合思想等，考查数学抽象、数学建模和数学运算等核心素养，体现应用性和创新性．满分 12 分．

解：（1）由散点图判断 $y=c\ln(x-2012)+d$ 适宜作为该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 关于年份数 x

的经验回归方程类型. ……………………………………………………………………………………1 分

令 $t=\ln(x-2012)$，先建立 y 关于 t 的线性回归方程.

由于 $\hat{c}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}t_iy_i-10\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{10}t_i^2-10\bar{t}^2}=\dfrac{1226.8-10\times1.5\times80.4}{27.7-10\times1.5^2}=4$， ……………………………………2 分

$\hat{d}=\bar{y}-\hat{c}\bar{t}=80.4-4\times1.5=74.4$， ……………………………………………………………3 分

该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=4t+74.4$，

因此 y 关于年份数 x 的回归方程为 $\hat{y}=4\ln(x-2012)+74.4$ ……………………………………4 分

所以当 $x=2023$ 时，该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 的预报值为

$\hat{y}=4\ln(2023-2012)+74.4=4\ln11+74.4\approx4\times2.40+74.4=84$.

所以 2023 年该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 的预报值为 84%. ……………………………………5 分

（2）设 A_1 =“该航班飞往 A 地”，A_2 =“该航班飞往 B 地”，A_3 =“该航班飞往其他地区”，

C =“该航班准点放行”， ………………………………………………………………………………6 分

则 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.2$，$P(A_3)=0.6$，

$P(C|A_1)=0.84$，$P(C|A_2)=0.8$，$P(C|A_3)=0.75$ ……………………………………………………7 分

（i）由全概率公式得，

$P(C)=P(A_1)P(C|A_1)+P(A_2)P(C|A_2)+P(A_3)P(C|A_3)$ ………………………………………………8 分

$=0.84\times0.2+0.8\times0.2+0.75\times0.6=0.778$，

所以该航班准点放行的概率为 0.778. ………………………………………………………………………9 分

（ii）$P(A_1|C)=\dfrac{P(A_1C)}{P(C)}=\dfrac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(C)}=\dfrac{0.2\times0.84}{0.778}$，

$P(A_2|C)=\dfrac{P(A_2C)}{P(C)}=\dfrac{P(A_2)P(C|A_2)}{P(C)}=\dfrac{0.2\times0.8}{0.778}$，

$P(A_3|C)=\dfrac{P(A_3C)}{P(C)}=\dfrac{P(A_3)P(C|A_3)}{P(C)}=\dfrac{0.6\times0.75}{0.778}$， ……………………………………11 分

因为 $0.6\times0.75>0.2\times0.84>0.2\times0.8$，

所以可判断该航班飞往其他地区的可能性最大. ……………………………………………………………12 分

20．本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，空间几何体的体积、平面与平面的夹角等基础知识；考查直观想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力等；考查化归与转化思想，数

形结合思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性．满分 12 分．

解法一：（1）如图 1，取 AB 中点 O，连接 PO，CO．

因为 $PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，所以 $PO\perp AB$，$PO=1$，$BO=1$．

又因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，所以 $CO\perp AB$，$CO=\sqrt{3}$．

因为 $PC=2$，所以 $PC^2=PO^2+CO^2$，所以 $PO\perp CO$．

又因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，$CO\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\cap CO=O$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. ....2 分

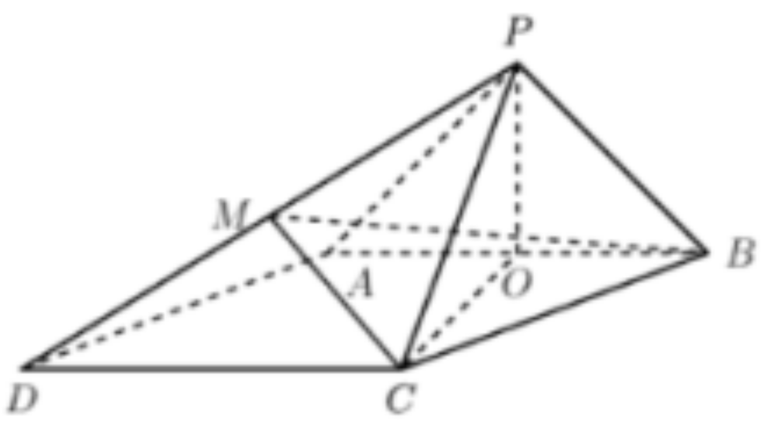
因为 $AD//BC$，$BC\subset$ 平面PBC，$AD\not\subset$ 平面PBC，

所以 $AD//$ 平面PBC，所以 $V_{D-PBC}=V_{A-PBC}=V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ....3 分

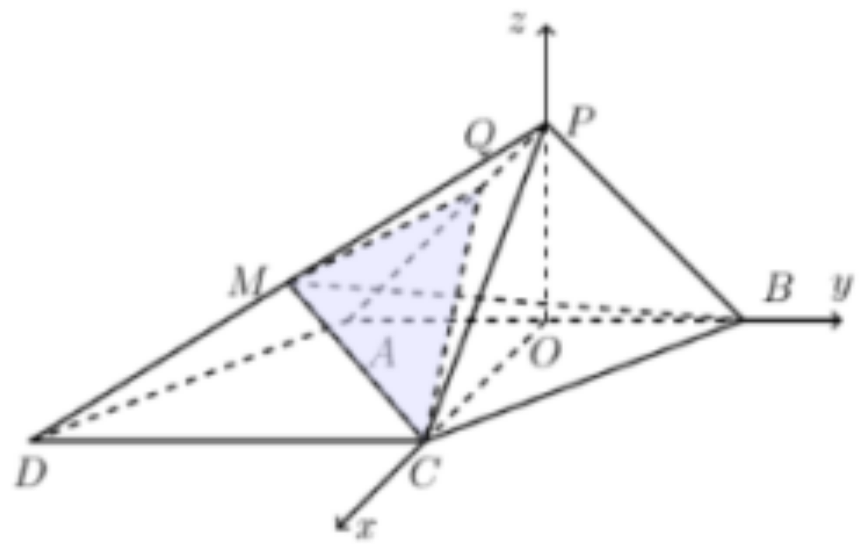
因为 $V_{M-PBC}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}V_{D-PBC}$， ....4 分

所以点 M 到平面 PBC 的距离是点 D 到平面 PBC 的距离的 $\frac{1}{2}$，

所以 $PM=MD$. ....5 分



（图 1）



（图 2）

（2）由（1）知，$BO\perp CO$，$PO\perp BO$，$PO\perp CO$，

如图 2，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系，

....6 分

则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$.

则 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$.

因为 $Q\in AP$，设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=(0,\lambda,\lambda)$，则 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},\lambda-1,\lambda)$，

因为 $BD//\alpha$，$Q\in\alpha$，$C\in\alpha$，$M\in\alpha$，故存在实数 a,b，使得 $\overrightarrow{CQ}=a\overrightarrow{CM}+b\overrightarrow{BD}$，…………7 分

所以 $\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\sqrt{3}b=-\sqrt{3},\\ -a-3b=\lambda-1,\\ \dfrac{a}{2}=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{4}{3},\\ b=-\dfrac{1}{3},\\ \lambda=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{CQ}=\left(-\sqrt{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$……………………………………8 分

设平面 BCQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-\dfrac{y}{3}+\dfrac{2z}{3}=0,\\ \sqrt{3}x-y=0.\end{cases}$

取 $x=1$，得到平面 BCQ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$．…………………………10 分

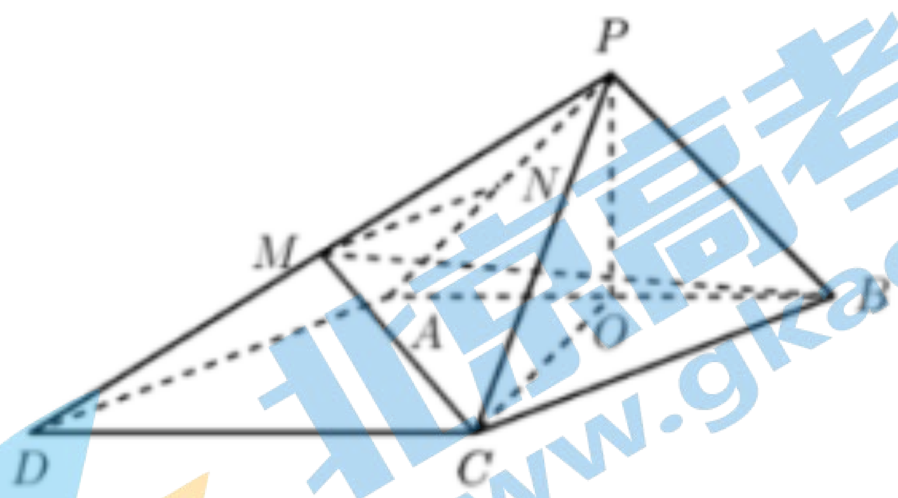
设平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角是 β，

又因为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，…………………………11 分

则 $\cos\beta=|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

所以平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．…………………………12 分

解法二：（1）如图 3，取 AB 中点 O，连接 PO，CO，



（图 3）

因为 $PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，

所以 $PO\perp AB$，$PO=1$，$BO=1$，

又因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，

所以 $CO\perp AB$，$CO=\sqrt{3}$．

因为 $PC=2$，所以 $PC^2=PO^2+CO^2$，所以 $PO\perp CO$．

因为 $AB\subset$ 平面 PAB，$PO\subset$ 平面 PAB，$AB\cap PO=O$，

所以 $CO\perp$ 平面 PAB．……………………………………2 分

$V_{A-PBC}=V_{C-ABP}=\dfrac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．…………………………3 分

过 M 作 $MN//AD$ 交 AP 于点 N，$AD//BC$，所以 $MN//BC$，又 $BC\subset$ 平面PBC，$MN\not\subset$ 平面PBC，

所以 $MN//$ 平面PBC，所以 $V_{M-PBC}=V_{N-PBC}=V_{C-NBP}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle NBP}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

因为 $V_{C-ABP}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle ABP}$，$V_{C-NBP}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle NBP}$

所以 $S_{\triangle ABP}=2S_{\triangle NBP}$，……………………………………………………………………4 分

所以 N 是 PA 的中点，所以 M 是 PD 的中点，所以 $PM=MD$．…………………………………5 分

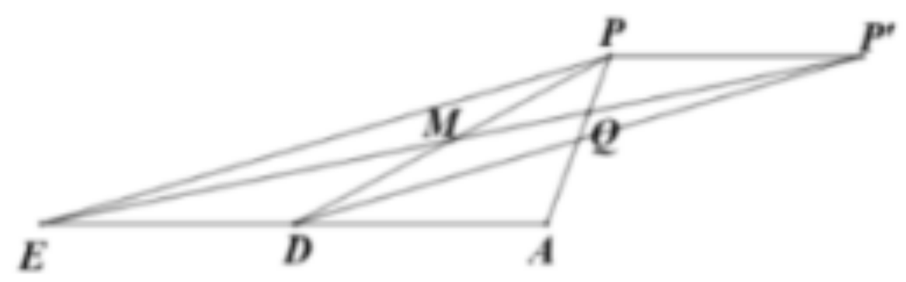
（2）在平面 $ABCD$ 内，过 C 作 $EF//BD$ 交 AD 延长线于点 E，交 AB 延长线于点 F，

因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD=DE$．

如图 4，在平面 PAD 内，作 $PP'//AE$ 交 EM 的延长线于点 P'，设 EP' 交 AP 于点 Q．

所以，四边形 $EDP'P$ 是平行四边形，$PP'=DE, PP'//DE$，

所以 $\triangle QPP'\backsim\triangle QAE$，所以 $\frac{PQ}{AQ}=\frac{PP'}{AE}=\frac{1}{2}$，



（图 4）

所以点 Q 是线段 PA 上靠近 P 的三等分点……………………………………………………………7 分

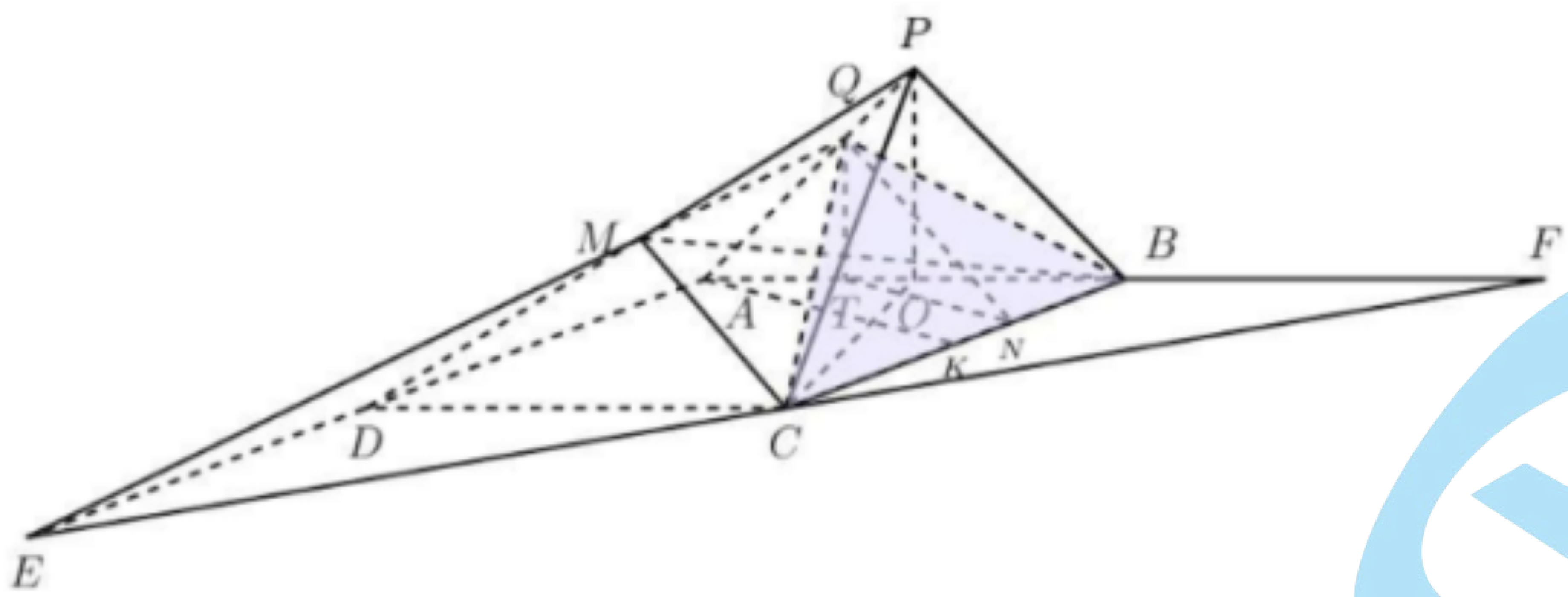
如图 5，在平面 PAB 内，作 $QT//PO$，交 AB 于 T，

因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $QT\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $QT\perp BC$，

因为 $PO=1$，$QT=\frac{2}{3}PO=\frac{2}{3}$，……………………………………………………………………8 分

在平面 $ABCD$ 内，作 $TN\perp BC$，交 BC 于点 N，连接 QN，过 A 作 $AK//TN$ 交 BC 于 K，

在 $\triangle ABK$ 中，$AB=2$，$\angle ABK=60^{\circ}$，所以 $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$，



（图 5）

所以 $TN=\frac{2}{3}AK=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，………………………………………………………………9 分

因为 $QT\perp BC$，$TN\perp BC$，$QT\cap TN=T$，所以 $BC\perp$ 平面 QTN，

因为 $QN\subset$ 平面 QTN，所以 $BC\perp QN$．

所以 $\angle QNT$ 是二面角 $A-BC-Q$ 的平面角．……………………………………………11 分

在 Rt△QTN 中，$\tan\angle QNT=\dfrac{QT}{NT}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\angle QNT=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………12 分

解法三：

（1）同解法一；……………………………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知，$BO\perp CO$，$PO\perp BO$，$PO\perp CO$，

如图 2，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系，

……………………………………………………………………………………………………6 分

则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $M(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-1,\dfrac{1}{2})$.

则 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CM}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-1,\dfrac{1}{2})$.

设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-3y=0,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-y+\dfrac{1}{2}z=0.\end{cases}$

取 $y=1$，得到平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},1,5\right)$. ……………………………………………………7 分

因为 $Q\in AP$，设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=\left(0,\lambda,\lambda\right)$，则 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{3},\lambda-1,\lambda\right)$，

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=-3+\lambda-1+5\lambda=0$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{CQ}=\left(-\sqrt{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. ………………………8 分

设平面 BCQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1-\dfrac{y_1}{3}+\dfrac{2z_1}{3}=0,\\ \sqrt{3}x_1-y_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$，得到平面 BCQ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$. ……………………………………10 分

设平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角是 β，

又因为 $\boldsymbol{n}_2=\left(0,0,1\right)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，……………………………………………………11 分

则 $\cos\beta=\left|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\right|}{\left|\boldsymbol{n}_1\right|\left|\boldsymbol{n}_2\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

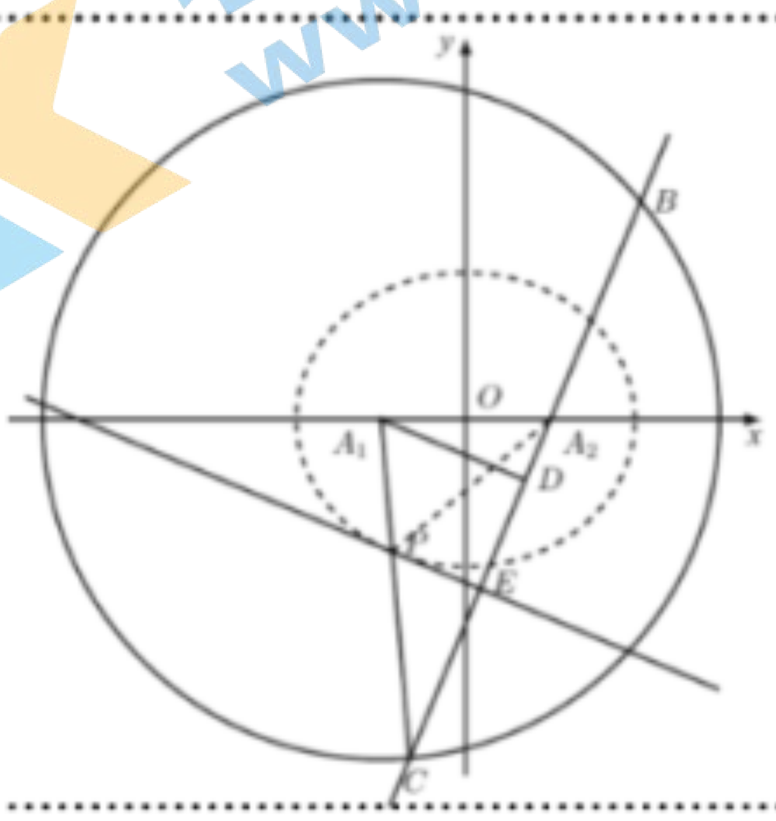
所以平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………12 分

21．本小题主要考查圆、椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算

求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性．满分 12 分．

解法一：（1）由题意得，$A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$．

因为 D 为 BC 中点，所以 $A_1D \perp BC$，即 $A_1D \perp A_2C$，……1 分



又 $PE // A_1D$，所以 $PE \perp A_2C$，

又 E 为 A_2C 的中点，所以 $|PA_2| = |PC|$，

所以 $|PA_1| + |PA_2| = |PA_1| + |PC| = |A_1C| = 4 > |A_1A_2|$，

所以点 P 的轨迹 Γ 是以 A_1, A_2 为焦点的椭圆（左、右顶点除外）．……2 分

设 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$x \neq \pm a$），其中 $a > b > 0$，$a^2 - b^2 = c^2$．

则 $2a = 4$，$a = 2$，$c = 1$，$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$．……3 分

故 Γ：$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$（$x \neq \pm 2$）．……4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值．……5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，

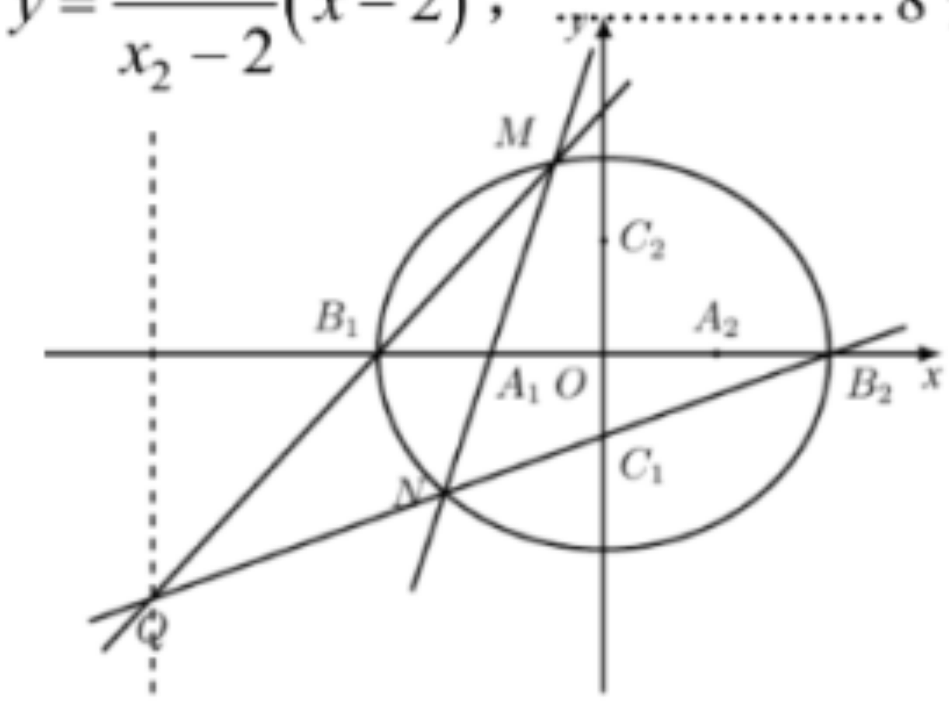
可设直线 l_2：$x = my - 1$，$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，且 $x_1 \neq \pm 2$，$x_2 \neq \pm 2$．

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1, \\ x = my - 1, \end{cases}$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$，……6 分

所以 $y_1 + y_2 = \dfrac{6m}{3m^2 + 4}, y_1y_2 = \dfrac{-9}{3m^2 + 4}$，……7 分

所以 $2my_1y_2 = -3(y_1 + y_2)$．

直线 B_1M 的方程为：$y = \dfrac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$，直线 B_2N 的方程为：$y = \dfrac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$，……8 分



由 $\begin{cases} y = \dfrac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \\ y = \dfrac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2), \end{cases}$

得 $\frac{x+2}{x-2}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}$ ……………………………………………………………………9 分

$$=\frac{y_2(my_1+1)}{y_1(my_2-3)}=\frac{my_1y_2+y_2}{my_1y_2-3y_1}=\frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+y_2}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)-3y_1}=\frac{-\frac{3}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2}{-\frac{9}{2}y_1-\frac{3}{2}y_2}=\frac{1}{3},$$

解得 $x=-4$． ……………………………………………………………………11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

因此 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$． ……………………12 分

解法二：（1）同解法一． ……………………………………………………………4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值． …………………………5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，

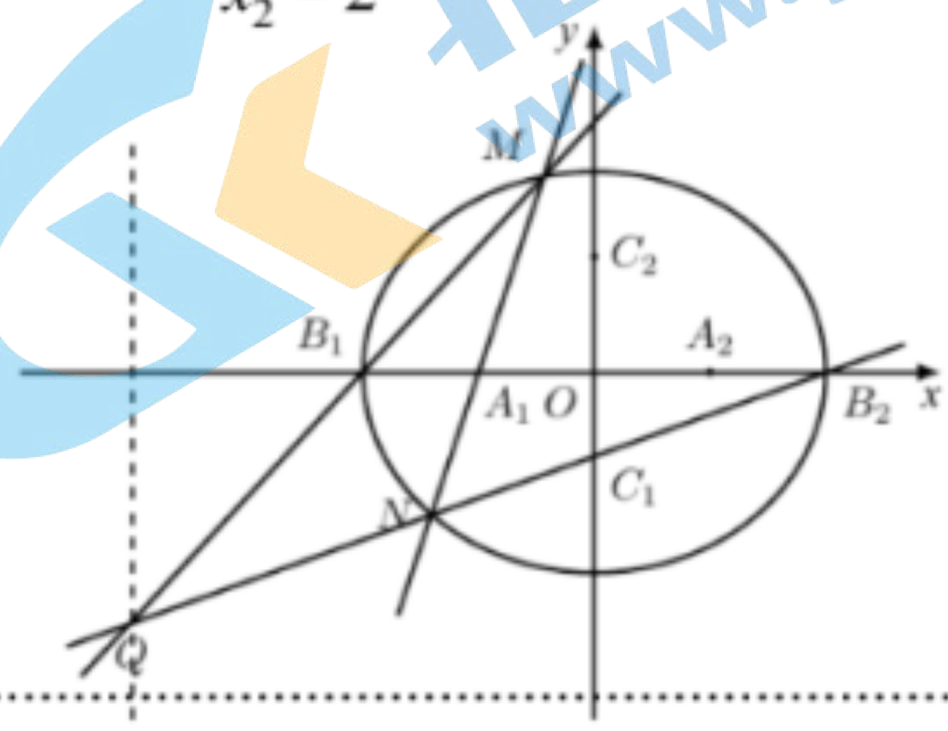
可设直线 l_2：$x=my-1$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$．

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$， ……………………6 分

所以 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$， ……………………………………7 分

所以 $2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$．

直线 B_1M 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，……8 分



由 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$

得 $x=2\left[\frac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}\right]$ ……………………………………9 分

$$=2\left[\frac{y_2(my_1+1)+y_1(my_2-3)}{y_2(my_1+1)-y_1(my_2-3)}\right]=2\left(\frac{2my_1y_2+y_2-3y_1}{y_2+3y_1}\right)$$

$$=2\left[\frac{2my_1y_2+3(y_1+y_2)-2(y_2+3y_1)}{y_2+3y_1}\right]=-4$$ ……………………………………11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

因此 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\times4=4$． ……………………………………12 分

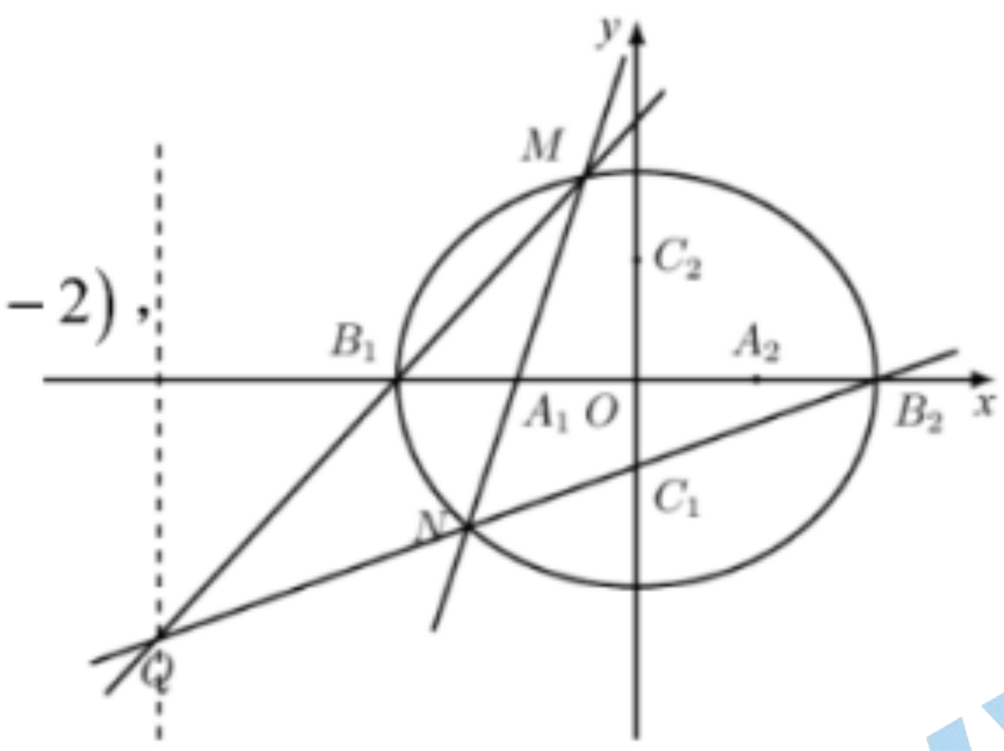
解法三：（1）同解法一． ……………………………………4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值． ……………………………………5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，直线 l_2 的斜率不为 0．

（i）当直线 l_2 垂直于 x 轴时，l_2：$x=-1$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-\frac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=\frac{3}{2}.\end{cases}$

不妨设 $M\left(-1,\frac{3}{2}\right),N\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，



则直线 B_1M 的方程为：$y=\frac{3}{2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\frac{1}{2}(x-2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}(x+2),\\ y=\frac{1}{2}(x-2)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-4,\\ y=-3,\end{cases}$ 所以 $Q(-4,-3)$，

故 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，此时 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\times4=4$． ……………………………………6 分

（ii）当直线 l_2 不垂直于 x 轴时，设直线 l：$y=k(x+1)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$．

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x+1),\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2+8k^2x+(4k^2-12)=0$， ……………………………………7 分

所以 $x_1+x_2=\frac{-8k^2}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$． ……………………………………8 分

直线 MB_1 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 MB_2 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$， ……………………9 分

由 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$

得 $x=2\left[\dfrac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}\right]$ ......10 分

$=2\left[\dfrac{k(x_2+1)(x_1+2)+k(x_1+1)(x_2-2)}{k(x_2+1)(x_1+2)-k(x_1+1)(x_2-2)}\right]=\dfrac{4x_1x_2-2x_1+6x_2}{3x_1+x_2+4}$.

下证：$\dfrac{4x_1x_2-2x_1+6x_2}{3x_1+x_2+4}=-4$.

即证 $4x_1x_2-2x_1+6x_2=-4(3x_1+x_2+4)$，

即证 $4x_1x_2=-10(x_1+x_2)-16$，

即证 $4\left(\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}\right)=-10\left(\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}\right)-16$，

即证 $4(4k^2-12)=-10(-8k^2)-16(4k^2+3)$，

上式显然成立，......11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

此时 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\dfrac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$.

由（i）（ii）可知，$\triangle QC_1C_2$ 的面积为定值.......12 分

解法四：（1）同解法一.......4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值.......5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，

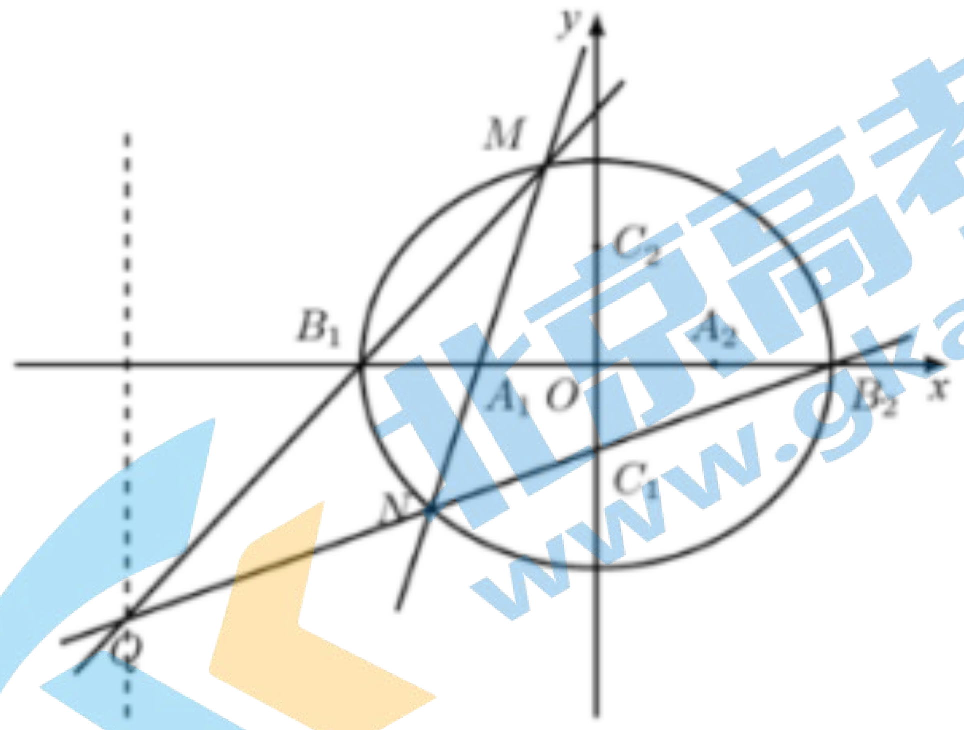
可设直线 l_2：$x=my-1$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，......6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$.......7 分

直线 B_1M 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，......8 分

因为 $\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，所以 $\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)$，



故直线 B_2N 的方程为：$y=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)(x-2)$.

由 $\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)(x-2), \end{cases}$

得 $\frac{x-2}{x+2}=-\frac{4y_1y_2}{3(x_1+2)(x_2+2)}$ ....9 分

$=-\frac{4y_1y_2}{3(mx_1+1)(my_2+1)}=-\frac{4}{3}\left[\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1}\right]=-\frac{4}{3}\left[\frac{-9}{-9m^2+6m^2+(3m^2+4)}\right]=3$，

解得 $x=-4$. ....11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

因此 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\times4=4$. ....12 分

22. 本小题主要考查导数及其应用、函数的单调性、不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、直观想象能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性和创新性．满分 12 分．

解法一：（1）$f'(x)=(x+a+1)e^x$，..1 分

故 $x>-a-1$ 时，$f'(x)>0$；$x<-a-1$ 时，$f'(x)<0$. ....2 分

当 $-a-1>0$，即 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 单调递减，在 $(-a-1,+\infty)$ 单调递增；

当 $-a-1\leqslant0$，即 $a\geqslant-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增．

综上，当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 单调递减，在 $(-a-1,+\infty)$ 单调递增；

当 $a\geqslant-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增. ....4 分

（2）不存在 a,x_0,x_1，且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. ....5 分

证明如下：假设存在满足条件的 a,x_0,x_1，

因为 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

即 $y=\left(x_0+a+1\right)\mathrm{e}^{x_0}\cdot x+\left(a-x_0^2-ax_0\right)\mathrm{e}^{x_0}$， ....6 分

同理 $f\left(x\right)$ 在 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=\left(x_1+a+1\right)\mathrm{e}^{x_1}\cdot x+\left(a-x_1^2-ax_1\right)\mathrm{e}^{x_1}$，

且它们重合，所以 $\begin{cases}\left(x_0+a+1\right)\mathrm{e}^{x_0}=\left(x_1+a+1\right)\mathrm{e}^{x_1},\\ \left(a-x_0^2-ax_0\right)\mathrm{e}^{x_0}=\left(a-x_1^2-ax_1\right)\mathrm{e}^{x_1},\end{cases}$ ....7 分

整理得 $\left(x_0+a+1\right)\left(a-x_1^2-ax_1\right)=\left(x_1+a+1\right)\left(a-x_0^2-ax_0\right)$，

即 $x_0x_1+\left(a+1\right)\left(x_0+x_1\right)+a^2+2a=0$，$x_0x_1+\left(a+1\right)\left(x_0+x_1\right)+\left(a+1\right)^2=1$，

所以 $\left(x_0+a+1\right)\left(x_1+a+1\right)=1$， ....8 分

由 $(x_0+a+1)\mathrm{e}^{x_0}=(x_1+a+1)\mathrm{e}^{x_1}$ 两边同乘以 e^{a+1}，

得 $(x_0+a+1)\mathrm{e}^{x_0+a+1}=(x_1+a+1)\mathrm{e}^{x_1+a+1}$， ....9 分

令 $t_0=x_0+a+1$，$t_1=x_1+a+1$，则 $\begin{cases}t_0\mathrm{e}^{t_0}=t_1\mathrm{e}^{t_1},\\ t_0t_1=1,\end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$，

由 $t_0t_1=1$ 得 $t_0=\dfrac{1}{t_1}$，代入 $t_0\mathrm{e}^{t_0}=t_1\mathrm{e}^{t_1}$ 得 $\mathrm{e}^{\frac{1}{t_1}}=t_1^2\mathrm{e}^{t_1}$，两边取对数得 $\dfrac{1}{t_1}=2\ln\left|t_1\right|+t_1$. ....10 分

令 $g(t)=2\ln|t|+t-\dfrac{1}{t}$，

当 $t>0$ 时，$g(t)=2\ln t+t-\dfrac{1}{t}$，$g'(t)=\dfrac{2}{t}+1+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t+1)^2}{t^2}\geqslant 0$，

所以 $g\left(t\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g\left(1\right)=0$，所以 $t_1=1$，从而 $t_0=1$，与 $t_0\neq t_1$ 矛盾； ....11 分

当 $t<0$ 时，$g(t)=2\ln\left(-t\right)+t-\dfrac{1}{t}$，$g'(t)=\dfrac{2}{t}+1+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t+1)^2}{t^2}\geqslant 0$，

所以 $g\left(t\right)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，又 $g\left(-1\right)=0$，所以 $t_1=-1$，从而 $t_0=-1$，与 $t_0\neq t_1$ 矛盾；

综上，不存在 t_0,t_1，使得 $\begin{cases}t_0\mathrm{e}^{t_0}=t_1\mathrm{e}^{t_1},\\ t_0t_1=1,\end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$.

故不存在 a,x_0,x_1 且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. ....12 分

解法二：(1) 同解法一； ....4 分

（2）不存在 a,x_0,x_1，且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. …………5 分

证明如下：假设存在满足条件的 a,x_0,x_1，

因为 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 即

$y=(x_0+a+1)e^{x_0}\cdot x+(x_0+a)e^{x_0}-x_0(x_0+a+1)e^{x_0}$， ……………………6 分

同理 $f(x)$ 在 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y=(x_1+a+1)e^{x_1}\cdot x+(x_1+a)e^{x_1}-x_1(x_1+a+1)e^{x_1}$，

且它们重合，所以 $\begin{cases}(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1},\\(x_0+a)e^{x_0}-x_0(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a)e^{x_1}-x_1(x_1+a+1)e^{x_1},\end{cases}$ ……………………7 分

整理得 $(x_0+a+1)[x_1+a-x_1(x_1+a+1)]=(x_1+a+1)[x_0+a-x_0(x_0+a+1)]$，

令 $t_0=x_0+a+1$，$t_1=x_1+a+1$，可得 $t_0t_1=1$. ……………………8 分

由 $(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1}$ 两边同乘以 e^{a+1}，

得 $(x_0+a+1)e^{x_0+a+1}=(x_1+a+1)e^{x_1+a+1}$，则 $\begin{cases}t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1},\\t_0t_1=1,\end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$， ……………………9 分

令 $h(t)=te^t$，则 $h(t_0)=h(t_1)$，且 $t_0\neq t_1$.

由（1）知，当 $t>-1$ 时，$h(t)$ 单调递增，当 $t<-1$ 时，$h(t)$ 单调递减，

又当 $t>0$ 时，$h(t)>0$，当 $t<0$ 时，$h(t)<0$，

所以若 t_0,t_1 存在，不妨设 $t_1<-1<t_0<0$，

设 $t_1=mt_0$，$m>1$，又 $t_0t_1=1$，所以 $t_0^2=\dfrac{1}{m}$，则 $t_0=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$，

由 $t_1e^{t_1}=t_0e^{t_0}$，得 $mt_0e^{mt_0}=t_0e^{t_0}$ 即 $me^{mt_0}=e^{t_0}$，

则 $\ln m+mt_0=t_0$，所以 $t_0=\dfrac{\ln m}{1-m}$，

所以 $-\dfrac{1}{\sqrt{m}}=\dfrac{\ln m}{1-m}$，即 $\ln m+\dfrac{1}{\sqrt{m}}-\sqrt{m}=0$， ……………………11 分

令 $g(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，$x\geqslant 1$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x>1$ 时，$g(x)<g(1)=0$，

即 $2\ln x < x-\frac{1}{x}$，取 $x=\sqrt{m}$，即 $\ln m+\frac{1}{\sqrt{m}}-\sqrt{m}<0$，

所以 $\ln m+\frac{1}{\sqrt{m}}-\sqrt{m}=0$ 在 $m>1$ 时无解，

综上，不存在 t_0,t_1，使得 $\begin{cases} t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1}, \\ t_0t_1=1, \end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$.

故不存在 a,x_0,x_1 且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. ....12 分

解法三：（1）同解法一；..4 分

（2）不存在 a,x_0,x_1，且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. ....5 分

证明如下：假设存在满足条件的 a,x_0,x_1，

因为 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

即 $y=(x_0+a+1)e^{x_0}\cdot x+(a-x_0^2-ax_0)e^{x_0}$，..6 分

同理 $f(x)$ 在 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y=(x_1+a+1)e^{x_1}\cdot x+(a-x_1^2-ax_1)e^{x_1}$，

且它们重合，所以 $\begin{cases} (x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1}, \\ (a-x_0^2-ax_0)e^{x_0}=(a-x_1^2-ax_1)e^{x_1}, \end{cases}$ ....7 分

整理得 $(x_0+a+1)(a-x_1^2-ax_1)=(x_1+a+1)(a-x_0^2-ax_0)$，

即 $x_0x_1+(a+1)(x_0+x_1)+a^2+2a=0$，$x_0x_1+(a+1)(x_0+x_1)+(a+1)^2=1$，

所以 $(x_0+a+1)(x_1+a+1)=1$，..8 分

由 $(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1}$ 两边同乘以 e^{a+1}，

得 $(x_0+a+1)e^{x_0+a+1}=(x_1+a+1)e^{x_1+a+1}$，...9 分

令 $t_0=x_0+a+1$，$t_1=x_1+a+1$，则 $\begin{cases} t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1}, \\ t_0t_1=1, \end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$，

令 $h(t)=te^t$，则 $h(t_0)=h(t_1)$，且 $t_0\neq t_1$.

由（1）知，当 $t>-1$ 时，$h(t)$ 单调递增，当 $t<-1$ 时，$h(t)$ 单调递减，

又当 $t>0$ 时，$h(t)>0$，当 $t<0$ 时，$h(t)<0$，

所以若 t_0,t_1 存在，不妨设 $t_1<-1<t_0<0$，

则 $-t_0e^{t_0}=-t_1e^{t_1}$， $\ln(-t_0)+t_0=\ln(-t_1)+t_1$，

所以 $\dfrac{(-t_0)-(-t_1)}{\ln(-t_0)-\ln(-t_1)}=1$ .... 11 分

以下证明 $\dfrac{(-t_0)-(-t_1)}{\ln(-t_0)-\ln(-t_1)}>\sqrt{(-t_0)\cdot(-t_1)}$.

令 $g(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$， $x\geqslant 1$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x>1$ 时， $g(x)<g(1)=0$，

因为 $\sqrt{\dfrac{-t_1}{-t_0}}>1$，所以 $g\left(\sqrt{\dfrac{-t_1}{-t_0}}\right)<0$， $\ln\left(\dfrac{-t_1}{-t_0}\right)-\sqrt{\dfrac{-t_1}{-t_0}}+\sqrt{\dfrac{-t_0}{-t_1}}<0$，

整理得 $\dfrac{(-t_0)-(-t_1)}{\ln(-t_0)-\ln(-t_1)}>\sqrt{(-t_0)\cdot(-t_1)}$.

因为 $\dfrac{(-t_0)-(-t_1)}{\ln(-t_0)-\ln(-t_1)}=1$，所以 $(-t_0)\cdot(-t_1)<1$，与 $t_0t_1=1$ 矛盾；

所以不存在 t_0,t_1，使得 $\begin{cases} t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1}, \\ t_0t_1=1, \end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$.

故不存在 a,x_0,x_1 且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. .... 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。