

2023 北京房山高高三二模

数 学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | x \geq 0\}$ ， $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，则

- (A) $A \subseteq B$ (B) $B \subseteq A$
(C) $A \cup B = B$ (D) $A \cap B = \emptyset$

(2) 在复平面内，复数 $\frac{2+3i}{i}$ 对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 = 21$ ， $S_2 = 9$ ，则 a_1 的值为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(4) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值为

- (A) 2 (B) -4 (C) 4 (D) $2\sqrt{2}$

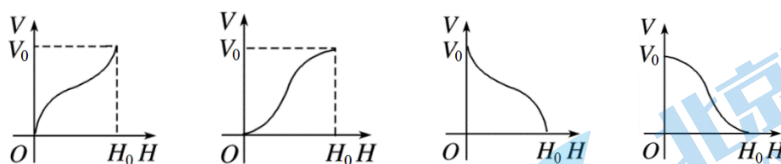
(5) 下列函数中，是偶函数且有最小值的是

- (A) $f(x) = x^2 - 2x$ (B) $f(x) = |\ln x|$
(C) $f(x) = x \sin x$ (D) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

(6) 已知圆 C 的圆心在抛物线 $y^2 = 4x$ 上，且此圆 C 过定点 $(1, 0)$ ，则圆 C 与直线 $x + 1 = 0$ 的位置关系为

- (A) 相切 (B) 相交 (C) 相离 (D) 不能确定

(7) 一个高为 H_0 ，满缸水量为 V_0 的鱼缸的轴截面如图所示，其底部破了一个小洞，满缸水从洞中流出。若鱼缸水深为 H 时，鱼缸里的水的体积为 V ，则函数 $V = f(H)$ 的大致图象是



(A) (B) (C) (D)

(8) 已知双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 点 P, Q 分别在双曲线的左支和右支上, 则直线 PQ 的斜率的取值范围是

- (A) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (B) $(-2, 2)$
 (C) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

(9) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax - \frac{3}{2}, & x \leq 1, \\ 2ax^2 + x, & x > 1. \end{cases}$ 则 “ $a \leq 0$ ” 是 “ $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(10) 设集合 $A = \{(x, y) | x - y \geq 0, ax + y \geq 2, x - ay \leq 2\}$, 则

- (A) 当 $a = 1$ 时, $(1, 1) \notin A$ (B) 对任意实数 a , $(1, 1) \in A$
 (C) 当 $a < 0$ 时, $(1, 1) \notin A$ (D) 对任意实数 a , $(1, 1) \notin A$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 若 $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 已知角 α 终边过点 $P(1, 2)$, 角 β 终边与角 α 终边关于 y 轴对称, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$; $\cos(\beta - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$.

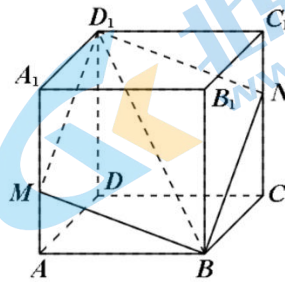
(13) 已知函数 $f(x)$, 给出两个性质:

- ① $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数;
 ② 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 1$.

写出一个同时满足性质①和性质②的函数解析式, $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 若函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的图象与直线 $y = a$ 有两个交点, 则这两个交点横坐标的和为_____.

(15) 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是棱 AA_1 上一点, 平面 MBD_1 与棱 CC_1 交于点 N . 给出下面几个结论:



- ① 四边形 $MBND_1$ 是平行四边形;
- ② 四边形 $MBND_1$ 可能是正方形;
- ③ 存在平面 $MBND_1$ 与直线 BB_1 垂直;
- ④ 任意平面 $MBND_1$ 与平面 ACB_1 垂直;
- ⑤ 平面 $MBND_1$ 与平面 $ABCD$ 夹角余弦的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos 2B = -\frac{1}{2}$, $c = 8$, $b = 7$.

- (I) 求 $\sin C$;
- (II) 若角 C 为钝角, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

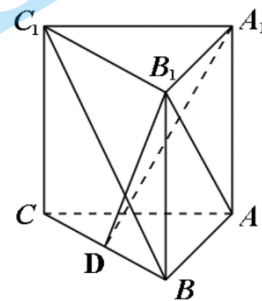
(17) (本小题 14 分)

如图, 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = 2$, D 为 BC 中点, $AA_1 = 2$, 再从条件①, 条件②这两个条件中选择一个作为已知, 完成以下问题:

- (I) 证明: $AB_1 \perp BC_1$;
- (II) 求直线 BC_1 与平面 A_1B_1D 所成角的正弦值.

条件①: $B_1D \perp BC_1$;

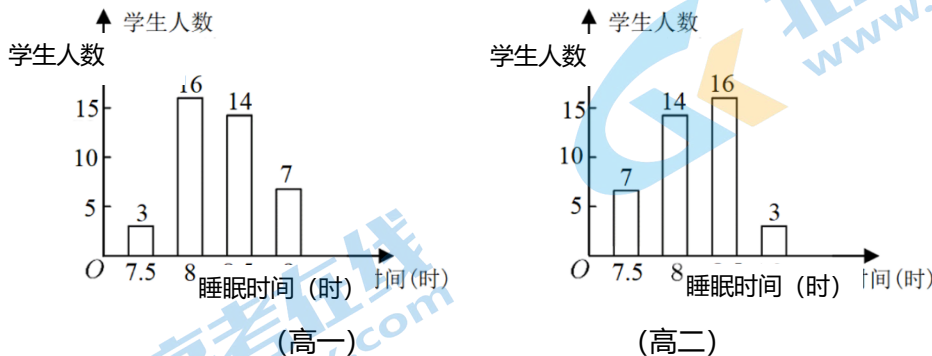
条件②: $BC = 2\sqrt{2}$.



注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

(18) (本小题 13 分)

2021 年 3 月教育部印发了《关于进一步加强中小学生睡眠管理工作的通知》，该《通知》指出，高中生每天睡眠时间应达到 8 小时. 某学校为了解学生的睡眠情况，从高一和高二年级中随机抽取各 40 名学生，统计他们一周平均每天的睡眠时间作为样本，统计结果如图.



(I) 从该校高一年级学生中随机抽取 1 人，估计该生平均每天的睡眠时间不少于 8 小时的概率；

(II) 从该校高二年级学生中随机抽取 2 人，这 2 人中平均每天的睡眠时间为 8 小时或 8.5 小时的人数记为 X ，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ ；

(III) 从该校高一年级学生中任取 1 人，其平均每天的睡眠时间记为 Y_1 ，从该校高二年级学生中任取 1 人，其平均每天的睡眠时间记为 Y_2 ，试比较方差 $D(Y_1)$ 与 $D(Y_2)$ 的大小. (只需写出结论)

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \pi$ 处的切线方程；

(II) 当 $x \in (0, \pi]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(III) 证明： $\sin \frac{1}{3} > \frac{1}{\pi}$.

(20) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $(0, 1)$ ，焦距为 $2\sqrt{3}$. 椭圆 E 的左、右顶点分别为 A, B ，

P 为椭圆 E 上异于 A, B 的动点， PB 交直线 $x = 4$ 于点 T ， AT 与椭圆 E 的另一个交点为 Q .

(I) 求椭圆 E 的标准方程；

(II) 直线 PQ 是否过 x 轴上的定点？若过定点，求出该定点的坐标；若不过定点，说明理由.

(21) (本小题 15 分)

若项数为 $k(k \in \mathbf{N}^*, k \geq 3)$ 的有穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$, 且对任意的 $i, j (1 \leq i \leq j \leq k)$, $a_j + a_i$ 或 $a_j - a_i$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P .

(I) 判断数列 $0, 1, 2$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(II) 设数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P , $a_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是 $\{a_n\}$ 中的任意一项, 证明: $a_k - a_i$ 一定是 $\{a_n\}$ 中的项;

(III) 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P , 证明: 当 $k \geq 5$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯