通州区高三年级第一次模拟考试

数学（文科）试卷

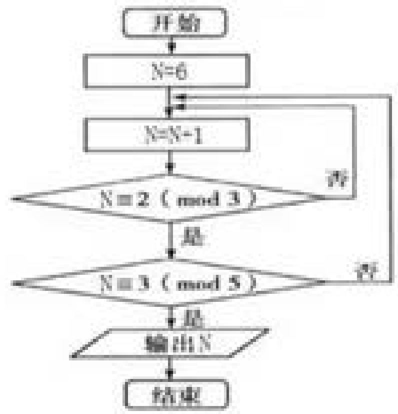
一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{x|x\geq -1\}$， $N=\{x|-2<x<2\}$，则 $M\cap N=$

A．$(-\infty,-1]$　　B．$[-1,2)$　　C．$(-1,2]$　　D．$(2,+\infty)$

2．已知 $c<0$，则下列不等式中成立的是

A．$c>2^c$　　B．$c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　C．$2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　D．$2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$



3．中国古代数学著作《孙子算经》中有这样一道算术题："今有物不知其数，三三数之余二，五五数之余三，问物几何？"现给出该问题算法的程序框图，其中 $N\equiv n(\bmod\ m)$ 表示正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 n．例如 $11\equiv 2(\bmod\ 3)$ 表示 11 除以 3 后的余数是 2．执行该程序框图，则输出的 N 等于

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

4．设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $M(1,a)$ 在抛物线上，则 $|MF|=$

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．4

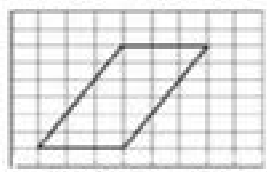
5．如图，网格纸上小正方形的边长为 1．粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的体积为

A.54

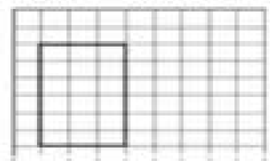
B.$27\sqrt{5}$

C.108

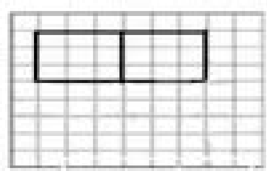
D.$54\sqrt{5}$



正（主）视图



侧（左）视图

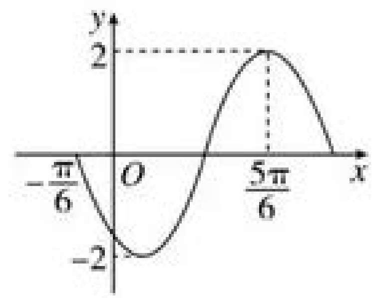


6.已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$a\cdot|c|>b\cdot|c|$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示，则 $f(x)$的表达式为



A．$f(x)=2\sin(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4})$　　B．$f(x)=2\sin(\frac{2}{3}x+\frac{2\pi}{9})$

C．$f(x)=2\sin(\frac{3}{2}x+\frac{5\pi}{4})$　　D．$f(x)=2\sin(\frac{2}{3}x+\frac{25}{18}\pi)$

8. 下面各表格中的四个数之间都有相同的规律，根据这种规律第 10 个表格中 m 的值为

1	5
3	14

第 1 个

3	7
5	32

第 2 个

5	9
7	58

第 3 个

---

	m

第 10 个

A．184　　B. 354　　C. 464　　D. 574

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

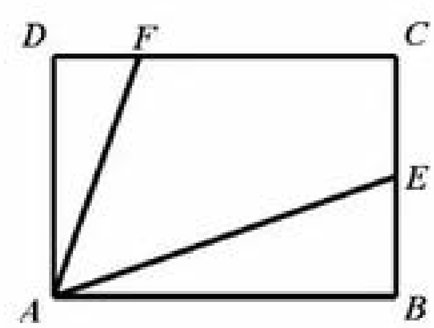
9. 复数 $\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）在复平面内对应的点位于第_____象限.

10.若实数 x，y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值是_________.

11.写出一个既是奇函数又在$(0,+\infty)$内单调递减的函数_____________.

12.直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 截得的弦长为______________.

13.如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=\sqrt{2}$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值是________.



14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a, x\le 1,\\ \log_2 x, x>1,\end{cases}$ 且 $f\left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right]=3$，则实数 $a=$________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题 13 分）

在△ABC 中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$a=4\sqrt{2}$，$b=5$．

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）求△ABC 的面积．

16.（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-1$，$a_n+a_{n+1}=0$；数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 $2n$ 项和．

17.（本小题 13 分）

某校工会开展健步走活动，要求教职工上传 3 月 1 日至 3 月 7 日微信记步数信息，下图是职工甲和职工乙微信记步数情况：

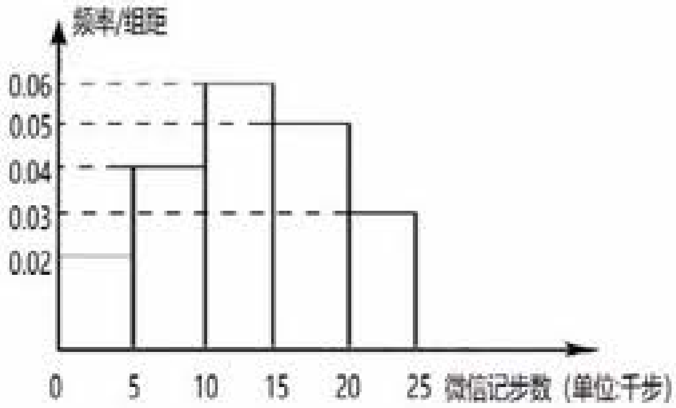
职工甲

职工乙

（Ⅰ）从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选一天，求这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000 的概率；

（Ⅱ）从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选两天，求职工乙在这两天中微信记步数至少有一天不低于 10000 的概率；

（Ⅲ）右图是校工会根据 3 月 1 日至 3 月 7 日某一天的数据，制作的全校 200 名教职工微信记步数的频率分布直方图．已知这一天甲和乙微信记步数在单位 200 名教职工中排名分别为第 68 和第 142，请指出这是根据哪一天的数据制作的频率分布直方图（不用说明理由）．



18.（本小题满分 14 分）

如图 1，菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$AB=4$，$DE\perp AB$ 于 E．将 ΔAED 沿 DE 翻折到 $\Delta A'ED$，使 $A'E\perp BE$，如图 2.

（Ⅰ）求证：$A'E\perp$ 平面 $BCDE$；

（Ⅱ）求三棱锥 $C-A'BD$ 的体积；

（Ⅲ）在线段 $A'D$ 上是否存在一点 F，使 $EF//$ 平面 $A'BC$？若存在，求 $\dfrac{DF}{FA'}$ 的值；若不存在，说明理由.

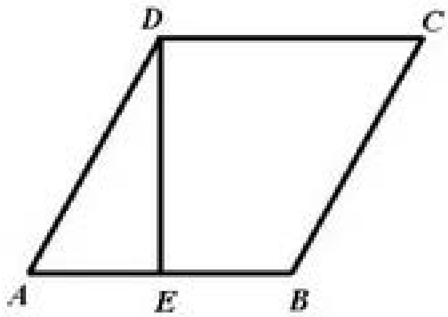


图 1

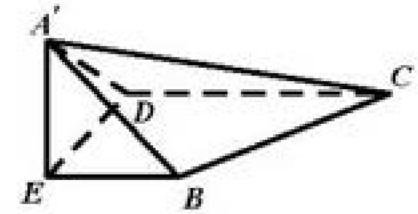


图 2

19.（本小题 13 分）

设 $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，直线 $y=ex+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求 m 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $f(x)\geq\dfrac{1}{x}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20.（本小题 14 分）

已知椭圆 L 的两个焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，长轴长为 $2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 L 的标准方程及离心率；

（Ⅱ）设点 M 为椭圆 L 内任意一点，过点 M 作两条倾斜角互补的直线 l_1 和 l_2（l_1 与 l_2 不重合），l_1 与椭圆 L 交于 A，B 两点，l_2 与椭圆 L 交于 C，D 两点，求证：$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

通州区高三年级第一次模拟考试

数学（文科）试卷参考答案及评分标准 2019. 4

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	B	B	A	B	C	C

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9． 三

10．1

11． $f(x)=-x$（答案不唯一）

12． $2\sqrt{3}$

13．2

14．0 或 7

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 80 分.）

15．解：（Ⅰ）因为 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$0<A<\pi$，

所以 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$. …………………2 分

由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得，$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{5\times\dfrac{4}{5}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. …………………4 分

因为 $a>b$，所以 $A>B$.

所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$. …………………6 分

（Ⅱ）因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $C=\pi-(A+B)$. …………………7 分

因为$B=\dfrac{\pi}{4}$，所以$\sin B=\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ……………………8 分

所以$\sin C=\sin\left[\pi-(A+B)\right]=\sin(A+B)$ ……………………9 分

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ……………………10 分

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$． ……………………11 分

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 5\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}=14$． ……………………13 分

16．解：（Ⅰ）因为$a_n=-a_{n+1}$，$a_1=-1$，

所以$\{a_n\}$为等比数列，其中公比为$q=-1$，首项为$a_1=-1$．

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=(-1)(-1)^{n-1}$，

所以$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=(-1)^n$，$n\in N^*$． ……………………3 分

当$n=1$时，$b_1=S_1=1$；

当$n\geq 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

经检验$n=1$也成立．

所以$\{b_n\}$的通项公式是$b_n=2n-1$，$n\in N^*$． ……………………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$a_n\cdot b_n=(-1)^n(2n-1)$．

设数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前$2n$项和为T_{2n}，则

$$T_{2n}=-1+3-5+7-\cdots-(4n-3)+(4n-1)$$

$$=(-1+3)+(-5+7)+\cdots+\left[-(4n-3)+(4n-1)\right]$$

$$=2n．$$ ……………………13 分

17.（Ⅰ）设“这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000”为事件 A . ...1 分
在该周 7 天中，3 月 2 日，3 月 5 日，3 月 7 日这三天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000，所以 $P(A)=\dfrac{3}{7}$； ....3 分

（Ⅱ）设“职工乙在这两天中微信记步数至少有一天不低于 10000”为事件 B . ...4 分
职工乙在该周 7 天中，有四天微信记步数不低于 10000，分别记为 a_1，a_2，a_3，a_4；有三天微信记步数低于 10000，分别记为 b_1，b_2，b_3 . ...5 分
从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选两天，全部基本事件为

$(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),$

$(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),$

$(a_3,a_4),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_3),$

$(a_4,b_1),(a_4,b_2),(a_4,b_3),$

$(b_1,b_2)(b_1,b_3),$

(b_2,b_3). ....8 分

全部基本事件总数 21 个，事件 B 中的基本事件数 18 个.

所以 $P(B)=\dfrac{18}{21}=\dfrac{6}{7}$. ....10 分

（Ⅲ）3 月 3 日. ....13 分
由直方图知，微信记步数落在[20,25]，[15,20)，[10,15)，[5,10)，[0,5)（单位：千步）区间内的人数依次为 $200\times0.15=30$ 人，$200\times0.25=50$ 人，$200\times0.3=60$ 人，$200\times0.2=40$ 人，$200\times0.1=20$ 人. 由甲微信记步数排名第 68，可知当天甲微信记步数在 15000---20000 之间，根据折线图知，这只有 3 月 2 日、3 月 3 日和 3 月 7 日；而由乙微信记步数排名第 142，可知当天乙微信记步数在 5000---10000 之间，根据折线图知，这只有 3 月 3 日和 3 月 6 日. 所以只有 3 月 3 日符合要求.

18.（Ⅰ）证明：在菱形 $ABCD$ 中，
因为 $DE\perp AB$，所以 $DE\perp AE$.
所以 $A'E\perp DE$. ··················2 分
因为 $A'E\perp BE$，$DE\cap BE=E$，$DE\subset$ 平面 $BCDE$，$BE\subset$ 平面 $BCDE$，

所以$A'E\perp$平面$BCDE$. ……………………4 分

（Ⅱ）解：$V_{C-A'BD}=V_{A'-BCD}$. ……………………5 分

由（Ⅰ）知$A'E\perp$平面$BCDE$.

因为在菱形$ABCD$中，$\angle A=60^{\circ}$，$AB=4$，

所以$\triangle ABD$，$\triangle BCD$是边长为 4 等边三角形.

所以$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. ……………………6 分

因为$DE\perp AB$于E，所以E为AB中点，$AE=EB=2$.

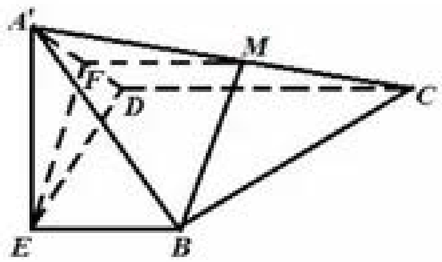
所以三棱锥$A'-BCD$中，高$A'E=2$. ……………………7 分

所以$V_{C-A'BD}=V_{A'-BCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot A'E$ ……………………8 分

$=\frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 2=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. ……………………9 分

（Ⅲ）解：在$A'D$上存在一点F，使$EF//$平面$A'BC$. ……………………10 分

分别取$A'D,A'C$的中点F,M，连EF、FM、BM.



因为FM为$\Delta A'DC$的中位线，

所以$FM//DC$，且$FM=\frac{1}{2}DC$.

在菱形$ABCD$中，$EB//DC$，且$EB=\frac{1}{2}DC$，

所以$FM//EB$，且$FM=EB$.

所以四边形$EBMF$为平行四边形. ……………………11 分

所以$EF//BM$. ……………………12 分

因为$EF\not\subset$平面$A'BC$，$BM\subset$平面$A'BC$，

所以$EF//$平面$A'BC$. ……………………13 分

因为F为$A'D$中点.

所以$\frac{DF}{FA'}=1$. ……………………14 分

19．解：（Ⅰ）当$a=0$时，$f(x)=\ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$. ……….1 分

设切点$P(x_0,y_0)$，则$f'(x_0)=\frac{1}{x_0}=e$， ……….2 分

所以$x_0=\frac{1}{e}$，$y_0=-1$.

把切点 $P(x_0, y_0)$ 的坐标代入切线方程 $y=ex+m$，得 $m=-2$； ....4 分

（II）$f(x)=\frac{a}{x^2}+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， ....5 分

$f'(x)=-\frac{2a}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2a}{x^3}$. ....6 分

（i）当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ....7 分

（ii）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{2a}$.

在 $\left(0,\sqrt{2a}\right)$，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2a})$ 单调递减；

在 $\left(\sqrt{2a},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{2a},+\infty\right)$ 单调递增. ....8 分

（III）$f(x)\ge\frac{1}{x}$ 恒成立，即 $\frac{a}{x^2}+\ln x-\frac{1}{x}\ge 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

也就是 $a+x^2\ln x-x\ge 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. ....9 分

令 $g(x)=a+x^2\ln x-x$，$x\in(0,+\infty)$，则

$g'(x)=2x\ln x+x-1$. ....10 分

因为 $g'(1)=0$， ....11 分

当 $x\in(0,1)$ 时，因为 $x-1<0$，$2x\ln x<0$，所以 $g'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，因为 $x-1>0$，$2x\ln x>0$，所以 $g'(x)>0$. ....12 分

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 时取得极小值 $g(1)=a-1$.

因为在定义域 $(0,+\infty)$ 内 $g(x)$ 只有一个极小值，所以 $g(1)=a-1$ 也是最小值.

所以 $a-1\ge 0$，即 $a\ge 1$.

所以 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. ....13 分

20.（Ⅰ）解：由已知，得 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=\sqrt{2}$.

所以椭圆 L 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ....5 分

（Ⅱ）证明：设直线 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1 和 k_2，$M(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 则

直线 l_1 的方程为 $y-y_0=k_1(x-x_0)$，即 $y=k_1(x-x_0)+y_0$. ....6 分

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k_1(x-x_0)+y_0,\end{cases}$ 得

$(3k_1^2+2)x^2-6k_1(k_1x_0-y_0)x+3(k_1^2x_0^2-2k_1x_0y_0+y_0^2)-6=0$. ....8 分

所以 $x_1+x_2=\frac{6k_1(k_1x_0-y_0)}{3k_1^2+2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{3(k_1^2x_0^2-2k_1x_0y_0+y_0^2)-6}{3k_1^2+2}$， ....9 分

$|MA|\cdot|MB|=|x_1-x_0|\cdot|x_2-x_0|\cdot(1+k_1^2)$ ....10 分

$=|x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2|(1+k_1^2)$

$=\left|\frac{2x_0^2+3y_0^2-6}{3k_1^2+2}\right|(1+k_1^2)$. ....11 分

同理可得 $|MC|\cdot|MD|=\left|\frac{2x_0^2+3y_0^2-6}{3k_2^2+2}\right|(1+k_2^2)$. ....12 分

因为直线 l_1 与 l_2 的倾角互补，所以 $k_2=-k_1$. ....13 分

所以 $|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$. ....14 分

注：解答题学生若有其它解法，请酌情给分.