通州区 2021-2022 学年高三年级第一次模拟考试

数学试卷

2022 年 4 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A=\{x|-2\le x<2\}$，$B=\{x|1\le x<3\}$，则 $A\cap B=$

（A）$[-2,2)$　（B）$[-2,3)$　（C）$[1,2)$　（D）$[1,2]$

(2) 复数 $\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$ 的虚部为

（A）1　（B）-1　（C）i　（D）$1+\mathrm{i}$

(3) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_3+a_5=20$，则 $S_7=$

（A）60　（B）70　（C）120　（D）140

(4) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\dfrac{1}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，$b=3$，则 $c=$

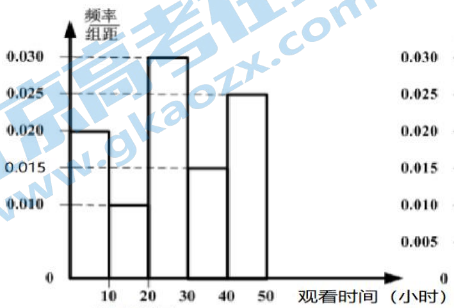
（A）1　（B）$\sqrt{3}$　（C）2　（D）3

(5) 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^2+b^2\le 4$”是“$ab\le 2$”的

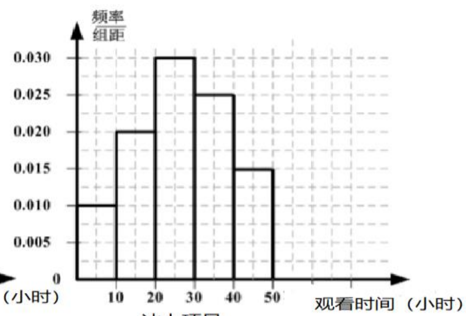
（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

(6) 2022 年北京冬季奥运会中国体育代表团共收获 9 金 4 银 2 铜，金牌数和奖牌数均创历史新高．获得的 9 枚金牌中，5 枚来自雪上项目，4 枚来自冰上项目．某体育院校随机调查了 100 名学生冬奥会期间观看雪上项目和冰上项目的时间长度（单位：小时），并按[0，10]，(10，20]，(20，30]，(30，40]，(40，50]分组，分别得到频率分布直方图如下：



雪上项目



冰上项目

估计该体育院校学生观看雪上项目和冰上项目的时间长度的第 75 百分位数分别是 x_1 和 x_2，方差分别是 s_1^2 和 s_2^2，则

（A） $x_1 > x_2$，$s_1^2 > s_2^2$　　（B） $x_1 > x_2$，$s_1^2 < s_2^2$

（C） $x_1 < x_2$，$s_1^2 > s_2^2$　　（D） $x_1 < x_2$，$s_1^2 < s_2^2$

(7) 设 M 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一点，F 是抛物线的焦点，O 是坐标原点，若 $\angle OFM = 120^\circ$，则 $|FM| =$

（A） 3　　（B） 4　　（C） $\dfrac{4}{3}$　　（D） $\dfrac{7}{3}$

(8) 太阳高度角是太阳光线与地面所成的角（即太阳在当地的仰角）. 设地球表面某地正午太阳高度角为 θ，δ 为此时太阳直射点纬度，φ 为当地纬度值，那么这三个量满足 $\theta = 90^\circ - |\varphi - \delta|$. 通州区某校学生科技社团尝试估测通州区当地纬度值（φ 取正值），选择春分当日（$\delta = 0^\circ$）测算正午太阳高度角. 他们将长度为 1 米的木杆垂直立于地面，测量木杆的影长. 分为甲、乙、丙、丁四个小组在同一场地进行，测量结果如下：

组别	甲组	乙组	丙组	丁组
木杆影长度（米）	0.82	0.80	0.83	0.85

则四组中对通州区当地纬度估测值最大的一组是

（A）甲组　　（B）乙组　　（C）丙组　　（D）丁组

(9) 已知直线 $l: x + y + m = 0$ 和圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$，若存在三点 A，B，D，其中点 A 在直线 l 上，点 B 和 D 在圆 C 上，使得四边形 $ABCD$ 是正方形，则实数 m 的取值范围是

（A） $[-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1]$　　（B） $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$　　（C） $[-3, 1]$　　（D） $[-1, 3]$

(10) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x - 1, & x \le 0, \\ \log_a(x+1), & x > 0, \end{cases}$ 其中 $a > 0$，且 $a \ne 1$. 给出下列三个结论：

①函数 $f(x)$ 是单调函数；

②当 $0 < a < 1$ 时，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称；

③当 $a > 1$ 时，方程 $f(x) = x$ 根的个数可能是 1 或 2.

其中所有正确结论的序号是

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）①②③

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

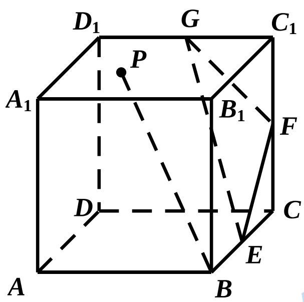
(11) 在 $(1-x)^5$ 的展开式中，x^3 的系数是____________.

(12) 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{m^2}=1(m>0)$ 的一条渐近线方程是 $5x-2y=0$，则 $m=$______.

(13) 幂函数 $f(x)=x^m$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)=x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，能够使 $y=f(x)-g(x)$ 是奇函数的一组整数 m，n 的值依次是________.

(14) 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，点 P 在 AB 边上，则向量 $\overrightarrow{CP}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量的长度是_____，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值是________.

(15) 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，G 分别是棱 BC，CC_1，C_1D_1 的中点，点 P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上任意一点．若 P 与 D_1 重合，则三棱锥 $E-PFG$ 的体积是__________；若直线 BP 与平面 EFG 无公共点，则 $|BP|$ 的最小值是__________.



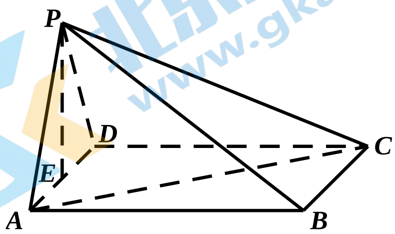
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)（本小 13 题分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=3$，$BC=2$．$\triangle PAD$ 为等边三角形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 AD 的中点.

（Ⅰ）求证：$PE\perp AB$；

（Ⅱ）求平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.



(17)（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的最小正周期为 π.

(Ⅰ) 求 ω 的值；

(Ⅱ) 从下面四个条件中选择两个作为已知，求 $f(x)$ 的解析式，并求其在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上

的最大值和最小值.

条件①：$f\left(x\right)$的值域是$\left[-2,2\right]$；

条件②：$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增；

条件③：$f\left(x\right)$的图象经过点$\left(0,1\right)$；

条件④：$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{3}$对称.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答给分.

(18)（本小题 13 分）

某单位有 A，B 两个餐厅为员工提供午餐与晚餐服务，甲、乙两位员工每个工作日午餐和晚餐都在单位就餐，近 100 个工作日选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况 （午餐，晚餐）	（A，A）	（A，B）	（B，A）	（B，B）
甲员工	30 天	20 天	40 天	10 天
乙员工	20 天	25 天	15 天	40 天

假设甲、乙员工选择餐厅相互独立，用频率估计概率.

（Ⅰ）分别估计一天中甲员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率，乙员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率；

（Ⅱ）记 X 为甲、乙两员工在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E\left(X\right)$；

（Ⅲ）试判断甲、乙员工在晚餐选择 B 餐厅就餐的条件下，哪位员工更有可能午餐选择 A 餐厅就餐，并说明理由.

(19)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在点（$1,f\left(1\right)$）处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的最小值是2，求a的值；

（Ⅲ）设t为常数，求函数$g(x)=\frac{\ln x-\ln t}{x-t}$的单调区间.

(20)（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右顶点分别为 A，B，$|AB|=4$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点 D 为线段 AB 上的动点，过 D 作线段 AB 的垂线交椭圆 C 于不同的两点 E 和 F，N 为线段 AE 上一点，$|AN|=\lambda|AE|$. 是否存在实数 λ，使得 $\angle NDE=\angle DBF$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.

(21)（本小题 15 分）

从一个无穷数列 $\{a_n\}$ 中抽出无穷多项，依原来的顺序组成一个新的无穷数列，若新数列是递增数列，则称之为 $\{a_n\}$ 的一个无穷递增子列. 已知数列 $\{b_n\}$ 是正实数组成的无穷数列，且满足 $b_n=|b_{n+1}-b_{n+2}|$.

（Ⅰ）若 $b_1=1$，$b_2=2$，写出数列 $\{b_n\}$ 前 4 项的所有可能情况；

（Ⅱ）求证：数列 $\{b_n\}$ 存在无穷递增子列；

（Ⅲ）求证：对于任意实数 M，都存在 $k\in N^*$，使得 $b_k>M$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

通州区 2021-2022 学年高三年级第一次模拟考试

数学参考答案及评分标准

2022 年 4 月

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	C	A	B	D	A	A	B	D	C	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-10　　（12）5　　（13）$1,-1$（答案不唯一）

（14）$\sqrt{3}$，-2　　（15）$\dfrac{1}{6}$，$\sqrt{6}$

说明：（14）（15）题两空前 2 后 3。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为$\triangle PAD$为正三角形，E为AD中点，

所以$PE \perp AD$.　…………………　1 分

因为平面$PAD \perp$平面$ABCD$，平面$PAD \cap$平面$ABCD = AD$，$PE \subset$平面PAD，

所以$PE \perp$平面$ABCD$.　…………………　4 分

因为$AB \subset$平面$ABCD$，

所以$PE \perp AB$.　…………………　5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$PE \perp$平面$ABCD$.

取BC中点F，连结EF.

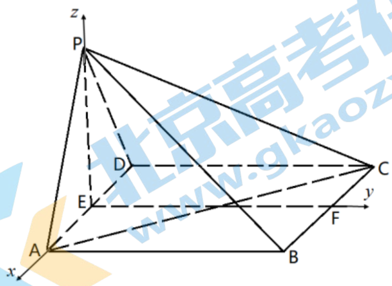
因为底面$ABCD$为矩形，E为AD中点，

所以$EF \perp AD$.

所以EA，EF，EP两两垂直.

分别以EA，EF，EP为x轴，y轴，z轴，建立

空间直角坐标系$Exyz$.　…………6 分



则$E(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$C(-1,3,0)$.　…………7 分

所以$\overrightarrow{PA} = (1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC} = (-2,3,0)$.

设平面PAC的法向量$\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

由$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$得$\begin{cases} x - \sqrt{3}z = 0, \\ -2x + 3y = 0. \end{cases}$

令$z = \sqrt{3}$，得$x = 3$，$y = 2$.

所以$\boldsymbol{n} = (3,2,\sqrt{3})$.　……………………　10 分

平面 $ABCD$ 的法向量 $\overrightarrow{EP}=(0,0,\sqrt{3})$. ………………………… 11 分

设平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角大小为 θ,

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{EP}\rangle\right|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EP}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EP}|}\right|=\left|\dfrac{(3,2,\sqrt{3})\cdot(0,0,\sqrt{3})}{4\times\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ……………… 13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$. ……………… 2 分

（Ⅱ）方案一：选择①，③

因为 $f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$，所以 $A=2$. ……………… 4 分

所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$，

所以 $2\sin\varphi=1$，即 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$. ……………… 5 分

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. ……………… 7 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. ……………… 8 分

因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$. ……………… 10 分

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}$，即 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 时，

$f(x)$ 取得最小值 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$； ………………12 分

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，

$f(x)$ 取得最大值 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$. ………………14 分

方案二：选择条件①，④

因为 $f\left(x\right)$ 的值域是 $\left[-2,2\right]$，所以 $A=2$. ………………… 4 分

所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$.

因为 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称，

所以 $2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$， ………………… 5 分

所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{7\pi}{6}$.

又 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. ………………… 7 分

所以 $f\left(x\right)$ 的解析式为 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. ………………… 8 分

以下同方案一.

方案三：选择条件③，④

因为 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称，

所以 $2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$， ………………… 3 分

所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{7\pi}{6}$.

又 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. ………………… 5 分

因为 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(0,1\right)$，

所以 $A\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，即 $A=2$. ………………… 7 分

所以 $f\left(x\right)$ 的解析式为 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. ………………… 8 分

以下同方案一.

(18)（共 13 分）

解：（Ⅰ）设事件 $C=$“一天中甲员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐”， 事件 $D=$“一天中乙员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐”．

由于 100 个工作日中甲员工午餐、晚餐都选择 A 餐厅就餐的天数为 30，乙员工午餐、晚餐都选择 B 餐厅就餐的天数为 40，

所以 $P(C)=\dfrac{30}{100}=0.3$，$P(D)=\dfrac{40}{100}=0.4$； ………………3 分

（Ⅱ）甲员工午餐、晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率为 0.1；乙员工午餐、晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率为 0.2.

X 的所有可能取值为 1，2. ………………4 分

$P(X=1)=0.3\times0.2+0.1\times0.4=0.1$， ………………6 分

$P(X=2)=1-P(X=1)=0.9$. ………………8 分

X 的分布列为

X	1	2
P	0.1	0.9

$E(X)=1\times0.1+2\times0.9=1.9$. ………………10 分

（Ⅲ）设 $N_1=$“甲员工晚餐选择 B 餐厅就餐”，$N_2=$“乙员工晚餐选择 B 餐厅就餐”，

$M_1=$“甲员工在午餐时选择 A 餐厅就餐”，$M_2=$“乙员工在午餐时选择 A 餐厅就餐”，则

$P(M_1|N_1)=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$，$P(M_2|N_2)=\dfrac{25}{65}=\dfrac{5}{13}$. ………………12 分

因为 $P(M_1|N_1)>P(M_2|N_2)$，

所以在已知晚餐选择 B 餐厅就餐的条件下，甲员工更有可能在午餐时选择 A 餐厅就餐. ………………13 分

(19)（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，

$f(x)=\ln x$，$f(1)=\ln 1=0$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=1$，即切线斜率 $k=1$.

所以切线方程为 $y=x-1$. ………………3 分

（Ⅱ）函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， ………………4 分

$f'(x)=\frac{1}{x}-ax^{-2}=\frac{x-a}{x^2}$. ………………5 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=a$. ………………6 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，无最小值. ………………7 分

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<a$；令 $f'(x)>0$，得 $x>a$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 最小值为 $f(a)=1+\ln a$.

所以 $1+\ln a=2$，即 $a=e$. ………………10 分

（III）函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,t)\cup(t,+\infty)$， ………………11 分

$$g'(x)=\frac{1-\frac{t}{x}-\ln x+\ln t}{(x-t)^2}.$$ ………………12 分

由（II）②知，当 $t>0$ 时，若 $x\ne a$，则 $\ln x+\frac{t}{x}>1+\ln t$.

所以 $g'(x)=\frac{1-\frac{t}{x}-\ln x+\ln t}{(x-t)^2}<0$， ………………14 分

所以 $g(x)=\frac{\ln x-\ln t}{x-t}$ 的减区间为 $(0,t)$，$(t,+\infty)$，无增区间. ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（I）由已知 $|AB|=4$ 得，$2a=4$，$a=2$.

因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=\sqrt{2}$.

因为 $b^2=a^2-c^2$，所以 $b=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………4 分

（II）由已知得 $A(-2,0)$，$B(2,0)$.

设 $E(m,n)$，$F(m,-n)$，$N(x_N,y_N)$，则

$\overrightarrow{AN}=\left(x_N+2,y_N\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(m+2,n\right)$. ……………………………………6 分

因为$|AN|=\lambda|AE|$，所以$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AE}$（$0<\lambda<1$），

即$\left(x_N+2,y_N\right)=\lambda\left(m+2,n\right)$.

所以$x_N=\lambda m+2\lambda-2$， $y_N=\lambda n$，

即$N(\lambda m+2\lambda-2,\lambda n)$. …………………………………………………8 分

因为$\angle NDE=\angle DBF$， 所以$\tan\angle NDE=\tan\angle DBF$.

所以$\dfrac{|m-\lambda m-2\lambda+2|}{|\lambda n|}=\dfrac{|n|}{|2-m|}$， ……………………………………………10 分

即$\dfrac{|\lambda-1|\cdot|m+2|}{|\lambda|\cdot|n|}=\dfrac{|n|}{|2-m|}$，化简得$\dfrac{|\lambda-1|}{|\lambda|}=\dfrac{|n^2|}{|m^2-4|}$. ……………………12 分

因为$\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{2}=1$，所以$4-m^2=2n^2$，

所以$\dfrac{|\lambda-1|}{|\lambda|}=\dfrac{1}{2}$， …………………………………………………14 分

解得$\lambda=2$（舍），或$\lambda=\dfrac{2}{3}$.

所以存在$\lambda=\dfrac{2}{3}$，使得$\angle NDE=\angle DBF$. …………………………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）数列$\{b_n\}$前 4 项依次是 1，2，3，5 或 1，2，3，1，或 1，2，1，3. …………3 分

（Ⅱ）对于数列$\{b_n\}$中的任意一项b_i（$i=1$，2，3，……），由已知得，$b_i=b_{i+1}-b_{i+2}$或

$b_i=b_{i+2}-b_{i+1}$，即$b_{i+2}=b_{i+1}-b_i$或$b_{i+2}=b_{i+1}+b_i$. ………………………………4 分

若$b_{i+2}=b_{i+1}+b_i$，则由$b_i>0$可得$b_{i+2}>b_{i+1}$； ………………………………………5 分

若$b_{i+2}=b_{i+1}-b_i$，则$b_{i+2}<b_{i+1}$，此时$b_{i+3}=b_{i+2}+b_{i+1}>b_{i+1}$，即$b_{i+2}<b_{i+1}<b_{i+3}$.

………………………………7 分

设集合$A=\{j\in N^*\,|\,b_{j-1}<b_j,j\geq 2\}$， $m,n_m\in N^*$，且$n_m\in A$，

$n_1<n_2<\cdots<n_m<\cdots$， $c_1=b_{n_1}$， $c_2=b_{n_2}$，…， $c_m=b_{n_m}$，…，

则数列$\{c_m\}$是数列$\{b_n\}$一个无穷递增子列. ……………………………9 分

（III）考察数列$\{b_n\}$和$\{c_m\}$.

①当$c_1>M$或$c_2>M$时，显然成立.

②当$c_2\le M$时，设$c_m=b_n$（$m=3$，4，5，……），

由（II）可知$b_n>b_{n-1}$.

如果$b_{n-1}>b_{n-2}$，那么$c_{m-1}=b_{n-1}$，$c_{m-2}=b_{n-2}>b_{n-3}$或$c_{m-2}=b_{n-3}$，于是总有

$c_{m-2}\ge b_{n-3}$，此时$c_m-c_{m-1}=b_n-b_{n-1}=b_{n-2}=b_{n-1}-b_{n-3}\ge c_{m-1}-c_{m-2}$；

如果$b_{n-1}<b_{n-2}$，那么$c_{m-1}=b_{n-2}$，$c_{m-2}=b_{n-3}$或$c_{m-2}=b_{n-4}>b_{n-3}$，于是总有

$c_{m-2}\ge b_{n-3}$，

此时$c_m-c_{m-1}=b_n-b_{n-2}=b_{n-1}=b_{n-2}-b_{n-3}\ge c_{m-1}-c_{m-2}$.

综上，当$m\in N^*$且$m\ge 3$时总有

$c_m-c_{m-1}\ge c_{m-1}-c_{m-2}$. ………………………13 分

所以$c_m-c_{m-1}\ge c_{m-1}-c_{m-2}\ge\cdots\ge c_2-c_1$，

所以$c_m-c_{m-1}\ge c_2-c_1$，$c_{m-1}-c_{m-2}\ge c_2-c_1$，…，$c_3-c_2\ge c_2-c_1$，

叠加得$c_m-c_2\ge(m-2)(c_2-c_1)$，

$c_m\ge(m-2)(c_2-c_1)+c_2=(c_2-c_1)m+2c_1-c_2$.

令$(c_2-c_1)m+2c_1-c_2>M$，解得$m>\dfrac{M+c_2-2c_1}{c_2-c_1}$，

即存在$m_0=[\dfrac{M+c_2-2c_1}{c_2-c_1}]+1$，（其中$[\dfrac{M+c_2-2c_1}{c_2-c_1}]$表示不超过$\dfrac{M+c_2-2c_1}{c_2-c_1}$的

最大整数），使得$c_{m_0}>M$.

又因为$\{c_m\}$是$\{b_n\}$的子列，令$b_k=c_{m_0}$，则$b_k>M$.

由①②可知，对于任意实数M，都存在$k\in N^*$，使得$b_k>M$. …………… 15 分

解答题学生若有其他解法，请酌情给分.