2021届高三　考前提个醒

一、集合逻辑

1.集合问题首先关注"代表元"如$\{x\in Z|-2<x<1\}$

2.注意空集：$A\subseteq B$时，A有可能是$\varnothing$；$A\cap B=\varnothing$时，考虑A、B是空集的情况

3.命题：全称量词命题、存在量词命题的否定。

4. 充要条件，关键是分清条件A和结论B，由条件A⇒结论B，条件A是结论B成立的充分条件；由结论B⇒条件A，则条件A是结论B成立的必要条件。从集合角度解释，若$A\subseteq B$，则$x\in A$是$x\in B$的充分条件（小推大）；若A=B，则A是B的充要条件。

注意：在判断充分、必要条件时往往先对条件或结论做等价转化。

二、复数的相关概念记清了吗？虚部？共轭复数？模？纯虚数？

$|z_1-z_2|$的几何意义？$|z-i|=2$：z对应的点在以$(0,1)$为圆心，2为半径的圆上

复数3+2i的虚部是2；3+2i的共轭虚数是？$\frac{1+i}{3+4i}=\frac{(1+i)(3-4i)}{25}=\cdots$而不是$\frac{(1+i)(3-4i)}{5}=\cdots$。

三、不等式：

1.运用均值不等式时注意写清"条件，过程，等号成立的条件"

2.均值不等式的常用形式：若$a,b>0$，则$a+b\ge 2\sqrt{ab}$；$a,b\in R$，总有$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$、$a^2+b^2\ge 2ab$

3. 不等式的性质$a+b\ge 2\sqrt{ab}(a,b\ge 0)$用求最值注意正、定、等三个条件

例如：$y=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$可以用均值不等式求最小值吗？

4.不等式的解集（还有方程的解集、函数的定义域、值域等）的规范书写格式是什么？（一般要写成集合的形式，单调区间要写成区间）。量的取值范围也要用集合表示。

四、平面向量

1.向量的运算：①按运算法则运算；②基底法，特别地，在做"数量积"运算时，所选的基底长度和角度要尽量已知，另外，做数量积时有时也用投影法：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>)$；③坐标法：选正交基底建系。

2.平行（$x_1y_2-x_2y_1=0$）与垂直（$x_1x_2+y_1y_2=0$）、角的问题$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$；模长$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$；

注意：已知$\vec{a},\vec{b}$是非零向量，$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$是$<\vec{a},\vec{b}>$为锐角的____条件，$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$是$<\vec{a},\vec{b}>$为钝角的____条件。

五、排列组合二项式定理，

1.排列、组合常用的方法是分步、分类、列举。

2.二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^na^0b^n$；

要熟记通项公式$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$。

当n为偶数时，最大的二项式系数为$C_n^{\frac{n}{2}}$；当n为奇数时，最大的二项式系数为$C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$

$(1+2x)^5$，$T_3=C_5^2 1^3(2x)^2=4C_5^2x^2$，二项式系数为$C_5^2$，系数为$4C_5^2=40$ $C_n^r a^{n-r}b^r$，不要忘记通项中的符号．二项式$(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^5$的展开式中常数项为$A$，则$A=$____．第三项的系数____．

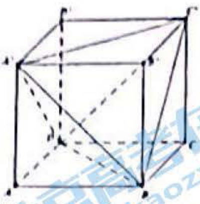
六、立体几何

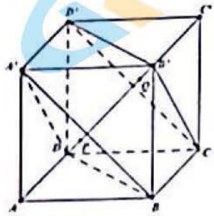
1.立体几何判断题，与定理形式或内容不同的首先考虑从反面构造．

2.三视图的解答策略是怎样？（可考虑将几何体放在长方体中考虑，并将数据标在直观图中）；

3．立体几何压轴小题常见技巧：

（1）模型法：将几何体放入长方体，比如对棱相等的四面体与正方体对角线垂直的面





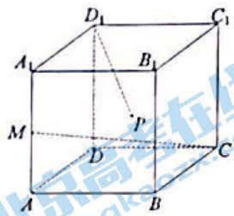
（2） 灵活使用空间坐标系向量解决立体几何问题，如20届朝阳一模第10题、海淀二模第9题．

（3）利用空间向量求点的轨迹

（4）线面平行的使用，构造交线，从而线线平行；面面垂直的使用：找交线以及与交线垂直的线

（5）画截面：（西城二模15题）①过面内一点作面内一条线的平行线；②作截面与其他面的交线，该交线由两点决定，常延长截面内的线与固定面内的线相交，找到交点．

如2018海淀二模14题如图，棱长为2的正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，M是棱AA_1的中点，点P在侧面ABB_1A_1内，若D_1P垂直于CM，则$\triangle PBC$的面积的最小值为________．



4.运用三垂线定理的标准流程

强烈建议不要使用三垂线定理．

因为$PA\perp$平面α于A，$PB\cap$平面$\alpha=B$，所以，直线AB就是直线PB在平面α内的射影．

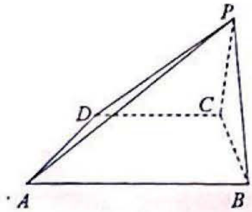
又因为$l\perp AB$（$l\perp PB$），$l\subset$平面α，所以由三垂线定理得$l\perp PB$（$l\perp AB$）．

5.注意"线面平行的性质定理"，"面面平行的性质定理"，"面面垂直的性质定理"．

6.建系先证两两垂直，注意一定建右手系，注意检查点坐标是否正确（有的坐标不好写，可借助向量，如下题中点D坐标的确定）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PBC\perp$平面$ABCD$．ΔPBC是等腰三角形，且$PB=PC=3$；在梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$AD\perp DC$，$AB=5, AD=4, DC=3$．（Ⅰ）求证：$AB//$面PDC；

（Ⅱ）求二面角$A-PB-C$的余弦值；



（III）在线段 AP 上是否存在点 H，使得 $BH\perp$ 平面 ADP？

请说明理由。

7.立体几何解答题以中档题出现，一定要表达到位规范书写。

用向量求解时：

（1）建系前先交代三线垂直，建右手系

（2）写出点的坐标与向量的坐标；

（3）代入公式；

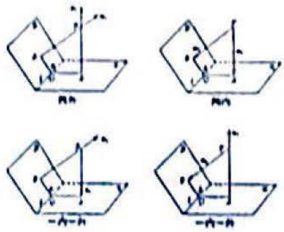
计算①求异面直线所成角 AB,CD 所成的角

$$\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}\right|=\left|\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\right|$$

②求线面角：直线 AP 与平面 α 所成角 θ，设 n 是平面 α 的法向量，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AP},n\right\rangle\right|$。

③求二面角：设二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 θ，设 n 是平面 α 的法向量，m 是平面 β 的法向量，可求 $\cos\langle n,m\rangle=\frac{n\cdot m}{|n|\cdot|m|}$，

注意：二面角的余弦值的正负号别写反了，写答案之前观察一下二面角是钝角还是锐角，如果观察不出可看两个法向量的方向，或使用投影法。



8.在三棱锥中：①侧棱长相等(侧棱与底面所成角相等)⇔顶点在底面上的射影为底面外心，特别地：当底面为直角三角形时，射影恰为斜边中点；②侧棱两两垂直(两对对棱垂直)⇔顶点在底面上的射影为底面垂心；　③顶点到底面三角形各边的距离相等(侧面与底面所成角相等)且顶点在底面上的射影在底面三角形内⇔顶点在底上射影为底面内心。

9.异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的取值范围依次是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right],[0,\frac{\pi}{2}],[0,\pi]$.

七、解析几何

1.直线倾斜角 $[0,\pi)$。

2.注意直线方程的五种形式的限制条件，经常分类讨论；

3.截距是距离吗？“截距相等”意味着什么？注意直线在坐标轴上的截距可正，可负，也可为0.(注意直线在两坐标轴上的截距相等，直线方程可以理解为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$，但不要忘记当 $a=0$ 时，直线 $y=kx$（$k\neq0$）在两条坐标轴上的截距都是0，也是截距相等。)

4.解析几何中设直线方程 $y=kx+m$，不包括与 x 轴垂直的情形，用时要考虑与 x 轴垂直的情形；直

线方程 $my=x+n$，不包括与 y 轴垂直的情形，用时要考虑与 y 轴垂直的情形。

5.对不重合的两条直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，有

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2=A_2B_1 \\ A_1C_2 \neq A_2C_1 或 B_1C_2 \neq A_2C_1 \end{cases}; \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

已知两条直线平行，求参数值时，一定要检查两直线是否平行，要去掉重合的情况。

6.注意圆的方程的两种形式，一般方程表示圆需要 $D^2+E^2-4F>0$；有时可能会用到圆的参数方程.

7.处理直线与圆的位置关系有两种方法：（1）圆心到直线的距离；（2）直线方程与圆的方程联立，判别式.一般来说，前者比后者简捷！注意利用半径、半弦长、及弦心距组成的直角三角形.

以 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 为直径圆的方程：设 $Q(x,y)$ 在圆上，则 $\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}=0$

即 AB 为直径圆的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

8. $y=4x^2$ 的焦点坐标？准线方程？（先化成标准方程 $x^2=\frac{y}{4}$，焦点（0，$\frac{1}{16}$），准线：$y=-\frac{1}{16}$）

9.渐近线为 $y=\pm 2x$ 的双曲线的离心率？（$\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}$）

10.渐近线为 $y=\pm\frac{m}{n}x$ 的双曲线如何设？（$\frac{x^2}{n^2}-\frac{y^2}{m^2}=\lambda,\lambda\neq 0$）

11.你还记得：与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有共同渐近线的的双曲线方程是：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$？（$\lambda=0$ 时为其渐进线）？

12.椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的长轴长，焦距长？（$6,2\sqrt{5}$）

13.椭圆、双曲线中 a,b,c 的关系分别是？（$a^2=b^2+c^2,a^2+b^2=c^2$，务必画图确认，特别是竖的）

14.椭圆中，注意焦点、中心、短轴端点所组成的直角三角形.（a，b，c 的几何意义）注意 a，b，c 与 $2a$，$2b$，$2c$ 的区别。你注意到双曲线定义中的绝对值了吗？

15. 用圆锥曲线问题中涉及与焦点有关的问题想定义，用定义解题，注意焦点三角形（定义，余弦定理，面积公式，焦半径）。另外，不要忘记圆锥曲线对称性在解题中的运用。

16.圆锥曲线上任一点到焦点的距离（焦半径）：均可用"两点间距离公式及圆锥曲线方程"化为一个不含根号的式子

17.椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ O 为原点 F_1,F_2 分别为左右焦点，A_1,A_2 分别是椭圆的左右顶点：当 P 为短轴端点时 $\angle F_1PF_2$ 最大，P 从长轴左端点运动到右端点 PF_2 递减，PF_1 递增；$k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=$______.

18.解答题中：设直线先考虑斜率是否存在，注意写Δ。

19.最值问题两种途径：（1）写成关于某变量的函数或不等式；（2）用几何的方法解决。

20. 定点定值：（1）先从特殊情况出发找出，再证明；（2）直接求（有时注意分析对称性）。

21.解析几何解答题要注意以下几点：

（1）注意斜率存在与否、判别式大于 0

（2）写出得分点：联立方程、韦达定理、计算点的坐标，斜率、向量、弦长

$$\begin{cases} y = kx + b \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \cdots\cdots\cdots A(x_1, y_1), B(x_2, y_2). \begin{cases} \Delta = \cdots\cdots > 0 \\ x_1 + x_2 = \dots \\ x_1 x_2 = \dots \end{cases},$$

弦长公式

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{1 + k^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{b^2 + a^2k^2} = \sqrt{1 + k^2}\,\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

（3）证明题一定要推导到结论显而易见为止；一定要有转换问题的意识，优化的意识

八、概率、统计

解答概率、 统计问题的注意事项

1. 注意审题—— 重点是对图表的理解、文字的推敲、题意的把握.
2. 注意叙述—— 仔细研究高考题的标答，力争准确无误.
3. 对数据的统计意义的理解要到位，要会下统计结论.

4.独立重复试验的概率计算由三部分构成，不要丢掉事件发生次数统计 C_n^k，也不要丢掉事件未发生的概率 $(1-p)^{n-k}$，正确的是 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$，何为二项分布， 你清楚吗？

5.注意区分二项分布（从流水线上取，用频率估计概率，从总体中抽取）
还是古典概型（从样本中取）
你知道超几何分布与二项分布的差别吗？如：
某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况，随即抽取该流水线上 40 件产品作为样本算出他们的重量（单位：克）重量的分组区间为（490，495]，（495，500]，……（510，515]，由此得到样本的频率分布直方图，如图所示.

（1）在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件，设 Y 为重量超过 505 克的产品数量，求 Y 的分布列. ----超几何分布

（2） 从流水线上任取 5 件产品，求恰有 2 件产品的重量超过 505 克的概率. ------二项分布

6.还记得吗？期望（即平均数）$E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$、方差 $D\xi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E\xi)^2 p_i$

$$E(a\xi + b) = aE(\xi) + b,\quad D(a\xi + b) = a^2 D(\xi)$$

7.对于二项分布：$E\xi = np, D\xi = np(1-p)$；对于超几何分布：$E\xi = \dfrac{nM}{N}$.

8. 注意（1）要设事件，要作答，要约分；（2）古典概型要交代分母和分子数据来源；（3）计算期望要先列式（随机变量取值为 0 也不能省略）；（4）作统计推断，要有数据作支撑（如 2019 年北京高考题第三问），常用期望、方差、数据变化趋势等；（5）加入新数据，若大于以前的平均数，则新平均数变大；数据两头多中间少方差就大；可通过举反例或特例验证自己的判断.

九、函数导数

1.指数运算法则、对数运算法则及换底公式是否还熟练，近几年常考啊！

2.熟练掌握基本初等函数（一次二次，幂、指、对，三角）图象性质

3.熟练掌握 $y = ax + \dfrac{b}{x}$，$y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ 的研究方法（单调性，值域）

4.求函数的解析式（包括实际问题）或导函数数时，你先确定该函数的定义域了吗？

5.导数的几何意义（切线的斜率，切线存在，导数不一定存在）

6.注意"过某点的切线"与"在某点处的切线"的区别。

7.求极值、最值、单调区间（一定先考虑定义域，要列表，极值与最值要转化，极值点指的是横坐标，极值指的是函数值）

- 导数值为 0 的点不一定是极值点，要列表验证
- 不等价的地方都要注意检验。
- 基本解题步骤为：
  - 写定义域，求导
  - 可否直接判断导数正负（要关注题目所给条件及题目中的定义域）。
  - 若不能，令 $f'(x)=0$，求解 $x_1,x_2,\cdots$。（此处常根据 $f'(x)=0$ 有解、无解、及其它解的情况进行分类讨论）导函数能分解因式尽量分解因式

    分类讨论经常出现在：①导函数是几次方程？导函数等于 0 的方程有根无根？根的大小如何？根与定义域关系如何？二次函数开口方向如何？
  - 用 $x_1,x_2,\cdots$ 划分定义域（列表）
  - 指出单调区间，求出极值等，对于最值，要用极值与端点值进行比较。
  - 函数的单调区间必须写成区间、多个单调增（减）区间之间不能用 $\cup$ 连接。

8.已知极值、最值、求参数的取值范围（求出参数之后要进行检验）

9.已知函数在某个区间上单调递增（减），求参数范围，

- 若 $f'(x)=0$ 求解较易，可直接判断原函数单调区间，再求参数范围
- 常转化为恒成立问题

  恒成立问题的解决方法：分离变量；利用一次函数、二次函数等的性质

- 不单调，常转化为导函数在该区间上可取到正、负值。

10.注意事项：

- 求导不能错！
- 写出定义域！
- 讨论时一定先看条件！
- 能否利用特值缩小讨论范围？
- 用导数值为 0 的点去划分定义域！
- 讨论时注意最高次项系数对导函数正负的影响！
- 特别注意：$(\cos x)'=-\sin x$；$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；$(a^x)'=a^x\ln a$，

  $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$；

11. 常见切线不等式　先证后用　(1) $e^x\ge 1+x, e^x\ge ex$

(2) $\ln(1+x)\le x, \ln x\le \dfrac{1}{e}x, \ln x<\sqrt{x}$，

(3) $x>0, \sin x<x$；　$x<0, \sin x>x$.

12.几类问题的求解策略

不等式恒成立的转化策略一般有以下几种：

①分离参数+函数最值；

②直接化为最值+分类讨论；

常见的分类标准（1）导函数零点是否存在　例如：17 朝阳期末 $f'(x)=x(e^x+2a)$

（2）零点谁大谁小　例如：17 朝阳期末 $f'(x)=x(e^x+2a)$

（3）零点是否在定义域中

（4）导函数的类型　导函数是一次还是二次还是……

利用导数研究函数图象交点及零点问题

函数 $y=f(x)$ 的零点个数的步骤

（1）求导 $f'(x)$，研究 $y=f(x)$ 的单调性

（2）求关键点取值的正负性，关键点：极值点和定义域区间的端点，如果定义域区间的端点 x_0 无意义，就看 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$

（3）严格的证明在区间 (a,b) 上有零点，应该利用零点存在性定理：$f(a)f(b)<0$

函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象的交点问题，有以下几个步骤：

①构造函数 $h(x)=f(x)-g(x)$；

②研究函数 $h(x)$ 的零点个数

过点 (x_0,y_0) 做曲线 $y=f(x)$ 的切线有几条的问题：

（1）设切点为 (x_1,y_1)

（2）过切点的方程为 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

（3）点 (x_0,y_0) 在切线 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ 上，从而

$$y_0-f(x_1)=f'(x_1)(x_0-x_1)$$

注意构造新函数解决

（1）证明不等式时，常常先等价转化后，再构造函数

例如：$x\ln x\ge ax^2+\dfrac{2}{a}$ 在区间在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

等价于：$\ln x\ge ax+\dfrac{2}{ax}$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

（2）单变量“统一形式换元法”

例如：2019 年北京理导数第 2 问：证明：$x-6\le f(x)\le x$，构造 $g(x)=f(x)-x$

十、三角函数

1. 三角函数的定义（设 α 是任意一个角，$P(x,y)$ 是 α 的终边上的任意一点（异于原点），$r=\sqrt{x^2+y^2}$，

那么 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r},\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x},(x\neq 0)$。

弧长：$l=|\alpha|R$，扇形面积：$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}|\alpha|R^2$，其中$\alpha$为圆心角。

习题1.已知角α的终边上一点的坐标为$(\cos\frac{2}{3}\pi,\sin(-\frac{2}{3}\pi))$，则角$\alpha$的最小正值为：______

2.两角关系：角α、β的关系，主要体现在$\alpha\pm\beta$与α和β的关系

习题2.（1）若角α与角β的终边所在直线相同，则α与β数量关系__________

（2）若角α与角β的终边关于X轴对称，则α与β数量关系__________

（3）若角α与角β的终边关于Y轴对称，则α与β数量关系__________

（4）若角α与角β的终边所在直线垂直，则α与β数量关系__________

习题3.（2017年理科12）在平面直角坐标系xOy中，角α与角β均以Ox为始边，它们的终边关于y轴对称.若$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=$__________.

习题4.已知$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{4})$，$\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，$\sin(\frac{3\pi}{4}+\beta)=\frac{5}{13}$，求$\sin(\alpha+\beta)$的值.

3.记准几个诱导公式：$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$-\alpha$

习题5.由$y=\sin 2x$的图像，向____平移________可得到$y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$的图像

4.三角变换：要熟练掌握公式，注意角的变换，关注角之间的关系（和、差、倍、半、互余、互补）

习题6.下列变换有什么错误？

$$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}$$

习题7.$\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=$________；

习题8.已知$\alpha+\frac{\pi}{3}$是第二象限角，且$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\alpha$的值为：______

4.注重总结的公式，如：$\sin\alpha\pm\cos\alpha$与$\sin\alpha\cos\alpha$或$\sin 2\alpha$的关系：

习题9.已知$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，求$y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1$的值域.

5.辅助角公式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，其中

$\left(\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，要特别注意 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{3},1,\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的情况（特殊角）

三角函数的图像性质

常考大题，容易出错！（升幂降幂公式、辅助角公式）

过程需谨慎！公式要记准！符号要记对！（解析）式子要检验！

1.求单调区间注意定义域（2012 北京理科 15 题）

已知函数 $f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$.

（i）求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期；（ii）求 $f(x)$ 的单调递增区间

2.平移变换——（1）先伸缩，后平移　　（2）先平移，后伸缩

从 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 到 $y=\sin x$，用两种方法，各平移多少？如何伸缩

（(1) 向左 $\dfrac{\pi}{3}$；(2) 向左 $\dfrac{\pi}{6}$）　纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍

3.函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B,(A>0)$ 的图像与性质

习题 10. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\pi$．若 $f(\dfrac{5\pi}{8})=\dfrac{1}{2}$，$f(\dfrac{11\pi}{8})=0$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则

A. $\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　　B. $\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{12}$

C. $\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$　　D. $\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

习题 11.（2014 理科 14）（14）设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0$，$\omega>0$）.

若 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$ 上具有单调性，且 $f(\dfrac{\pi}{2})=f(\dfrac{2\pi}{3})=-f(\dfrac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为__________.

习题 12.（2021 东城一模）（14）已知函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$，其中 x 和 $f(x)$ 部分对应值如下表所示：

x	$-\dfrac{\pi}{4}$	0	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$f(x)$	-2	$-2\sqrt{3}$	-2	2	$2\sqrt{3}$

那么 $A=$______.

4.解题方法

- 多数问题需要化为$A\sin\left(wx+\varphi\right)$后解决.
- 求单调区间常用$y=\sin x, y=\cos x$的图像与性质，或者是利用复合函数单调性，注意尽量保证 x 的系数为正；结果写成区间，$k\in\mathbf{Z}$
- 求值域的类型（1）化为$A\sin\left(wx+\varphi\right)$在给定区间上的值域；

  （2）利用二次函数单调性（注意配方与换元）
- 求最值一般要指明自变量的取值，及最值相应自变量的值；
- 三角函数$f\left(x\right)=A\sin\left(wx+\varphi\right)$的对称轴是？对称中心是？

5.格式步骤中要注意：

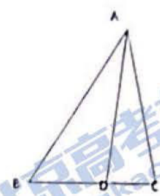
- 化简后$A\sin\left(wx+\varphi\right)$一定代入特殊值检验，确保正确
- 已知三角函数值求角一定注意角的范围注明,由k的取值决定（$k\in\mathbf{Z}$）;
- 在三角函数中求一个角时，一般采用的方法是：（1）分析判断出角的范围；（2）再选定这个角的某一个三角函数值，求出这个角；这是概念的要求，两者缺一不可。

解三角形

1.要熟练掌握正余弦定理及其变形公式；
2.注意多解与一解的判断（即三角形的可解条件）

习题 13.（2013 北京理科 15 题）下列判断中正确的是(　　)

A.△ABC 中,a=7,b=14,A=30°,有两解
B.△ABC 中,a=30,b=25,A=150°,有一解
C.△ABC 中,a=6,b=9,A=45°,有两解
D.△ABC 中,b=9,c=10,B=60°,无解



习题 14.（2013 北京）在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$\angle B=2\angle A$.

（Ⅰ）求$\cos A$的值；

（Ⅱ）求c的值.

（Ⅲ）将题中条件"$\angle B=2\angle A$"改为"sinB=sin2A"，求 c 的值.

3.解题方法

- 把条件表示在三角形图形中，逻辑分析、联系（正余弦）定理、构造方程.
- 注意角之间的关系，进行条件转化（如：2014 北京 15 $\cos\angle ADC=-\cos\angle ADB$）

习题 15. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$AB=8$，点D在BC边上，且$CD=2$，$\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$.

（Ⅰ）求$\sin\angle BAD$；　　（Ⅱ）求BD, AC的长.

4.格式步骤注意

运用正弦定理最好指明"在某个三角形中"。

尽量写清所用的每个公式

习题 1. $\frac{4}{3}\pi$

习题 2.

（1）$\beta=\alpha+k\pi(k\in Z)$；（2）$\alpha+\beta=2k\pi(k\in Z)$；（3）$\alpha+\beta=\pi+2k\pi(k\in Z)$

（4）$\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$

习题 3. $-\frac{7}{9}$

习题 4. $\frac{56}{65}$

习题 5.

解析：$y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3}-2x)=\sin[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-2x)]=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin 2(x+\frac{\pi}{12})$

故为向左平移 $\frac{\pi}{12}$，（答案不唯一）

习题 6.

$$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$$

习题 7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

习题 8. $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$

习题 9. 已知 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，求 $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1$ 的值域。

习题 10. B

习题 11. π

习题 12. 4

习题 13. B

习题 14.

【解答】（Ⅰ）因为 $a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$\angle B=2\angle A$，

所以在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{3}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}$.

所以 $\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

故 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）解法 1：由(Ⅰ)知 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为 $\angle B=2\angle A$，所以 $\cos B=2\cos^2 A-1=\frac{1}{3}$.

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

所以 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=5$.

解法 2：因为 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

得 $9=24+c^2-2\times 2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}c$

所以 $c^2-8c+15=0$，解得 $c=3$或5

以下：如何检验增根问题？如何选用定理不产生增根或利于根的检验？

（Ⅲ）3 或 5

十一、 数列

等差等比数列基本问题（一般在选择、填空题中，或前 3 道大题，关注）：

1. 基本量法；
2. 等差数列的 2 个求和公式，以及前 n 项和与中间项的关系（$S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$）；
3. 等比数列前 n 项和要特别注意 $q=1$ 的情形
4. 证明数列为等差等比数列时，一定要用定义，关注"从第二项起"；等比数列必须说明 $a_{n+1}=qa_n$ $(n\geq 1)$，且 $a_1\neq 0,q\neq 0$。

数列的通项的求法：

1.公式法：①等差数列通项公式；②等比数列通项公式。

2.用作差法：已知 S_n（即 $a_1+a_2+\cdots+a_n=f(n)$）求 a_n，用 $a_n=\begin{cases}S_1,(n=1)\\S_n-S_{n-1},(n\geq 2)\end{cases}$。（注意：不能忘记讨论 $n=1$）

3.作商法：已知 $a_1a_2\cdots a_n=f(n)$ 求 a_n，用 $a_n=\begin{cases}f(1),(n=1)\\\frac{f(n)}{f(n-1)},(n\geq 2)\end{cases}$。

4.叠加法：若 $a_{n+1}-a_n=f(n)$

5.累乘法：若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 求 a_n，

6.已知递推关系求 a_n，用构造法（构造等差、等比数列）。形如 $a_{n+1}=ka_n+b$ 我们通常将其化为 $(a_{n+1}-A)=k(a_n-A)$ 看成 $\{a_n-A\}$ 的等比数列

数列求和的常用方法：

1.直接用等差、等比数列的求和公式求和，等比公比含字母时一定要讨论：

等差求和公式：$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

等比求和：$S_n=\begin{cases}na_1, q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q\neq 1\end{cases}$

2.分组求和：如 $a_n=2n+3^n$

3.错位相减法：如 $a_n=(2n-1)3^n$

4.裂项求和：常用的裂项 ①$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；②$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k})$；（5）倒序相加法：如求 $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots\cdots+\sin^2 89^\circ$

数列求最大项的方法

方法 1：利用函数的性质；　　方法 2：相邻两项作比较

数列 $\{a_n\}$ 中，如果存在 a_k，使得"$a_k>a_{k-1}$ 且 $a_k>a_{k+1}$"成立（其中 $k\geq 2, k\in N^*$），则称 a_k 为 $\{a_n\}$ 的一个峰值. 若 $a_n=t\ln n-n$，且 $\{a_n\}$ 不存在峰值，则实数 t 的取值范围是.

已知 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n^2+2\lambda n$，试求 λ 的范围，使得数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

特别注意　数列中 n 的范围，　取值范围中区间的开闭

十二、　压轴题

一般以集合和数列为载体

答题时要注意：

1.通过第一问的例子理解定义，　第一问的回答要用题干中的词语，
例如"是否具有性质"，"能否等于"，
要特别注意在解答第一问的过程中对解决后续问题的启示性作用

2.求最值的问题，一般遵循 求范围+给例子

3.求通项公式，可先算几项，猜出通项，再去证明

4.2、3 两问如果写不了严谨证明，可结合文字、图像、表格等工具来说明

常用知识 1、不等式的常用性质

①证明 $A=B$ 等价于证明 $A\geq B$ 且 $A\leq B$

②若 $A+B=C+D$ 且 $A\geq C, B\geq D$，则有 $A=C, B=D$

同理 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n, a_i\geq b_i$，则 $a_i=b_i$

③$|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$，可以推出 $-|a|-|b|\leq a+b\leq|a|+|b|$

2、奇偶性分析：①奇+偶=奇，奇+奇=偶，奇*奇=奇，奇*偶=偶

②$|a+b|$ 与 $a+b$，$a+|b|$，$|a|+b$，$|a|+|b|$ 奇偶性均相同

③若 $a+b$ 是偶数，则 a,b 奇偶性相同；若 $a+b$ 是奇数，则 a,b 奇偶性相反

3、数列最值的求法：研究数列的单调性，即研究相邻两项 a_n 与 a_{n+1} 的关系，可以作差也可以作商（当 $a_n>0$ 时）；如果 $a_n=f(n)$，也可以通过研究 $f(n)$ 的表达式来研究 a_n 的单调性

4、常用技巧

(1) 奇、偶分析；
(2) 分组、抽屉原则；
(3) 整除问题；
(4) 算两次；
(5) 映射、对应与配对；
(6) 变化中的规律；
(7) 通过试验，归纳总结；
(8) 利用平均值估计。

5、常用的转化策略

(1) 反证法：正难则反；
(2) 等价转化；
(3) 充分条件的转化；
(4) 必要条件的转化。

考场上要做到

(一) 速度适当——不宜过快
(二) 卷面整齐——不乱涂乱抹
(三) 书写规范——按照课本、高考标答、老师演示的板书来写
(四) 有理有据——答题不“跳步”，确保阅卷人能看懂
(五) 审题仔细——圈点勾画题干中的重要之处
(六) 同中求异——避免因熟而误（有的题过去做过，但再做时，因为没有仔细审题，导致没有发现新出现的陷阱。
(七) 留意常错处——回视检查，及时发现
(八) 用好草稿纸——便于检查
(九) 核对答题卡——不涂串，填涂干净、规范
(十) 检查先审题——从源头杜绝错误
(十一) 改题须谨慎——不轻易改答案
(十二) 控制时间，先易后难——第 1 题的 5 分=最后一题最后一问的 5 分

自信、冷静、平和、认真

祝同学们取得好成绩！