

# 高一数学

2021.11

本试卷共 4 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知  $a > b$ , 则一定成立的是

(A)  $a^2 > b^2$

(B)  $a^3 > b^3$

(C)  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(D)  $|a| > |b|$

(2) 若集合  $P = \{0, 1\}$ , 则下列结论正确的是

(A)  $\emptyset = P$

(B)  $\{0\} \in P$

(C)  $\mathbb{N} \subseteq P$

(D)  $\{1\} \not\subseteq P$

(3) 下列函数中是奇函数且定义域为  $\mathbb{R}$  的是

(A)  $y = x^2$

(B)  $y = x^{-1}$

(C)  $y = x^3$

(D)  $y = 2^x$

(4) 函数  $y = x^2 - 2x - 1, x \in [-1, 2]$  的值域是

(A)  $[-2, 2]$

(B)  $[-1, 2]$

(C)  $[-2, 1]$

(D)  $[-1, 1]$

(5) 若  $f(x)$  与  $g(x)$  是同一个函数, 且  $f(x) = x$ , 则  $g(x)$  可以是

(A)  $g(x) = (\sqrt{x})^2$

(B)  $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

(C)  $g(x) = \sqrt{x^2}$

(D)  $g(x) = \frac{x^2}{x}$

(6) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 2]$ , 则“ $f(0) < f(2)$ ”是“ $f(x)$  在定义域上是增函数”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(7) 令  $a=1.7^{0.1}$ ,  $b=1.7^{0.2}$ ,  $c=0.9^{\sqrt{2}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

- (A)  $c > b > a$  (B)  $a > b > c$   
(C)  $c > a > b$  (D)  $b > a > c$

(8) 设函数  $f(x) = a_0(1+r)^x$ , 且  $f(3) = 20$ ,  $f(4) = 22$ , 则  $f(5) =$

- (A) 24 (B) 24.2  
(C) 26 (D) 26.5

(9) 若任意的正数  $x, y$  都能使  $k\sqrt{xy} \leq 4x + y$  成立, 则  $k$  的取值范围是

- (A)  $(-\infty, 2]$  (B)  $(0, 2]$   
(C)  $(-\infty, 4]$  (D)  $(2, 4]$

(10) 某种药物需要 2 个小时才能全部注射进患者的血液中. 在注射期间, 血液中的药物含量以每小时 1000 mg 的速度呈直线上升; 注射结束后, 血液中的药物含量每小时以 20% 的衰减率呈指数衰减. 若该药物在病人血液中的含量保持在 1000 mg 以上时才有疗效, 则该药物对病人有疗效的时长大约为

(参考数据:  $0.2^{1.8} \approx 0.0552$ ,  $0.2^{1.9} \approx 0.0470$ ,  $0.8^{3.1} \approx 0.5007$ ,  $0.8^{3.2} \approx 0.4897$ )

- (A) 2 小时 (B) 3 小时  
(C) 4 小时 (D) 5 小时

## 第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 命题“ $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 \leq 1$ ”的否定是\_\_\_\_\_。

(12) 已知  $x > -1$ , 则当  $x =$ \_\_\_\_\_时,  $x + \frac{1}{x+1}$  取得最小值, 且最小值为\_\_\_\_\_。

(13) 已知函数  $f(x)$  满足对任意实数  $a, b$  都有  $f(a+b) = f(a)f(b)$ , 则函数  $f(x)$  可能的一个解析式是\_\_\_\_\_。

(14) 在一个展现人脑智力的综艺节目中, 一位参加节目的少年能将圆周率  $\pi$  准确地记忆到小数点后面 200 位, 更神奇的是, 当主持人说出小数点后面的位数时, 这位少年都能准确地说出该数位上的数字. 如果记圆周率小数点后第  $n$  位上的数字为  $y$ , 那么你认为:  $y$  \_\_\_\_\_ (填“是”或“不是”)  $n$  的函数, 理由是\_\_\_\_\_。

(15) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x < 0, \\ x^2 + mx, & x \geq 0 \end{cases}$  是偶函数.

①  $m =$  \_\_\_\_\_;

② 若  $f(x)$  在区间  $[a, a+1]$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

已知集合  $A = \{x | 0 < x < 2\}$ , 集合  $B = \{x | x > m\}$ .

(I) 当  $m = 1$  时, 求  $A \cap B$ ,  $\complement_{\mathbb{R}} B$ ;

(II) 写出一个  $m$  值, 使得  $A \cup B = B$ .

(17) (本小题 14 分)

① 计算  $\sqrt{(\pi-4)^2} - 8^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{2})^{-1}$ ;

② 已知  $10^m = 2$ ,  $10^n = 3$ , 求  $10^{\frac{3m-2n}{2}}$  的值.

(18) (本小题 14 分)

已知二次函数  $f(x) = (x-1)(x-a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(I) 当  $a = 2$  时, 求二次函数  $f(x)$  的零点;

(II) 求关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  的解集;

(III) 若  $f(x) \geq -x$  对一切实数  $x$  都成立, 求  $a$  的取值范围.

(19)(本小题 14 分)

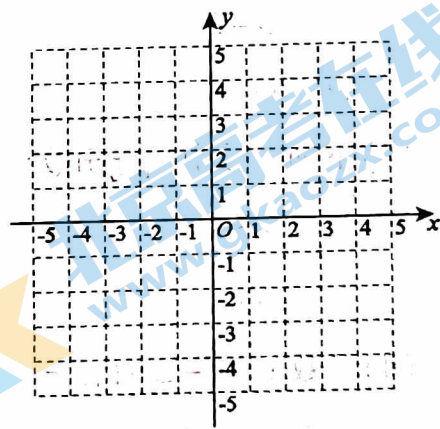
已知函数  $f(x) = \frac{1-x}{x}$ .

- (I) 用定义证明  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减;
- (II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上的最大值;
- (III) 若  $f(2^{x+1}) > f(4^x)$ , 求  $x$  的取值范围.

(20)(本小题 14 分)

已知函数  $f(x) = 2^x$ , 函数  $g(x) = -x + 3$ .

- (I) 在同一直角坐标系中画出  $f(x)$ ,  $g(x)$  的图象;
- (II)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 用  $m(x)$  表示  $f(x)$ ,  $g(x)$  中的较小者, 记为  $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ .
  - ① 用解析法表示函数  $m(x)$ , 并写出函数  $m(x)$  的值域;
  - ② 讨论关于  $x$  的方程  $m(x) = k$  的根的个数. (直接写出结论)



(21)(本小题 15 分)

如果函数  $f(x)$  满足: 存在非零常数  $t$ , 对于  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x+t) = tf(x)$  成立, 则称函数  $f(x)$  为  $T$  函数.

- (I) 判断  $f(x) = 2x$  是否是  $T$  函数, 并说明理由;
- (II) 已知  $f(x) = a^x$  (其中  $a > 0$ ) 的图象过点  $(2, 2)$ , 证明:  $f(x)$  是  $T$  函数;
- (III) 若  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ ), 写出  $f(x)$  是  $T$  函数的充要条件, 并证明.