北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(一)

2018.4

数学(理科)

本试卷共 4 页,共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题　共 40 分)

一、选择题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1)若集合 $A=\{x|-3<x<1\}$,$B=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$,则 $A\cap B=$

(A)$\{x|-3<x<2\}$　(B)$\{x|-3<x<-1\}$

(C)$\{x|-1<x<1\}$　(D)$\{x|1<x<2\}$

(2)复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$在复平面上对应的点位于

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限

(3)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a>b$,则下列不等式一定成立的是

(A)$a^2-b^2>0$　(B)$\cos a-\cos b>0$　(C)$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}<0$　(D)$e^{-a}-e^{-b}<0$

(4)在平面直角坐标系 xOy 中,角 θ 以 Ox 为始边,终边与单位圆交于点$(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$,则 $\tan(\pi+\theta)$的值为

(A)$\dfrac{4}{3}$　(B)$\dfrac{3}{4}$　(C)$-\dfrac{4}{3}$　(D)$-\dfrac{3}{4}$

(5)设抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 2,则 P 到该抛物线焦点的距离是

(A)1　(B)2　(C)3　(D) 4

(6)故宫博物院五一期间同时举办"戏曲文化展"、"明代御窖瓷器展"、"历代青绿山水画展"、"赵孟頫书画展"四个展览.某同学决定在五一当天的上、下午各参观其中的一个,且至少参观一个画展,则不同的参观方案共有

(A)6 种　(B)8 种　(C)10 种　(D)12 种

(7)设$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,S_n 为其前 n 项和,则"$d>0$"是"$\{S_n\}$为递增数列"的

(A)充分而不必要条件　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　(D)既不充分也不必要条件

(8)某次数学测试共有 4 道题目,若某考生答对的题大于全部题的一半,则称他为"学习能手",对于某个题目,如果答对该题的"学习能手"不到全部"学习能手"的一半,则称该题为"难题".已知这次测试共有 5 个"学习能手",则"难题"的个数最多为

(A)4　(B)3　(C)2　(D)1

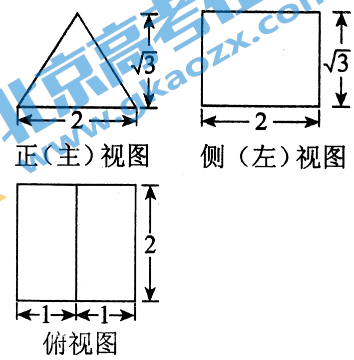
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9)在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a^2+c^2=b^2+ac$，则$B=$________.

(10)在极坐标系中，圆$\rho=2\cos\theta$的圆心到直线$\rho\sin\theta=1$的距离为________.

(11)若x,y满足$\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\ x+y\leqslant 4,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$则$2x+y$的最大值为________.



(12)某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为________.

(13)设平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为非零向量. 能够说明“若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$”是假命题的一组向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的坐标依次为__________.

(14)单位圆的内接正$n(n\geqslant 3)$边形的面积记为$f(n)$，则$f(3)=$________；

下面是关于$f(n)$的描述：

①$f(n)=\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$；　②$f(n)$的最大值为$\pi$；　③$f(n)<f(n+1)$；　④$f(n)<f(2n)\leqslant 2f(n)$.

其中正确结论的序号为________.（注：请写出所有正确结论的序号）

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15)（本小题 13 分）

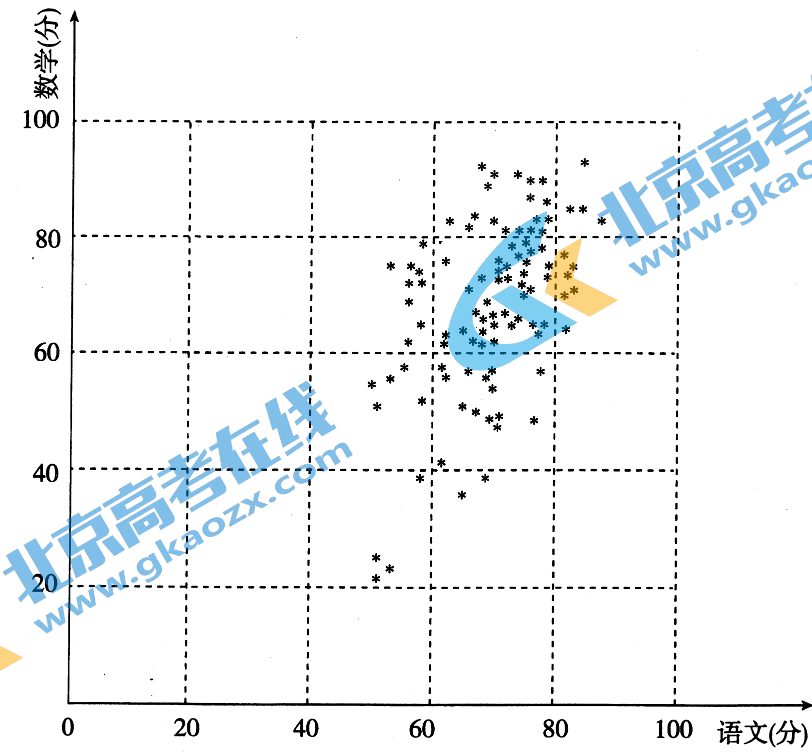
已知函数$f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求$f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

(16)(本小题 13 分)

从高一年级随机选取 100 名学生,对他们期中考试的数学和语文成绩进行分析,成绩如图所示.



(Ⅰ)从这 100 名学生中随机选取一人,求该生数学和语文成绩均低于 60 分的概率;

(Ⅱ)从语文成绩大于 80 分的学生中随机选取两人,记这两人中数学成绩高于 80 分的人数为 ξ,求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$;

(Ⅲ)试判断这 100 名学生数学成绩的方差 a 与语文成绩的方差 b 的大小.(只需写出结论)

(17)(本小题 14 分)

如图 1,在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中,P 为 CD 中点,分别将$\triangle PAD$,$\triangle PBC$ 沿 PA,PB 所在直线折叠,使点 C 与点 D 重合于点 O,如图 2. 在三棱锥 P-OAB 中,E 为 PB 中点.

(Ⅰ)求证:$PO\perp AB$;

(Ⅱ)求直线 BP 与平面 POA 所成角的正弦值;

(Ⅲ)求二面角 P-AO-E 的大小.

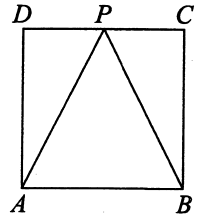


图 1

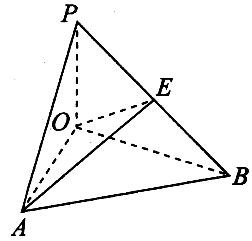


图 2

(18)(本小题 13 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,且过点 $A(2,0)$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)设 M,N 是椭圆C 上不同于点 A 的两点,且直线 AM,AN 的斜率之积等于$-\dfrac{1}{4}$.

试问直线 MN 是否过定点? 若是,求出该点的坐标;若不是,请说明理由.

(19)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+1)$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线斜率为 0,求 a 的值;

(Ⅱ)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(Ⅲ)求证:当 $a=0$ 时,曲线 $y=f(x)(x>0)$总在曲线 $y=2+\ln x$ 的上方.

(20)(本小题 13 分)

在 $n\times n(n\geqslant 2)$个实数组成的 n 行 n 列的数表中,a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的数,记 $r_i=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}\ (1\leqslant i\leqslant n)$,$c_j=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}(1\leqslant j\leqslant n)$. 若 $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$,且 $r_1,r_2,\cdots,r_n,c_1,c_2,\cdots,c_n$ 两两不等,则称此表为“n 阶 H 表”,记 $H_n=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\}$.

(Ⅰ)请写出一个“2 阶 H 表”;

(Ⅱ)对任意一个“n 阶 H 表”,若整数 $\lambda\in[-n,n]$,且 $\lambda\notin H_n$,求证:λ 为偶数;

(Ⅲ)求证:不存在“5 阶 H 表”.

北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(一)

2018.4

数学(理科)参考答案及评分标准

一、选择题(共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

(1)B (2)B (3)D (4)A (5)C (6)C (7)D (8)D

二、填空题(共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

(9)$\frac{\pi}{3}$ (10)1 (11)6 (12)$12+2\sqrt{3}$

(13)(1,0),(0,1),(0,−1)(答案不唯一) (14)$\frac{3\sqrt{3}}{4}$;①③④

三、解答题(共 6 小题,共 80 分)

(15)(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x$

$=2\sin x\cos x-(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=\sin 2x-\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$,

所以 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$. ………………………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,

所以$-\frac{\pi}{4}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$.

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{3\pi}{8}$时,$f(x)$取得最大值$\sqrt{2}$;

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$,即 $x=0$时,$f(x)$取得最小值-1.

所以 $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为$\sqrt{2}$,最小值为-1. ……………………… 13 分

(16)(共 13 分)

解:(Ⅰ)由图知,在被选取的 100 名学生中,数学和语文成绩均低于 60 分的有 9 人. 所以从这 100 名学生中随机选取一人,该生数学和语文成绩均低于 60 分的概率为$\frac{9}{100}=0.09$. ………………………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)由图知,语文成绩大于 80 分的学生有 10 人,这 10 人中数学成绩高于 80 分的有 4 人,所以 ξ 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(\xi=0)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$,$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$,$P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$,所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

故 ξ 的数学期望 $E(\xi)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$. ………………………… 10 分

（Ⅲ）由图判断，$a>b$. ………………………………………………………………… 13 分

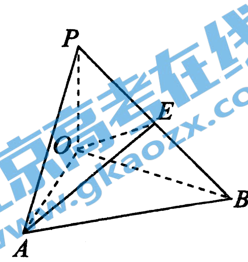
(17)（共 14 分）

证明：（Ⅰ）在正方形 $ABCD$ 中，P 为 CD 中点，$PD\perp AD$，$PC\perp BC$，

所以在三棱锥 $P\text{-}OAB$ 中，$PO\perp OA$，$PO\perp OB$.

因为 $OA\cap OB=O$，所以 $PO\perp$ 平面 OAB.

因为 $AB\subset$ 平面 OAB，所以 $PO\perp AB$. …………… 4 分



（Ⅱ）取 AB 中点 F，连接 OF，取 AO 中点 M，连接 BM.

过点 O 作 AB 的平行线 OG.

因为 $PO\perp$ 平面 OAB，所以 $PO\perp OF$，$PO\perp OG$.

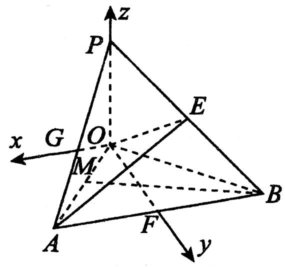
因为 $OA=OB$，F 为 AB 的中点，

所以 $OF\perp AB$. 所以 $OF\perp OG$.

如图所示，建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$.

$A(1,\sqrt{3},0)$，$B(-1,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，

$M(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.



因为 $BO=BA$，M 为 OA 的中点，所以 $BM\perp OA$.

因为 $PO\perp$ 平面 OAB，$PO\subset$ 平面 POA，所以平面 $POA\perp$ 平面 OAB.

因为平面 $POA\cap$ 平面 $OAB=OA$，$BM\subset$ 平面 OAB，

所以 $BM\perp$ 平面 POA.

因为 $\overrightarrow{BM}=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$. 所以平面 POA 的法向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,0)$.

$\overrightarrow{BP}=(1,-\sqrt{3},1)$.

设直线 BP 与平面 POA 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BP}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{BP}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以直线 BP 与平面 POA 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………… 10 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知 $E(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{OE}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{3},0)$.

设平面 OAE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有

$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{n}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ -x+\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=\sqrt{3}$，$z=2\sqrt{3}$. 即 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{2}$.

由题知二面角 $P-AO-E$ 为锐角，所以它的大小为 $\frac{\pi}{3}$. ……………………… 14 分