北京十五中高一数学期中考试试卷

2023.11

本试卷共 4 页，150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡和答题纸上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设集合 $M=\{1\}$，$N=\{1,2,3\}$，那么下列结论正确的是　D

（A）$M\cap N=\varnothing$　　（B）$M\in N$

（C）$N\subseteq M$　　（D）$M\subseteq N$

2. 若方程组 $\begin{cases}ax+y=2\\x+by=2\end{cases}$ 的解集为 $\{(2,1)\}$，则 B

（A）$a=0,b=0$　　（B）$a=\frac{1}{2},b=0$

（C）$a=0,b=\frac{1}{2}$　　（D）$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$

3．已知命题 $p:\exists x\in R$，使得 $x^2+2x<0$”,则 $\neg p$ 为 C

（A）$\exists x\in\mathbf{R}$, 使得 $x^2+2x\geq 0$　　（B）$\exists x\in\mathbf{R}$, 使得 $x^2+2x>0$

（C）$\forall x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2+2x\geq 0$　　（D）$\forall x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2+2x<0$

4．下列命题为真命题的是 B

（A）若 $a>b$，则 $ac>bc$　　（B）若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$

（C）若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　（D）若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$

5. 函数 $f(x)=x^3+2x-5$ 的零点所在的一个区间是 D

（A）$(-2,-1)$　　（B）$(-1,0)$　　（C）$(0,1)$　　（D）$(1,2)$

6. 设 $x\in\mathbf{R}$,则“$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$”是“$x<1$”的 A

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7．已知偶函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)$ 是增函数，$f\left(-2\right)$，$f\left(\pi\right)$，$f\left(-3\right)$ 的大小关系是 B

（A）$f\left(-3\right)>f\left(2\right)>f\left(\pi\right)$　　（B）$f\left(\pi\right)>f\left(-3\right)>f\left(-2\right)$

（C）$f\left(-3\right)>f\left(\pi\right)>f\left(-2\right)$　　（D）$f\left(\pi\right)>f\left(-2\right)>f\left(-3\right)$

8. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 D

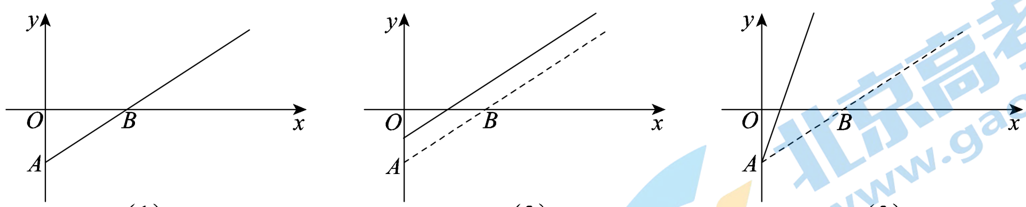
（A）$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

（C）$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　（D）$(-1,0)\cup(0,1)$

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+6, x\geqslant 0\\ 3x+4, x<0\end{cases}$，若互不相等的实数 x_1，x_2，x_3 满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是　A

（A）$\left(\dfrac{11}{3},6\right)$　　（B）$\left(\dfrac{11}{3},6\right]$　　（C）$\left(\dfrac{20}{3},\dfrac{26}{3}\right)$　　（D）$\left(\dfrac{20}{3},\dfrac{26}{3}\right]$

10. 某部影片的盈利额（即影片的票房收入与固定成本之差）记为 y，观影人数记为 x，其函数图像如图（1）所示．由于目前该片盈利未达到预期，相关人员提出了两种调整方案，图（2）、图（3）中的实线分别为调整后 y 与 x 的函数图像．



（1）　　（2）　　（3）

给出下列四种说法：

① 图（2）对应的方案是：提高票价，并提高成本；

② 图（2）对应的方案是：保持票价不变，并降低成本；

③ 图（3）对应的方案是：提高票价，并保持成本不变；

④ 图（3）对应的方案是：提高票价，并降低成本．

其中，正确的说法是 C

（A）①③　　（B）①④　　（C）②③　　（D）②④

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．函数 $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域是________.

【答案】$\{x\,|\,x\ge 0且x\ne 2\}$

12．若 $x>1$，则函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$ 的最小值为________

【答案】$2\sqrt{2}$

13．已知 $f(x),g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数，且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(2)+g(2)=$________.

【答案】-3

14．函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-5, x\le 1\\ \dfrac{a}{x}, \quad x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足若 $x_1\ne x_2$，则 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$

求实数 a 的取值范围_______.

【答案】$[-3,-2]$

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x^4}}{|x-1|-1}$，给出下列四个结论：

（1）$f(x)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$　　　　（2）$f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$

（3）$f(x)$ 在定义域内是增函数　　　　（4）$f(x)$ 的图象关于原点对称

其中所有正确结论的序号是________________

【答案】（1）（2）（4）

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．（14 分）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $P=\{x\,|\,x(x-2)\ge 0\}$，$M=\{x\,|\,a<x<a+3\}$.

（Ⅰ）化简集合 P，并求集合 $\complement_U P$；

（Ⅱ）若 $a=1$，求集合 $P\cap M$；

（Ⅲ）若 $\complement_U P\subseteq M$，求实数 a 的取值范围.

（Ⅰ）解：因为全集$U=\mathbf{R}$，集合$P=\{x\mid x(x-2)\ge 0\}$，

$P=\{x\mid x\ge 2或x\le 0\}$

所以 $\complement_U P=\{x\mid x(x-2)<0\}$，

即集合$\complement_U P=\{x\mid 0<x<2\}$.

（Ⅱ）$a=1, M=\{x\mid 1<x<4\}$

$P\cap M=[2,4)$

（Ⅲ）解：因为 $\complement_U P\subseteq M$，所以 $\begin{cases}a\le 0,\\ a+3\ge 2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a\le 0,\\ a\ge -1.\end{cases}$

所以 $a\in[-1,0]$.

17.（13 分）解下列关于 x 的不等式.

（I）$\dfrac{2x+1}{x-2}>1$；

（II）$x^2-6ax+5a^2\le 0$ （$a\in R$）.

解：（Ⅰ）$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

（Ⅱ）$x^2-6ax+5a^2\le 0$ 即$(x-a)(x-5a)\le 0$，则 $x_1=a, x_2=5a$

当$a>0$时，不等式的解集为：$[a,5a]$；

当$a=0$时，不等式的解集为：$\{0\}$；

当$a<0$时，不等式的解集为：$[5a,a]$.

18.（15 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

（Ⅰ）求 $f(2)$；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 在区间$(-1,1)$上的单调性，并用函数单调性的定义证明；

（Ⅲ）证明 $f(x)$ 是奇函数.

解：

（Ⅰ）$f(2)=\dfrac{2}{3}$ ……………………

（Ⅱ）**证明：**函数 $f(x)$ 的定义域为$D=\{x\mid x\ne \pm 1\}$. 关于原点对称。………………

对于任意 $x\in D$，因为 $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-f(x)$，…………………

所以 $f(x)$ 是奇函数. …………………

（III）函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是减函数. …………………

证明：任取 x_1，$x_2\in(-1,1)$，且 $x_1<x_2$， …………………

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2-1}-\dfrac{x_2}{x_2^2-1}$. …………………

$=\dfrac{(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)}$ …………………

因为 $x_1<x_2$

所以 $x_2-x_1>0$

因为 $-1<x_1<x_2<1$

所以 $-1<x_1x_2<1$，$x_1-1<0,x_1+1>0$，$x_2-1<0,x_2+1>0$ …………………

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

所以 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是减函数. …………………

19. （13 分）在一般情况下，大桥上的车流速度 v（单位：千米/时）是车流密度 x（单位:辆/千米）的函数.当桥上的车流密度达到 220 辆/千米时，将造成堵塞，此时车流速度为 0;当车流密度不超过 20 辆/千米时，车流速度为 100 千米/时,研究表明：当 $20\le x\le 220$ 时，车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.

（Ⅰ）当 $0\le x\le 220$ 时，求函数 $v(x)$ 的解析式;

（Ⅱ）记车流量 $f(x)=x\cdot v(x)\quad(0\le x\le 220)$，写出 $f(x)$ 的解析式，当车流密度 x 为何值时，$f(x)$ 取得最大值，并求出最大值.

（“车流量”是指单位时间内通过桥上某观测点的车辆数，单位：辆/时）

（Ⅰ）当 $20\le x\le 220$ 时，设 $v(x)=kx+b$ ………

当 $x=20$，$y=100$　当 $x=220$，$y=0$

$\begin{cases}20k+b=100\\220k+b=0\end{cases}$　解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2}\\b=110\end{cases}$ ………

$$v(x)=\begin{cases}100 & 0\le x<20\\ -\frac{1}{2}x+110 & 20\le x\le 220\end{cases}$$ ………

（Ⅱ） $f(x)=x\cdot v(x)=\begin{cases}100x & 0\le x<20\\ -\frac{1}{2}x^2+110x & 20\le x\le 220\end{cases}$

当 $0\le x<20, y\in[0,2000)$

当 $20\le x\le 220$ 时，

$x=110 \quad y_{\max}=6050$

综上，当 $x=110 \quad y_{\max}=6050$

20.（15 分）已知二次函数 $f(x)=x^2+2bx+c\,(b,c\in\mathbf{R})$.

（I）若函数 $f(x)$ 的零点是 -1 和 1，求实数 b,c 的值；

（II）已知 $c=b^2+2b+3$，设 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $f(x)=0$ 的两根，且 $(x_1+1)(x_2+1)=8$，求实数 b 的值；

（III）若 $f(x)$ 满足 $f(1)=0$，且关于 x 的方程 $f(x)+x+b=0$ 的两个实数根分别在区间 $(-3,-2)$，$(0,1)$ 内，求实数 b 的取值范围.

解：（I）法 1：由题可知：-1，1 为方程 $x^2+2bx+c=0$ 的两个根，

所以，$\begin{cases}1-2b+c=0,\\ 1+2b+c=0.\end{cases}$

解之得：$b=0,c=-1$.　…………

法 2：由题可知：-1，1 为方程 $x^2+2bx+c=0$ 的两个根，

由韦达定理，得 $\begin{cases}-1+1=-2b\\ -1\times 1=c\end{cases}$，

解之得：$b=0,c=-1$.

（Ⅱ）因为 $c=b^2+2b+3$，$f(x)=x^2+2bx+c=0$，所以 $x^2+2bx+b^2+2b+3=0$

因为 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+2bx+b^2+2b+3=0$ 的两根，

所以 $\Delta=4b^2-4b^2-8b-12\ge 0$ 即 $b\le -\frac{3}{2}$ …………

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-2b\\ x_1x_2=b^2+2b+3\end{cases}$　…………

因为 $(x_1+1)(x_2+1)=8$，所以 $x_1x_2+x_1+x_2=7$，所以 $-2b+b^2+2b+3=7$

所以$b^2=4$，所以$b=2$或$b=-2$， …………

因为$b\le -\dfrac{3}{2}$，所以$b=-2$ …………

（III）因为$f(1)=0$，所以$c=-1-2b$ …………

设$g(x)=f(x)+x+b=x^2+(2b+1)x-b-1$，则有

$$\begin{cases} g(-3)>0 \\ g(-2)<0 \\ g(0)<0 \\ g(1)>0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

解得$\dfrac{1}{5}<b<\dfrac{5}{7}$，所以$b$的取值范围为$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{5}{7}\right)$.

21.（15分）对于区间$[a,b]$ $(a<b)$，若函数$y=f(x)$同时满足：① $f(x)$在$[a,b]$上是单调函数；② 函数$y=f(x)$，$x\in[a,b]$的值域是$[a,b]$，则称区间$[a,b]$为函数$f(x)$的“保值”区间.

（I）求函数$y=x^2$的所有“保值”区间；

（II）函数$y=x^2+m$ $(m\ne 0)$是否存在“保值”区间？若存在，求出m的取值范围；若不存在，说明理由.

解：（1）因为函数$y=x^2$的值域是$[0,+\infty)$，且$y=x^2$在$[a,b]$的值域是$[a,b]$，

所以$[a,\ b]\subseteq[0,+\infty)$， 所以$a\ge 0$， 从而函数$y=x^2$在区间$[a,\ b]$上单调递增，

故有$\begin{cases} a^2=a, \\ b^2=b. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=0,\ 或a=1, \\ b=0,\ 或b=1. \end{cases}$

又$a<b$， 所以$\begin{cases} a=0, \\ b=1. \end{cases}$

所以函数$y=x^2$的“保值”区间为$[0,1]$.

（II）若函数$y=x^2+m$ $(m\ne 0)$存在“保值”区间，则有：

① 若$a<b\le 0$，此时函数$y=x^2+m$在区间$[a,\ b]$上单调递减，

所以$\begin{cases} a^2+m=b, \\ b^2+m=a. \end{cases}$ 消去m得$a^2-b^2=b-a$， 整理得$(a-b)(a+b+1)=0$.

因为$a<b$， 所以$a+b+1=0$， 即 $a=-b-1$.

又$\begin{cases} b\le 0, \\ -b-1<b, \end{cases}$ 所以 $-\dfrac{1}{2}<b\le 0$.

因为 $m=-b^2+a=-b^2-b-1=-\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ $\left(-\frac{1}{2}<b\le 0\right)$，

所以 $-1\le m<-\frac{3}{4}$.

② 若 $b>a\ge 0$，此时函数 $y=x^2+m$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，

所以 $\begin{cases}a^2+m=a,\\ b^2+m=b.\end{cases}$ 消去 m 得 $a^2-b^2=a-b$， 整理得 $(a-b)(a+b-1)=0$.

因为 $a<b$， 所以 $a+b-1=0$， 即 $b=1-a$.

又 $\begin{cases}a\ge 0,\\ a<1-a,\end{cases}$ 所以 $0\le a<\frac{1}{2}$.

因为 $m=-a^2+a=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ $\left(0\le a<\frac{1}{2}\right)$，

所以 $0<m<\frac{1}{4}$. ………………8 分

综合 ①、② 得，函数 $y=x^2+m$ $(m\ne 0)$ 存在“保值”区间，此时 m 的取值范围是 $\left[-1,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！