2021学年高三上学期8月省实、广雅、执信、六中四校联考试卷

数学

命题学校：广东广雅中学

本试卷共22小题，满分150分，考试用时120分钟.

注意事项：

1. 答题卡前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内。
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x||x-2|<2\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=3+4i$，则 $\dfrac{\overline{z}}{z-3}=$（　）

A. $1+\dfrac{3}{4}i$　　B. $1-\dfrac{3}{4}i$　　C. $-1+\dfrac{3}{4}i$　　D. $-1-\dfrac{3}{4}i$

3. 函数 $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})+\cos(x-\dfrac{\pi}{6})$ 具有性质（　　）

A. 最大值为2，图象关于 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称　　B. 最大值为 $\sqrt{2}$，图象关于 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称

C. 最大值为2，图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称　　D. 最大值为 $\sqrt{2}$，图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称

4. 一个圆柱的侧面展开图是一个面积为 $4\pi^2$ 的正方形，则这个圆柱的体积为（　　）

A. π　　B. 2π　　C. π^2　　D. $2\pi^2$

5. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}-\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{5}\right)=$（　　）

A. $-\dfrac{7}{8}$　　B. $\dfrac{7}{8}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

6. 已知函数 $y=\log_a(x-1)+1$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象恒过定点 A，若点 A 在椭圆 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 上，则 $m+n$ 的最小值为（　　）

A. 12　　　　B. 10　　　　C. 9　　　　D. 8

7. 2020 年新冠肺炎肆虐，全国各地千千万万的医护者成为"最美逆行者"，医药科研工作者积极研制有效抗疫药物，中医药通过临床筛选出的有效方剂"三药三方"("三药"是指金花清感颗粒、连花清瘟颗粒(胶囊)和血必净注射液；"三方"是指清肺排毒汤、化湿败毒方和宣肺败毒方)发挥了重要的作用.甲因个人原因不能选用血必净注射液，甲、乙两名患者各自独立自主的选择一药一方进行治疗，则两人选取药方完全不同的概率是（　）

A. $\dfrac{4}{9}$　　　　B. $\dfrac{8}{27}$　　　　C. $\dfrac{2}{3}$　　　　D. $\dfrac{5}{9}$

8. 已知点 Q 在圆 $E:(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 上，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 P 在椭圆 C 上，且圆 E 上的所有点均在椭圆 C 外，若 $|PQ|-|PF|$ 的最小值为 $2\sqrt{5}-6$，且椭圆 C 的长轴长恰与圆 E 的直径长相等，过点 F 作圆 E 的切线，则切线斜率为（　　）

A. ±2　　　　B. $\dfrac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$　　　　C. $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　　　D. $\pm\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 如图是 2021 年青年歌手大奖赛中，七位评委为甲、乙 两名选手打出的分数的茎叶图（其中 m、n 均为数字 0～9 中的一个），在去掉一个最高分和一个最低分后，则有（　）

甲		乙
0	7	1
9 m 5 5 1	8	1 2 4 4 7
n	9	9

A. 甲选手得分的平均数一定大于乙选手得分的平均数

B. 甲选手得分的中位数一定大于乙选手得分的中位数

C. 甲选手得分的众数与 m 的值无关

D. 甲选手得分的方差与 n 的值无关

10. 已知向量 $\vec{a}=(1,\sin\theta),\vec{b}=(\cos\theta,\sqrt{2})$，则下列命题正确的是（　　）

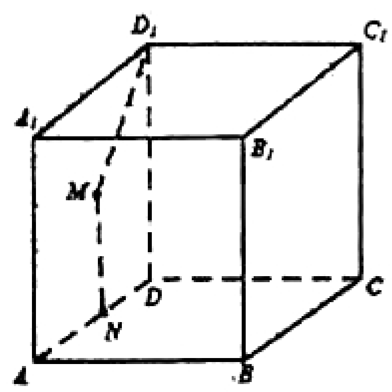
A. 存在 θ，使得 $\vec{a}//\vec{b}$

B. 当 $\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直

C. 对任意 θ，都有 $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$

D. 当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{3}$ 时，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

11. 如图，点 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中的侧面 ADD_1A_1 内（包括边界）的一个动点，则下列结论正确的是（　　）



A. 满足 $BM\perp A_1D$ 的点 M 的轨迹是一条线段

B. 在线段 AD_1 上存在点 M，使异面直线 B_1M 与 CD 所成的角是 30°

C. 若正方体的棱长为1，三棱锥 $B-C_1MD$ 的体积最大值为 $\dfrac{1}{3}$

D. 点 M 存在无数个位置满足到直线 AD 和直线 C_1D_1 的距离相等

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1,x\ge m\\-(x+2)^2,x<m\end{cases}(m\in R)$,则（　）

A.对任意的 $m\in R$，函数 $f(x)$ 都有零点.

B.当 $m\le -3$ 时，对 $\forall x_1\ne x_2$，都有 $(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))<0$ 成立.

C.当 $m=0$ 时，方程 $f[f(x)]=0$ 有 4 个不同的实数根.

D.当 $m=0$ 时，方程 $f(x)+f(-x)=0$ 有 2 个不同的实数根.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$，则双曲线 C 的实轴长为________.

14. 已知二项式 $(2x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式的二项式系数和为64，则展开式中的有理项系数和为________.

15. 函数 $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 的图象在点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 处的切线与直线 $x-ay+1=0$ 垂直，则非零实数 a 的值为________.

16. 设正整数 $n=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+a_k\cdot 2^k$，其中 $a_i\in\{0,1\},i=0,1,2,\cdots k$，记 $\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$. 若 $m=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+\cdots+a_9\cdot 2^9+2^{10}$ 且 $\omega(m)=3$，则这样的正整数 m 有________个，所有的这样的正整数 m 的和为________.(用数字作答)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，满足 $a_4=32,a_3+a_5=80$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）设 $b_n=\log_2 a_n$，若 b_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项积，证明 $\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}=1$.

18.党中央，国务院高度重视新冠病毒核酸检测工作，中央应对新型冠状病毒感染肺炎疫情工作领导小组会议作出部署，要求尽力扩大核酸检测范围，着力提升检测能力.根据统计发现，疑似病例核酸检测呈阳性的概率为 $p(0<p<1)$.现有 6 例疑似病例，分别对其取样、检测，既可以逐个化验，也可以将若干个样本混合在一起化验，混合样本中只要有病毒，则化验结果呈阳性.若混合样本呈阳性，则需将该组中备用的样本再逐个化验；若混合样本呈阴性，则判定该组各个样本均为阴性，无需再化验.现有以下三种方案：方案一：6 个样本逐个化验；方案二：6 个样本混合在一起化验；方案三：6 个样本均分为两组，分别混合在一起化验.在新冠肺炎爆发初期，由于检测能力不足，化验次数的期望值越小，则方案越"优".

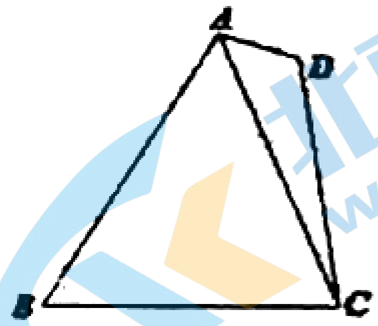
（1）若 $p=\frac{1}{3}$，按方案一，求 6 例疑似病例中至少有 1 例呈阳性的概率；

（2）若 $t=(1-p)^3$，现将该 6 例疑似病例样本进行化验，当方案三比方案二更"优"时，求 t 的取值范围.

19. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle D=2\angle B$，且 $AD=1$， $CD=3$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（1）若 $BC=\sqrt{6}$，求 AB 的长；

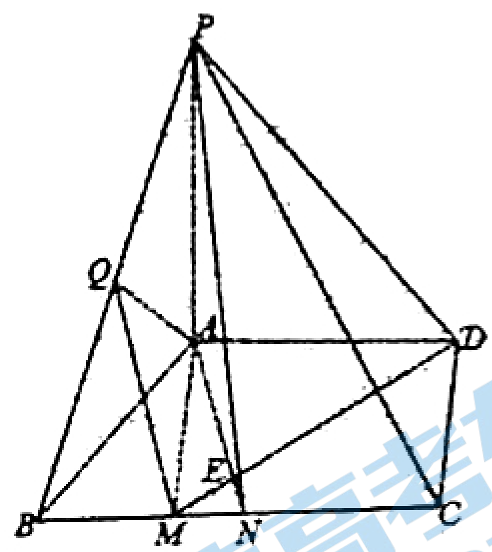
（2）求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.



20. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\,//\,BC, BC\perp CD, PA=AD=2, BC=3CD=3$，点 M,N 在线段 BC 上，满足 $BM=2MN=1$，$AN\cap MD=E$.

（1）求证：$PN\perp MD$；

（2）若 Q 为线段 PB 上的一点，且 $PD\,//$ 平面 AQM，求平面 QAM 与平面 PAN 所成锐二面角的余弦值.



21. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，$M(n,2)$ 为抛物线 C 上的一点，且 $|MF|=2$.

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）过点 F 的直线 m 与抛物线 C 交于 A,B 两点，点 P 在抛物线 C 上，记直线 PA 的斜率为 k_1，直线 PB 的斜率为 k_2，试判断是否存在点 P，使得 $k_1+k_2=2$？若存在，求出点 P 的个数；若不存在，请说明理由.

22. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2ax+\ln x$

(1) 若函数 $f(x)$ 为增函数，求实数 a 的取值范围

(2) 设 $g(x)=xf(x)-\frac{1}{2}x^3+2x$ 有两个不同零点 x_1, x_2

i) 证明：$x_1+x_2>\frac{1}{a}$

ii) 若 $x_2-3x_1\geq 0$，证明：$x_1+x_2>\frac{6}{e^2}$

2021学年高三上学期8月省实、广雅、执信、六中四校联考答案

数学

一、选择题（本大题12小题，每小题5分，共60分．其中第1题~第10题为单项选择题，在给出的四个选项中，只有一项符合要求；第11题和第12题为多项选择题，在给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得5分，选对但不全的得3分，有选错的得0分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	D	A	C	A	B	ABD	BD	ACD	AC

二、填空题（本大题4小题，每小题5分，共20分）

13. $2\sqrt{3}$　　14. 65　　15. -1　　16. 45，55287

三、解答题（本大题6小题，共70分）

17（1）可设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>1)$，$\because a_4=32,\therefore a_3+a_5=\dfrac{32}{q}+32q=80$．……2分

解得：$q=2$或$q=\dfrac{1}{2}$（舍去）．……4分

所以$a_n=a_4\cdot 2^{n-4}=2^{n+1}$．……5分

(2)$\because b_n=\log_2 a_n=n+1,\therefore c_1=b_1=2$ ……6分

当$n\geq 2$时，$c_1\cdot c_2\cdots\cdots c_n=n+1$①，$c_1\cdot c_2\cdots\cdots c_{n-1}=n$②，……7分

①/②得$c_n=\dfrac{n+1}{n}(n\geq 2)$，……8分

当$n=1$时，$c_1=\dfrac{2}{1}=2$也成立．$\therefore c_n=\dfrac{n+1}{n}$……9分

$\therefore \dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}=1$……10分

18(1)用X表示6例疑似病例中化验呈阳性的人数，则随机变量$X\sim B(6,\dfrac{1}{3})$……1分

由题意可知：$P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-C_6^0(\dfrac{2}{3})^6=\dfrac{665}{729}$．……3分

答：6例疑似病例中至少有1例呈阳性的概率为$\dfrac{665}{729}$．……4分

(2)方案二：混合一起检验，记检验次数为ξ，则$\xi=1,7$．……5分

$\therefore P(\xi=1)=t^2$，$P(\xi=7)=1-t^2$

$\therefore E(\xi)=t^2+7(1-t^2)=7-6t^2$ ……7分

方案三：每组的三个样本混合在一起化验，记检验次数为η，则$\eta=2,5,8$. ……8分

$\therefore P(\eta=2)=t^2$，$P(\eta=5)=2t(1-t)$, $P(\eta=8)=(1-t)^2$ ……10分

$\therefore E(\eta)=2t^2+10t(1-t)+8(1-t)^2=8-6t$

$\because E(\eta)<E(\xi)\therefore 8-6t<7-6t^2\therefore 6t^2-6t+1<1\therefore \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<t<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$……12分

$\therefore t$的取值范围. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<t<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$

19（1）$\because \angle D=2\angle B$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \cos D=\cos 2B=2\cos^2 B-1=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$， ……2 分

$\because$在□ACD中，$AD=1$，$CD=3$，$\cos D=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$由余弦定理可得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D=1+9-2\times 3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12$， $\therefore$ $AC=2\sqrt{3}$， ……4 分

在□ABC中，$BC=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，即$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{AB^2+6-12}{2\cdot AB\times\sqrt{6}}$， ……5 分

化简得$AB^2-2\sqrt{2}AB-6=0$，解得$AB=3\sqrt{2}$．故AB的长为$3\sqrt{2}$． ……6 分

（2）设四边形$ABCD$面积为S，则$S=S_{\Delta BAC}+S_{\Delta DAC}$

$\because S_{\Delta DAC}=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DC\cdot\sin D=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DC\cdot\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{2}$， ……7 分

所以$S=S_{\Delta BAC}+\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin B+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}BA\cdot BC+\sqrt{2}$， ……8 分

在□ABC中，$AC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$由余弦定理可得：

$AB^2+BC^2-AC^2=2AB\cdot BC\cdot\cos B$， ……9 分

即$AB^2+BC^2-12=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}AB\cdot BC\geq 2AB\cdot BC-12$， ……10 分

$\therefore AB\cdot BC\leq\dfrac{12}{2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}=9+3\sqrt{3}$，

当且仅当$\therefore AB=BC=\sqrt{9+3\sqrt{3}}$时，$(S_{\Delta BAC})_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}\times(9+3\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$， ……11 分

所以$S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{2}$，……12 分

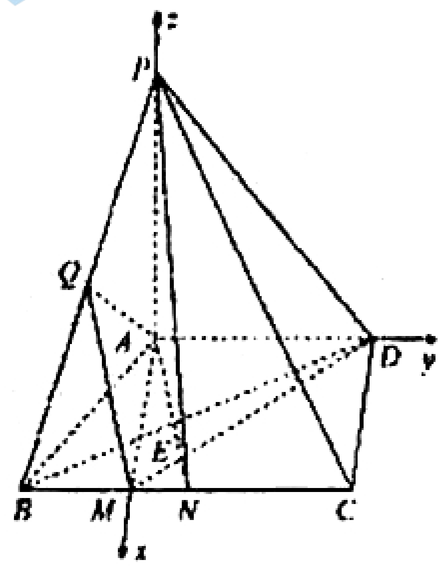
20（1）证明：$\because PA\perp$平面$ABCD, MD\subset$平面$ABCD$，$\therefore MD\perp PA$……1 分

$\because AD//BC, BC\perp CD, AD=2, BC=3, BM=1, MC=2=AD$，$\therefore$四边形$ADCM$为矩形……2 分

$\because \dfrac{AM}{AD}=\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle NAM=\angle MDA=\angle DMC$，$\therefore \angle DMC+\angle ANM=90^{\circ}$，$\therefore DM\perp AN$

……3分

$\because PA\cap AN=A, PA, AN\subset$平面$PAN$，$\therefore MD\perp$平面$PAN$



$\because PN\subset$平面PAN，$\therefore PN\perp MD$……4分

（第一问直接用向量法，也相应给分）

(2) 连接BD交AM于点E，连接QE.

$\because \Delta BME\sim\Delta DAE$，$\therefore \dfrac{BE}{ED}=\dfrac{ME}{EA}=\dfrac{1}{2}$

$\because PD//$平面AQM，$PD\subset$平面PBD，平面$AQM\cap$平面$PBD=QE$

$\therefore QE//PD$，$\therefore \dfrac{BQ}{BP}=\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{1}{3}$……6分

如图建立空间指角坐标系，则

$A(0,0,0), M(1,0,0), P(0,0,2), N(1,\frac{1}{2},0), B(1,-1,0), Q(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，$D(0,2,0)$……8分

由（1）知$MD\perp$平面PAN，则$\overrightarrow{MD}=(-1,2,0)$为平面$PAN$的一个法向量.……9分

$\because \overrightarrow{AM}=(1,0,0), \overrightarrow{AQ}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

设平面QAM的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0\end{cases}$，取$\vec{m}=(0,1,1)$……11分

设平面QAM与平面PAN所成锐二面角为θ，$\therefore \cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{MD}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{MD}|}=\dfrac{|0-2+0|}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$……12分

$\therefore$平面QAM与平面PAN所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

21（1）根据题意抛物线C的方程为$y^2=2px(p>0)$，

则$|MF|=n+\dfrac{p}{2}=2, 2pn=4$，……2 分，解得$p=2, n=1$，……3 分，

所以抛物线C的标准方程为$y^2=4x$. ……4 分

(2) 由题意知，$F(1,0)$，直线 m 的斜率不为0，可设直线 m 的方程为 $x=ty+1$，……5 分

联立方程得 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ty+1\end{cases}$，消去 x 并化简得 $y^2-4ty-4=0$，……6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，则 $y_1+y_2=4t,y_1\cdot y_2=-4$.……7 分

因为 A,P 两点在抛物线 C 上，所以 $\begin{cases}y_1^2=4x_1\\y_0^2=4x_0\end{cases}$，

所以 $k_1=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=\dfrac{4}{y_0+y_1}$，同理可得 $k_2=\dfrac{4}{y_0+y_2}$，……8 分，则

$$k_1+k_2=\frac{4}{y_1+y_0}+\frac{4}{y_2+y_0}=\frac{4(y_1+y_2+2y_0)}{(y_1+y_0)(y_2+y_0)}=\frac{4(y_1+y_2+2y_0)}{y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2}=\frac{4(4t+2y_0)}{-4+4ty_0+y_0^2}=2,$$

……9 分

所以 $8t+4y_0=-4+4ty_0+y_0^2$，即 $y_0^2+(4t-4)\ y_0-8t-4=0$ (*) ……10 分

因为 $\Delta=(4t-4)^2+4(8t+4)=16(t^2+2)>0$，所以方程(*)有两个不同的解，……11 分

故满足 $k_1+k_2=2$ 的点 P 的个数为 2 .……12 分

22 (1) $\because f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-2a+\dfrac{1}{x}$.……1 分

$\because$ 函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

$\therefore f'(x)=x+\dfrac{1}{x}-2a\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-2a=2-2a\geq 0,\therefore a\leq 1$.……3 分

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $a\leq 1$.

(2) (i) $\because g(x)=x(\ln x+2-2ax)=0,\therefore \ln x+2-2ax=0(x>0)$ 的两个根为 x_1,x_2. ……4分

不妨设 $x_2>x_1>0$

$\therefore\begin{cases}\ln x_1+2=2ax_1\\\ln x_2+2=2ax_2\end{cases}\therefore 2a(x_2-x_1)=\ln x_2-\ln x_1.\therefore a=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{2(x_2-x_1)}$ ……5 分

要证：$x_1+x_2>\dfrac{1}{a}$，

只需证 $x_1+x_2>\dfrac{2(x_2-x_1)}{\ln x_2-\ln x_1}\Leftrightarrow \ln x_2-\ln x_1>\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$.……6分

令$t=\frac{x_2}{x_1}>1, F(x)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}.(t>1)$

$\therefore F'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$在$t\in(1,+\infty)$恒成立，$\therefore F(x)$在$t\in(1,+\infty)$为增函数，$\therefore F(x)>F(1)=0$

$\therefore x_1+x_2>\frac{1}{a}$. ……8分

（ii）$\because x_2-3x_1\ge 0, \therefore t=\frac{x_2}{x_1}\ge 3$，

$\because \begin{cases}\ln x_1+2=2ax_1\\ \ln x_2+2=2ax_2\end{cases} \therefore \ln x_2+\ln x_1+4=2a(x_2+x_1)$

……9分

$\therefore \ln x_2+\ln x_1+4=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}(x_1+x_2), \therefore \ln(x_1x_2)+4=\frac{\frac{x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}+1}\ln\frac{x_2}{x_1}$

令$G(x)=\frac{(t+1)}{t-1}\ln t.(t\ge 3)$，$\therefore G'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}(t\ge 3)$ ……10分

令$h(t)=t-\frac{1}{t}-\ln t(t\ge 3). \therefore h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}\ge 0$

$\therefore h(x)$在$t\in(1,+\infty)$为增函数，$\therefore h(x)\ge h(3)>h(1)=0$，$\therefore G'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}>0$

$\therefore G(x)$在$t\in[3,+\infty)$为增函数，$\therefore G(x)\ge G(3)=2\ln 3=\ln 9$. ……11分

$\therefore \ln x_2+\ln x_1+4\ge \ln 9, \therefore \ln(x_1\cdot x_2)\ge \ln\frac{9}{e^4}, \therefore x_1\cdot x_2\ge\frac{9}{e^4}$

$\therefore x_1+x_2>2\sqrt{x_1\cdot x_2}=2\sqrt{\frac{9}{e^4}}=\frac{6}{e^2}$

$\therefore x_1+x_2>\frac{6}{e^2}$. ……12分