

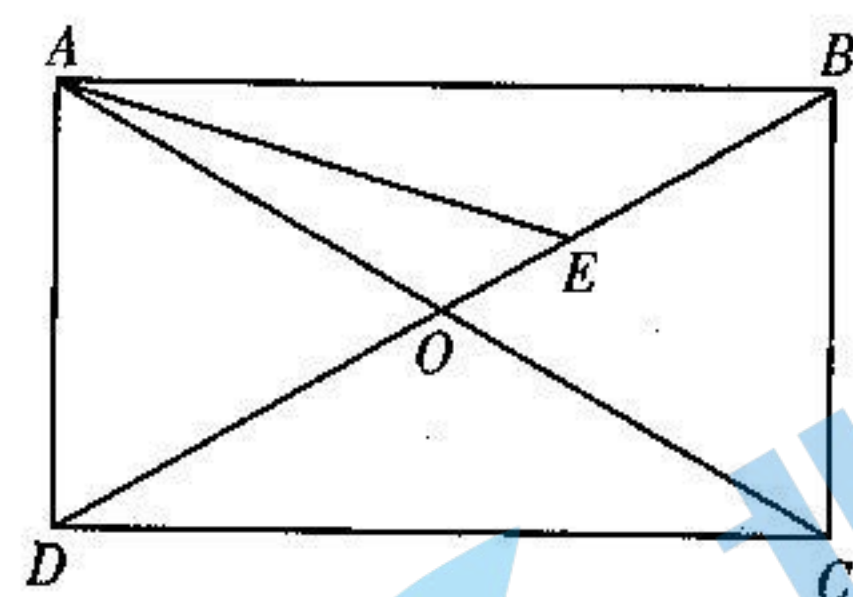
理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

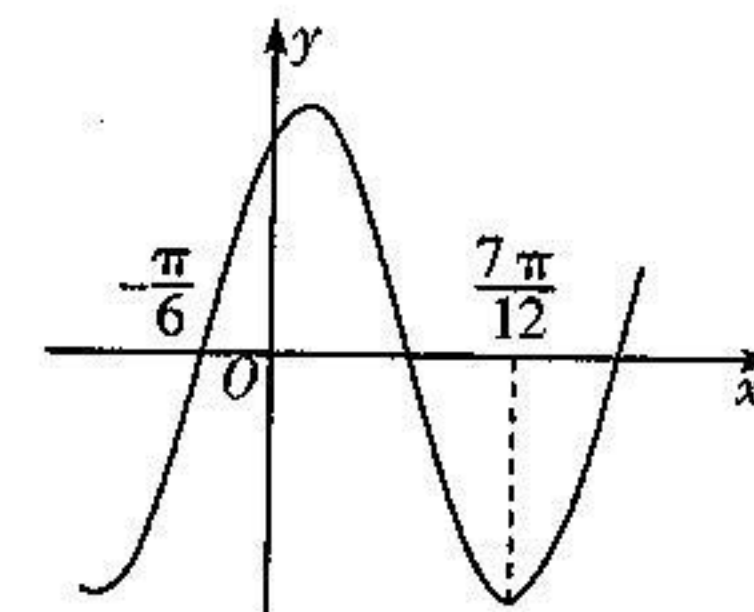
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x - 2 < 1\}$, $B = \{x | 2x^2 - 5x - 7 < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $(3, \frac{7}{2})$ B. $(-1, \frac{7}{2})$ C. $(-1, 3)$ D. $[-1, 3]$
2. 已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 则下列命题中, 正确的是
 A. 若 $a^4 > b^4$, 则 $a > b$ B. 若 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, 则 $a > b$
 C. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$ D. 若 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$, 则 $a < b$
3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 = 2, a_4 + a_5 = 16$, 则 $\{a_n\}$ 的公比为
 A. -2 B. 1 C. 2 D. $2\sqrt{2}$
4. 下列区间一定包含函数 $f(x) = \sin 2x + \sin x - \frac{x}{2}$ 的零点的是
 A. $(0, \frac{\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ D. $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
5. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, 4^x > 2^x$, 命题 $q: \exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $\ln x_0 = -1$, 则下列命题是真命题的为
 A. $p \wedge q$ B. $(\neg p) \wedge q$ C. $p \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$
6. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数且其图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x - 1$, 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 则 $g(x)$ 的图象在点 $(-1, g(-1))$ 处的切线方程为
 A. $y = 4x + 2$ B. $y = -4x - 6$ C. $y = 0$ D. $y = -2$
7. 如图所示, 矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 点 E 在线段 OB 上且 $OE = \frac{1}{3}OB$, 若 $\vec{AE} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda - \mu =$



- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$

8. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $b_n = \frac{a_n + n^2}{a_n}, a_3 = 3, b_4 + b_5 = 11$, 则 $S_n + T_n =$
 A. $n^2 - 2n$ B. $2n^2 - n$ C. $2n^2 + n$ D. $n^2 + 2n$
9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象大致如图所示, 则不等式 $[f(x) - f(-\frac{3\pi}{4})][f(x) - f(\frac{\pi}{12})] \leq 0$ 的解集为



- A. $[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi - \frac{\pi}{12}], k \in \mathbf{Z}$ B. $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{4}], k \in \mathbf{Z}$
 C. $[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{12}], k \in \mathbf{Z}$ D. $[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{3\pi}{4}], k \in \mathbf{Z}$
10. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx$ ($b \in \mathbf{R}$), 则“ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”是“ $f(f(x))$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
 11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = -\ln x$, 则
 A. $f(\log_4 \frac{1}{3}) > f(3^4) > f(\log_3 4)$ B. $f(3^4) > f(\log_4 \frac{1}{3}) > f(\log_3 4)$
 C. $f(\log_4 \frac{1}{3}) > f(\log_3 4) > f(3^4)$ D. $f(3^4) > f(\log_3 4) > f(\log_4 \frac{1}{3})$
 12. 已知正实数 x, y, z 满足 $x^2 - xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 与 $6x + 12y - 5xy - z$ 同时取得最大值时, $z =$
 A. 6 B. $\frac{27}{8}$ C. 3 D. $\frac{9}{8}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若向量 a, b 的夹角为 $60^\circ, |a| = 2, |b| = 6$, 则 $|2a - b| =$ _____.
14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y - 4 \leq 0; \\ x - y - 2 \geq 0; \\ y \leq 0; \end{cases}$ 则 $z = 3x - 2y$ 的最小值为 _____.
15. 已知 $\alpha \in (\pi, 2\pi), \cos \alpha - 3\sin \alpha = 1$, 则 $\cos \frac{\alpha}{2} =$ _____.
16. 某项测试有 10 道必答题, 甲和乙参加该测试, 用数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 记录他们的成绩. 若第 k 题甲答对, 则 $a_k = k$, 若第 k 题甲答错, 则 $a_k = -k$; 若第 k 题乙答对, 则 $b_k = 2^{k-1}$, 若第 k 题乙答错, 则 $b_k = -2^{k-1}$. 已知 $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 767, a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{10} b_{10} = 9217$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} =$ _____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\cos x - \sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 设函数 $g(x) = 2f(x) + 1$, 求 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域.

18. (12 分)

设 $\{a_n\}$ 是公比为负数的等比数列, $3a_1$ 为 a_2, a_3 的等差中项, $a_5 = -243$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = a_{2n} + a_{2n-1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a\cos C - c\cos(B+C) = -\frac{b}{3\cos(A+B)}$.

(I) 求 $\tan C$;

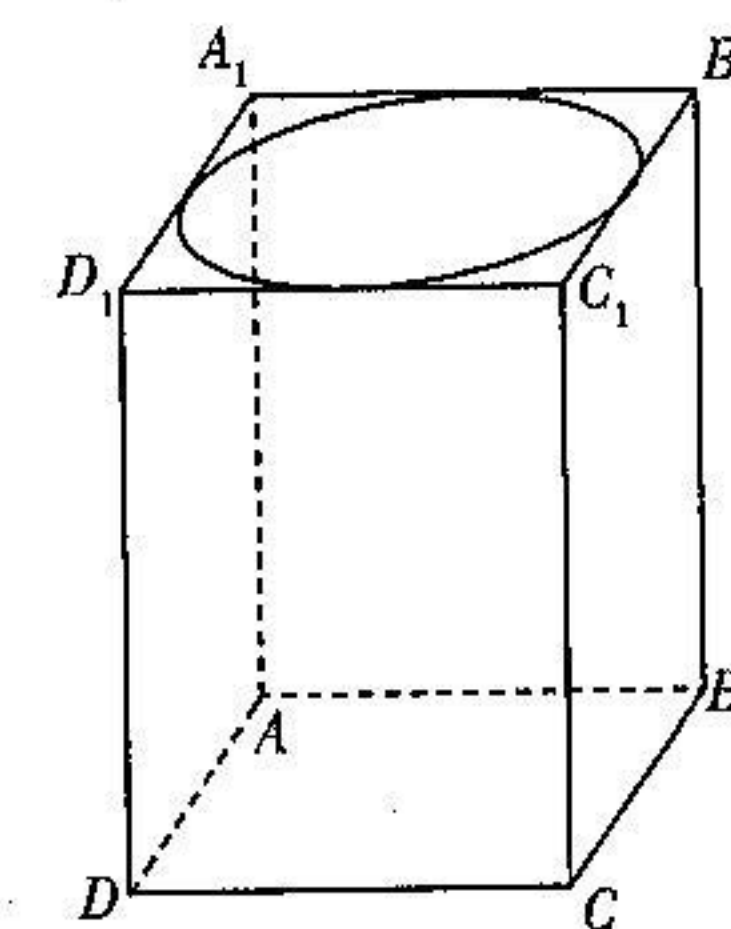
(II) 若 $c = 3, \sin A \sin B = \frac{16}{27}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分)

如图所示是一个长方体容器, 长方体的上、下底面为正方形, 容器顶部是一个圆形的盖子, 圆与上底面四条边都相切, 该容器除了盖子以外的部分均用铁皮制作, 共使用铁皮的面积为 16 dm^2 . 假设圆形盖子的半径为 $r \text{ dm}$, 该容器的容积为 $V \text{ dm}^3$, 铁皮厚度忽略不计.

(I) 求 V 关于 r 的函数关系式;

(II) 该容器的高 AA_1 为多少分米时, V 取最大值?



21. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的各项均为正数, 且 $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n}, n \in \mathbb{N}^*$.

(I) 若 $b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$, 且 $a_1 = b_1 = 2$, 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $b_{n+1} = a_n + b_n - 1$, 且 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + 2x - 1$.

(I) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -2 , 求 x_0 ;

(II) 当 $x > 1$ 时, 关于 x 的不等式 $a(x-1) < f(x)$ 恒成立, 求满足条件的实数 a 的最大整数.

天一大联考
2021—2022 学年高三年级上学期期中考试

理科数学 · 答案

北京高考在线
www.gkzxx.com

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 因为 $A = \{x | x - 2 < 1\} = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | 2x^2 - 5x - 7 < 0\} = \left\{x \mid -1 < x < \frac{7}{2}\right\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -1 < x < 3\}$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查不等式的性质.

解析 对于 A, 若 $a = -2, b = 1$, 则 $a < b$, 所以 A 项错误; 对于 B, 若 $c < 0$, 则不满足 $a > b$, 所以 B 项错误; 对于 C, 若 $a = -1, b = -2, c = -3, d = -4$, 则满足 $a > b, c > d$, 而此时 $ac = 3 < bd = 8$, 所以 C 项错误; 对于 D, 因为 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}, c^2 > 0$, 所以 $a < b$, 所以 D 项正确.

3. 答案 C

命题意图 本题考查等比数列的概念.

解析 设公比为 q , 则 $a_4 + a_5 = q^3(a_1 + a_2)$, 所以 $q^3 = 8$, 故 $q = 2$.

4. 答案 C

命题意图 本题考查零点存在性定理的应用.

解析 因为 $f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{8} > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} > 0,$
 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{8} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{8} < 0, f(\pi) = -\frac{\pi}{2} < 0$, 所以区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 一定包含 $f(x)$ 的零点.

5. 答案 B

命题意图 本题考查指数函数与对数函数的性质, 以及逻辑联结词.

解析 当 $x = -1$ 时, $4^x = \frac{1}{4} < 2^x = \frac{1}{2}$, 所以命题 p 为假命题, 则 $\neg p$ 为真命题. 当 $x_0 = e^{-1}$ 时, $\ln x_0 = -1$, 所以命题 q 为真命题, 则 $\neg q$ 为假命题, 所以 $p \wedge q$ 为假命题, $(\neg p) \wedge q$ 为真命题, $p \wedge (\neg q)$ 为假命题, $(\neg p) \wedge (\neg q)$ 为假命题, 故选 B.

6. 答案 A

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 由已知得 $f'(1) = 2, f(1) = 1$, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f'(-1) = 2, f(-1) = -1$. 又因为 $g'(x) = f'(x) - 2x$, 所以 $g'(-1) = f'(-1) - 2 = 0, g(-1) = f(-1) - 1 = -2$, 所以 $g(x)$ 的图象在点 $(-1, g(-1))$ 处的切线方程为 $y = 4(x + 1) - 2 = 4x + 2$.

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzxx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息.

7. 答案 A

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, $OE = \frac{1}{3}OB$, 所以 $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DB} = \frac{2}{3}(\vec{AB} - \vec{AD})$, 所以 $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AD} + \frac{2}{3}(\vec{AB} - \vec{AD}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$, 因为 $\vec{AE} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AD} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$, 所以 $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$, 所以 $\lambda - \mu = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

故选 A.

8. 答案 D

命题意图 本题考查数列的通项公式与求和.

解析 由 $a_3 = 3$, 得 $b_3 = \frac{a_3 + 3^2}{a_3} = \frac{3 + 3^2}{3} = 4$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 则由 $\begin{cases} b_3 = 4, \\ b_4 + b_5 = 11, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} b_1 + 2d = 4, \\ 2b_1 + 7d = 11, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} b_1 = 2, \\ d = 1, \end{cases}$ 所以 $b_n = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$. 则 $b_n = \frac{a_n + n^2}{a_n} = n + 1$, 所以 $a_n = n$. 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$

$\frac{n(1+n)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n(2+n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2}$, 则 $S_n + T_n = n^2 + 2n$.

9. 答案 B

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由图象知 $\frac{3}{4}T = \frac{7\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{4}$, 解得 $T = \pi$, 所以 $\omega = \pm 2$. 不妨取 $\omega = 2$, 令

$2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 令 $k = 0$, 得 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 所以 $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) =$

$2\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 1, f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$, 由 $[f(x) - 1][f(x) - 2] \leq 0$ 得 $1 \leq f(x) \leq 2$. 由 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi +$

$\frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

10. 答案 C

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $b \geq 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(f(x))$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即充分性成立. 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是单调递增, 则 $b < 0, f(f(x)) = (x^2 + bx)^2 + b(x^2 + bx) = (x^2 + bx) \cdot (x^2 + bx + b)$, 易知 $y = x^2 + bx$ 有零点 0 和 $-b, y = x^2 + bx + b$ 有一正一负两个零点, 且正零点不等于 $-b$, 于是 $f(f(x))$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点, 所以 $f(f(x))$ 在 $(0, +\infty)$ 上不可能单调递增, 所以必要性也成立.

11. 答案 A

命题意图 本题考查函数的奇偶性、周期性和单调性的综合应用.

解析 由题意知 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 即 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(3^4) = f(81) = f(1) = -\ln 1 = 0$;

$f\left(\log_4 \frac{1}{3}\right) = f(-\log_4 3) = f(\log_4 3)$, 因为 $\log_4 3 \in (0, 1)$, 所以 $f(\log_4 3) > 0; f(\log_5 4) = -f(\log_3 4 - 2) = -f(2 -$

$\log_3 4)$, 因为 $2 - \log_3 4 \in (0, 1)$, 所以 $-f(2 - \log_3 4) < 0$. 综上可得 $f\left(\log_4 \frac{1}{3}\right) > f(3^4) > f(\log_5 4)$.

12. 答案 B

命题意图 本题考查不等式的性质以及基本不等式的应用.

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息.

解析 $\frac{xy}{z} = \frac{xy}{x^2 - xy + 4y^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{4y}{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y} \times \frac{4y}{x}} - 1} = \frac{1}{3}$, 当且仅当 $x = 2y$ 时等号成立; $6x + 12y - 5xy - z$

$z = 6x + 12y - 4xy - x^2 - 4y^2 = -(x + 2y - 3)^2 + 9 \leq 9$, 当 $x + 2y = 3$ 时等号成立. 所以当 $\frac{xy}{z}$ 与 $6x + 12y - 5xy - z$

同时取得最大值时, 有 $\begin{cases} x = 2y, \\ x + 2y = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{3}{4}, \end{cases}$ 此时 $z = 3xy = \frac{27}{8}$.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案 $2\sqrt{7}$

命题意图 本题考查平面向量数量积的应用.

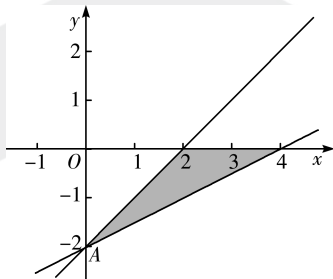
解析 因为 $|2a - b|^2 = 4|a|^2 - 4a \cdot b + |b|^2 = 4 \times 2^2 - 4 \times 2 \times 6 \times \cos 60^\circ + 6^2 = 28$, 所以 $|2a - b| = 2\sqrt{7}$.

14. 答案 4

命题意图 本题考查简单的线性规划问题.

解析 作出不等式组表示的平面区域, 如图阴影部分所示, 由 $z = 3x - 2y$ 得 $y = \frac{3}{2}x - \frac{z}{2}$, 由图可知, 当直线 $y =$

$\frac{3}{2}x - \frac{z}{2}$ 经过点 $A(0, -2)$ 时, z 取得最小值 4.



15. 答案 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 因为 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, 所以 $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 由 $\cos \alpha - 3\sin \alpha = 1$ 可得 $1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 6\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1$, 整理可

得 $\sin \frac{\alpha}{2} = -3\cos \frac{\alpha}{2}$, 所以 $\tan \frac{\alpha}{2} = -3$, 所以 $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. 答案 39

命题意图 本题考查数列的概念, 是创新题型.

解析 计算可得 $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + \dots + 10 \times 2^9 = 9\,217$, 可知对每道题, 要么甲和乙都答对, 要么甲和乙都答错. 又 $1 + 2 + 4 + \dots + 2^9 = 1\,023$, $1\,023 - 767 = 256 = 2 \times 2^7$, 可知乙仅有第 8 题答错, 从而甲也仅有第 8 题答错, 所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 1 + 2 + \dots + 10 - 2 \times 8 = 39$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查三角恒等变换、三角函数的图象和性质.

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息.

解析 (I) $f(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\cos x - \sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$
 $= \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \dots\dots\dots (4 \text{分})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$. $\dots\dots\dots (5 \text{分})$

(II) 由已知得 $g(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

所以 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, $\dots\dots\dots (8 \text{分})$

所以 $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \in [-1, 2]$,

即 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-1, 2]$. $\dots\dots\dots (10 \text{分})$

18. 命题意图 本题考查等差数列和等比数列的性质, 数列求和.

解析 (I) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q < 0)$.

因为 $3a_1$ 为 a_2, a_3 的等差中项,

所以 $6a_1 = a_2 + a_3$, 即 $6a_1 = a_1q + a_1q^2, \dots\dots\dots (2 \text{分})$

又因为 $a_1 \neq 0$, 所以 $6 = q + q^2$, 即 $q^2 + q - 6 = 0, \dots\dots\dots (4 \text{分})$

所以 $q = -3$ (正值舍去). $\dots\dots\dots (6 \text{分})$

所以 $a_n = a_3 q^{n-5} = -243 \times (-3)^{n-5} = (-3)^n. \dots\dots\dots (8 \text{分})$

(II) 由 (I) 得 $b_n = a_{2n} + a_{2n-1} = (-3)^{2n} + (-3)^{2n-1} = 9^n - \frac{9^n}{3} = \frac{2}{3} \times 9^n, \dots\dots\dots (10 \text{分})$

所以 $\{b_n\}$ 是以 6 为首项, 9 为公比的等比数列,

所以 $T_n = \frac{6 \times (1-9^n)}{1-9} = \frac{3}{4} \times (9^n - 1). \dots\dots\dots (12 \text{分})$

19. 命题意图 本题考查三角恒等变换, 正弦定理与余弦定理的应用.

解析 (I) 由 $a \cos C - c \cos(B+C) = -\frac{b}{3 \cos(A+B)}$, 得 $a \cos C + c \cos A = \frac{b}{3 \cos C}, \dots\dots\dots (1 \text{分})$

由正弦定理得 $\sin A \cos C + \sin C \cos A = \frac{\sin B}{3 \cos C}, \dots\dots\dots (2 \text{分})$

所以 $\sin(A+C) = \frac{\sin B}{3 \cos C}, \dots\dots\dots (3 \text{分})$

所以 $\sin B = \frac{\sin B}{3 \cos C}, \dots\dots\dots (4 \text{分})$

又 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = \frac{1}{3}. \dots\dots\dots (5 \text{分})$

所以 $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = 2\sqrt{2}$ (6分)

(II) 若 $c = 3$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$, (7分)

则 $a = \frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A, b = \frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B$, (8分)

则 $ab = \frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B = \frac{162}{16}\sin A \sin B = \frac{162}{16} \times \frac{16}{27} = 6$, (10分)

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ (12分)

20. 命题意图 本题考查函数模型, 导数的应用.

解析 (I) 设 $AA_1 = a$ dm.

由题意得 $(2r)^2 - \pi r^2 + (2r)^2 + 8ar = 16$, (1分)

可得 $a = \frac{16 + (\pi - 8)r^2}{8r}$, (2分)

所以 $V = (2r)^2 a = 8r + \left(\frac{\pi}{2} - 4\right)r^3$ (3分)

由 $a > 0$, 得 $\frac{16 + (\pi - 8)r^2}{8r} > 0$, 解得 $0 < r < \frac{4}{\sqrt{8 - \pi}}$ (5分)

因此 $V = 8r + \left(\frac{\pi}{2} - 4\right)r^3, r \in \left(0, \frac{4}{\sqrt{8 - \pi}}\right)$ (6分)

(II) $V' = 8 + 3\left(\frac{\pi}{2} - 4\right)r^2$,

令 $V' > 0$, 得 $0 < r < \frac{4}{\sqrt{3(8 - \pi)}}$; 令 $V' < 0$, 得 $\frac{4}{\sqrt{3(8 - \pi)}} < r < \frac{4}{\sqrt{8 - \pi}}$,

所以 V 在 $\left(0, \frac{4}{\sqrt{3(8 - \pi)}}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{4}{\sqrt{3(8 - \pi)}}, \frac{4}{\sqrt{8 - \pi}}\right)$ 上单调递减, (8分)

所以当 $r = \frac{4}{\sqrt{3(8 - \pi)}}$ 时, V 取最大值, 此时 $a = \frac{\sqrt{3(8 - \pi)}}{3}$,

即该容器的高 AA_1 为 $\frac{\sqrt{3(8 - \pi)}}{3}$ dm 时, V 取最大值. (12分)

21. 命题意图 本题考查递推数列, 以及等差数列与等比数列的综合应用.

解析 (I) 由题意得 $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n b_n} = \frac{b_{n+1}}{a_n b_n}$, 即 $a_{n+1} b_{n+1} = 2a_n b_n$, (2分)

所以 $\{a_n b_n\}$ 是以 $a_1 b_1 = 4$ 为首项, 2 为公比的等比数列, (3分)

所以 $a_n b_n = 2^{n+1}$ (5分)

(II) 因为 $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n} \geq 2\sqrt{\frac{b_n}{a_n} \times \frac{a_n}{b_n}} = 2$, 所以 $0 < a_{n+1} \leq 1$. (*) (6分)

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

若 $d > 0$, 则当 $n > \frac{1-a_1}{d}$ 时, 有 $a_{n+1} = a_1 + nd > 1$, 与 $(*)$ 矛盾;

若 $d < 0$, 则当 $n > -\frac{a_1}{d}$ 时, 有 $a_{n+1} = a_1 + nd < 0$, 与 $(*)$ 矛盾.

于是 $d = 0$, 即 $a_n = a_1$, 所以 $0 < a_1 \leq 1$ (8分)

又 $b_{n+1} = a_n + b_n - 1 = b_n + a_1 - 1$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 $a_1 - 1$ 为公差的等差数列.

若 $a_1 \neq 1$, 则 $a_1 < 1$, 所以 $b_{n+1} < b_n$, (9分)

又由 $\frac{2}{a_1} = \frac{b_n}{a_1} + \frac{a_1}{b_n}$ 可得 $b_n = 1 \pm \sqrt{1 - a_1^2}$,

因此 $\{b_n\}$ 中的项最多有两个值, 与 $b_{n+1} < b_n$ 矛盾, 故 $a_1 = 1$ (10分)

从而 $b_n = 1 \pm \sqrt{1 - a_1^2} = 1$ (11分)

综上, $a_n = 1, b_n = 1$ (12分)

22. 命题意图 本题考查导数的几何意义、利用导数研究函数性质.

解析 (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 2 = \ln x + 3$, (1分)

则切线的斜率为 $\ln x_0 + 3$, (2分)

又 $f(x_0) = x_0 \ln x_0 + 2x_0 - 1$,

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y - (x_0 \ln x_0 + 2x_0 - 1) = (\ln x_0 + 3)(x - x_0)$,

即 $(\ln x_0 + 3)x - y - x_0 - 1 = 0$, 其在 y 轴上的截距为 $-x_0 - 1$, (4分)

所以 $-x_0 - 1 = -2$, 解得 $x_0 = 1$ (5分)

(II) $a(x-1) < f(x)$ 即 $a(x-1) < x \ln x + 2x - 1$,

又 $x > 1$, 所以 $x-1 > 0$, 可得 $a < \frac{x \ln x + 2x - 1}{x-1}$ 对于 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立. (6分)

当 $x > 1$ 时, 令 $g(x) = \frac{x \ln x + 2x - 1}{x-1}$, 则 $g'(x) = \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2}$.

再令 $h(x) = x - \ln x - 2$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$,

所以 $h(x) = x - \ln x - 2$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增; (7分)

又 $h(3) = 1 - \ln 3 < 0, h(4) = 2(1 - \ln 2) > 0$, 所以 $\exists x_0 \in (3, 4)$ 使 $h(x_0) = 0$,

即 $\exists x_0 \in (3, 4)$ 使 $x_0 - 2 = \ln x_0$ (9分)

当 $1 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0, g'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0, g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + 2x_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0(x_0 - 2) + 2x_0 - 1}{x_0 - 1} = x_0 + 1$, (11分)

所以 $a < x_0 + 1$,

又因为 $x_0 + 1 \in (4, 5)$, 所以实数 a 的最大整数值是 4. (12分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkzxx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。