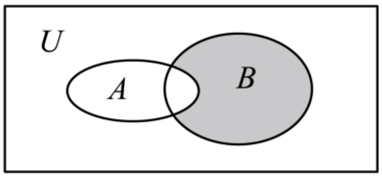
2023 北京一零九中高一（上）期中
数　学

一、选择题（10 道题共 40 分）

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x\le 3\}$，$B=\{x|-1<x<6\}$，则如图中阴影部分表示的集合是（　）



A. $\{x|-1<x\le 3\}$　　B. $\{x|x<6\}$

C. $\{x|3<x<6\}$　　D. $\{x|x\le -1\}$

2. 已知$A=\{x|x>3\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-1}{x-4}\le 0\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A. $[3,4]$　　B. $(3,4]$　　C. $(3,4)$　　D. $[3,4)$

3. 在下列各组中，$f(x)$与$g(x)$表示同一函数的是（　）

A. $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$　　B. $f(x)=x(x\ge 0)$，$g(x)=|x|$

C. $f(x)=x$，$g(x)=\frac{x^2}{x}$　　D. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$，$g(x)=\sqrt{x(x-1)}$

4. 下列函数中，是偶函数且在区间$(0,+\infty)$上单调递减的是（　）

A. $y=x^3$　　B. $y=\frac{1}{x^2}$　　C. $y=x^2+x$　　D. $y=|x-1|$

5. 已知$a>b$，则下列不等式一定成立的是（　）

A. $|a|>|b|$　　B. $ac^2>bc^2$

C. $a^2>b^2$　　D. $c-a<c-b$

6. 要制作一个面积为 2 平方米，形状为直角三角形的铁架框，现有下列四种长度的铁管，最合理（够用，又浪费最少）的是（　）

A. 4.6　　B. 4.8 米　　C. 6.8 米　　D. 7 米

7. 要得到函数$y=\frac{x}{x-1}$的图象，只需将函数$y=\frac{1}{x}$的图象（　）

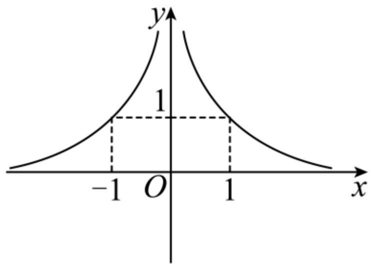
A. 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

B. 向右平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

C. 向左平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

D.向左平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

8. 幂函数$y=x^{m^2-4m}$（$m\in Z$）的图象如图所示，则m的值为（　）



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $f(-4)=0$，则不等式 $x\cdot f(x)>0$ 的解集为（　）

A. $\{x|x>4或-4<x<0\}$

B. $\{x|0<x<4或x<-4\}$

C. $\{x|x>4或x<-4\}$

D. $\{x|0<x<4或-4<x<0\}$

10. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当 $x<0$ 时，$f(x)>0$．给出以下四个结论：

① $f(0)=0$；

② $f(x)$ 可能是偶函数；

③ $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上一定存在最大值 $f(n)$；

④ $f(x-1)>0$ 的解集为 $\{x|x<1\}$．

其中正确的结论为（　）

A. ①②　　B. ①③　　C. ①④　　D. ②④

二、填空题（5 道题共 25 分）

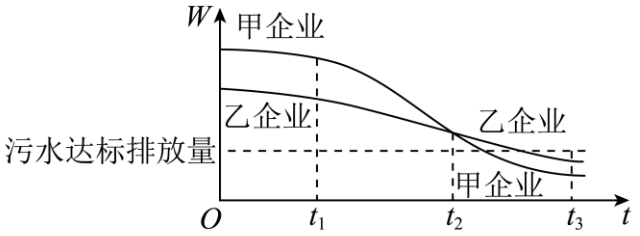
11. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-4}$ 的定义域为____________

12. 若集合 M 满足 $\{1,2\}\subseteq M\subseteq\{1,2,3,4\}$，则集合 $M=$______.（写出一个集合 M 即可）

13. 已知 $f(x-1)=x^2+1$，则 $f(x)$ 的解析式为____________.

14. 已知 $x>0,y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1$，则 $x+2y$ 的取值范围是____________

15. 为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改，设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，用 $-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱，已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示.



给出下列四个结论：

①在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

②在t_2时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

③在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标；

④甲企业在$[0,t_1]$,$[t_1,t_2]$,$[t_2,t_3]$这三段时间中，在$[0,t_1]$的污水治理能力最强.

其中所有正确结论的序号是________________.

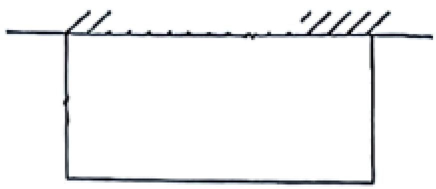
三、解答题（6 道题共 85 分）

16. 若集合$A=\{x|m-1<x<m^2+1\}$，$B=\{x|x^2<4\}$.

（1）当$m=2$时，求$A\cup B$，$A\cap B$；

（2）若$A\cap B=A$，求实数m的取值范围.

17. 如图，欲建一块面积为144平方米的矩形草地，另外三边用铁丝网围住，现有44米铁丝网可供使用（铁丝网可以剩余），若利用x米墙，



（1）求x的取值范围；

（2）求最少需要多少米铁丝网.

18. 已知函数$f(x)=x^2-2x-2$

（1）求$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},3\right]$上的最大值和最小值；

（2）若$g(x)=f(x)-mx$在$[2,4]$上是单调函数，求实数m的集合.

19. 已知函数$f(x)=x-\frac{a}{x}$，若$f(1)=-1$

（1）求a的值；

（2）证明函数在定义域内的奇偶性；

（3）证明函数在$(0,+\infty)$上为增函数.

20. 已知函数$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$是定义域为$(-a,2a-1)$的奇函数.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）用定义证明 $f(x)$ 在定义域上是增函数；

（3）求不等式 $f(x-2)>f(1-x)$ 的解集.

21. 对于函数 $f(x)$，若 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的“不动点”；若 $f[f(x_0)]=x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的“稳定点”．函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

（1）设函数 $f(x)=3x+4$，求集合 A 和 B；

（2）求证：$A\subseteq B$；

（3）设函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，且 $A=\varnothing$，求证：$B=\varnothing$.

参考答案

一、选择题（10 道题共 40 分）

1. 【答案】C

【分析】求出 $\complement_U A=\{x|x>3\}$，图中阴影部分表示的集合是 $B\cap(\complement_U A)$，由此能求出结果.

【详解】解：$\because$ 全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x\le 3\}$，$\therefore \complement_U A=\{x|x>3\}$，

$\because B=\{x|-1<x<6\}$，

$\therefore$ 图中阴影部分表示的集合是：$B\cap(\complement_U A)=\{x|3<x<6\}$.

故选：C.

2. 【答案】C

【分析】先解分式不等式把集合 B 表示出来，然后根据集合的交集运算即可求解.

【详解】由题意 $\dfrac{x-1}{x-4}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x-4)\le 0\\ x-4\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x<4$，

所以集合 $B=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x-4}\le 0\right.\right\}=\{x\,|\,1\le x<4\}$，

又集合 $A=\{x|x>3\}$，由交集运算可知 $A\cap B=\{x|3<x<4\}=(3,4)$

故选：C.

3. 【答案】A

【分析】根据函数的定义判断.

【详解】选项 A 中两个函数定义域都是 R，对应法则也相同，是同一函数；

选项 B 中，$f(x)$ 定义域是 $[0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 R，两函数定义域不相同，不是同一函数；

选项 C 中，$f(x)$ 定义域是 R，$g(x)$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\ne 0\}$，两函数定义域不相同，不是同一函数；

选项 D 中，由 $\begin{cases}x\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ 得 $x\ge 1$，由 $x(x-1)\ge 0$ 得 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$，

$f(x)$ 的定义域是 $[1,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，两函数定义域不相同，不是同一函数；

故选：A.

4. 【答案】B

【分析】根据奇偶性定义与单调性定义判断.

【详解】$y=x^3$ 是奇函数，

$y=\dfrac{1}{x^2}$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上递减，

$y=x^2+x$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 对称轴，既不是奇函数也不是偶函数，

$y=|x-1|$ 关于直线 $x=1$ 对称，既不是奇函数也不是偶函数，

故选：B．

5．【答案】D

【分析】取 $a=0$，$b=-1$ 即可判断 A，C；取 $c=0$ 即可判断 B；根据不等式的性质即可判断 D．

【详解】对于 A，取 $a=0$，$b=-1$，此时 $|a|<|b|$，故 A 错误；

对于 B，取 $c=0$，此时 $ac^2=bc^2$，故 B 错误；

对于 C，取 $a=0$，$b=-1$，此时 $a^2<b^2$，故 C 错误；

对于 D，由 $a>b$，则 $-a<-b$，所以 $c-a<c-b$，故 D 正确．

故选：D．

6．【答案】D

【分析】设一个直角边长为 $x\in(0,4)$ 米，可得直角三角形的周长 $y=x+\frac{4}{x}+\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$，利用基本不等式运算求解．

【详解】设一个直角边长为 $x\in(0,4)$ 米，则另一直角边长为 $\frac{4}{x}$ 米，斜边长为 $\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$ 米，

可得直角三角形的周长 $y=x+\frac{4}{x}+\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}+\sqrt{2\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}}}=4+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\begin{cases}x=\frac{4}{x}\\x^2=\frac{16}{x^2}\end{cases}$，即 $x=2$ 时，等号成立，

又因为 $1.4<\sqrt{2}<1.5$，可得 $6.8<4+2\sqrt{2}<7$，即直角三角形的周长大于 6.8 米，

所以合理（够用，又浪费最少）的是 7 米．

故选：D．

7．【答案】A

【分析】先变形得到 $y=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$，故利用“上加下减，左加右减”得到答案．

【详解】$y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$，

故 $y=\frac{1}{x}$ 先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位得到 $y=\frac{x}{x-1}$．

故选：A

8．【答案】C

【分析】由给出的幂函数的图象，得到幂指数小于 0，且幂函数为偶函数，然后逐一代入验证即可得到答案．

【详解】解：由函数图象可知，幂函数为偶函数，且幂指数小于 0，

当 $m=0$ 时，$m^2-4m=0$，不合题意；

当 $m=1$ 时，$m^2-4m=-3$，幂函数为奇函数，不合题意；

当 $m=2$ 时，$m^2-4m=-4$，满足幂函数为偶函数，且幂指数小于 0，符合题意；

当 $m=3$ 时，$m^2-4m=-3$，幂函数为奇函数，不合题意．

$\therefore m$ 的为 2．

故选 C．

【点睛】本题考查了幂函数的图象，考查了幂函数的性质，训练了代入验证法，是基础题．

9.【答案】C

【分析】由函数的单调性以及奇偶性先得出 $f(x)$ 的符号随 x 的变化情况，然后列表即可求解．

【详解】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，又 $f(-4)=0$，所以 $f(4)=-f(-4)=0$，

注意到 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

所以当 $0<x<4$ 时，有 $f(x)<f(4)=0$，当 $x>4$ 时，有 $f(x)>f(4)=0$，

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以当 $-4<x<0$ 时，有 $0<-x<4$，$f(x)=-f(-x)>-f(4)=0$，

当 $x<-4$ 时，有 $-x>4$，$f(x)=-f(-x)<-f(4)=0$，

所以 $x, f(x), x\cdot f(x)$ 的符号随 x 的变化情况如下表：

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,4)$	$(4,+\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x\cdot f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

由上表可知：不等式 $x\cdot f(x)>0$ 的解集为 $\{x \mid x>4 \text{或} x<-4\}$．

故选：C．

10.【答案】C

【分析】令 $x=0$，即可判断①；令 $y=-x$，结合奇偶性得定义即可判断②；设 $x<y$，结合当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，判断出函数的单调性，即可判断③④．

【详解】对于①，令 $x=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，故①正确；

对于②，令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，

又当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)>0$，所以 $f\left(x\right)$ 不是常函数，不可能是偶函数，故②错误；

对于③，设 $x<y$，则 $x-y<0$，

则 $f\left(x-y\right)=f\left(x\right)+f\left(-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)>0$，

所以 $f\left(x\right)>f\left(y\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 是减函数，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left[m,n\right]$ 上一定存在最大值 $f\left(m\right)$，故③错误；

对于④，因为 $f\left(x\right)$ 为减函数，$f\left(0\right)=0$，

由 $f\left(x-1\right)>0=f\left(0\right)$，得 $x-1<0$，解得 $x<1$，

所以 $f\left(x-1\right)>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|x<1\right\}$，故④正确.

故选：C.

二、填空题（5 道题共 25 分）

11. 【答案】$\left\{x\middle|x\geq 3\text{且}x\neq 4\right\}$

【分析】根据初等函数定义及计算法则可求出定义域.

【详解】根据函数定义可知 $\begin{cases}x-3\geq 0\\x-4\neq 0\end{cases}$，解得 $x\geq 3$ 且 $x\neq 4$

故答案为：$\left\{x\middle|x\geq 3\text{且}x\neq 4\right\}$

12. 【答案】$\left\{1,2\right\}$（答案不唯一）.

【分析】根据题意可知集合 M 中至少含元素 1 和 2，且为集合 $\left\{1,2,3,4\right\}$ 的子集，从而可求出集合 M.

【详解】因为集合 M 满足 $\left\{1,2\right\}\subseteq M\subseteq\left\{1,2,3,4\right\}$，

所以 $M=\left\{1,2\right\}$，或 $\left\{1,2,3\right\}$，或 $\left\{1,2,4\right\}$，或 $\left\{1,2,3,4\right\}$，

故答案为：$\left\{1,2\right\}$（答案不唯一）.

13. 【答案】$f(x)=x^2+2x+2$

【分析】换元法求解析式即可.

【详解】令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，

所以 $f(t)=\left(t+1\right)^2+1=t^2+2t+2$，

因此 $f(x)=x^2+2x+2$，

故答案为：$f(x)=x^2+2x+2$.

14. 【答案】$\left[9,+\infty\right)$

【分析】根据 $x+2y=\left(x+2y\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$，结合基本不等式求解即可.

【详解】因为$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，故$x+2y=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=5+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}$，

又$x>0,y>0$，故$5+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\geq 5+2\sqrt{\frac{2y}{x}\times\frac{2x}{y}}=9$，当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{2x}{y}$，即$x=y=3$时取等号，故

$x+2y$的取值范围是$[9,+\infty)$.

故答案为：$[9,+\infty)$

15.【答案】①②③

【分析】根据定义逐一判断，即可得到结果

【详解】$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$表示区间端点连线斜率的负数，

在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲的斜率比乙的小，所以甲的斜率的相反数比乙的大，因此甲企业的污水治理能力比乙企业强；①正确；

甲企业在$[0,t_1],[t_1,t_2],[t_2,t_3]$这三段时间中，甲企业在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲的斜率最小，其相反数最大，即在$[t_1,t_2]$的污水治理能力最强．④错误；

在t_2时刻，甲切线的斜率比乙的小，所以甲切线的斜率的相反数比乙的大，甲企业的污水治理能力比乙企业强；②正确；

在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放量都在污水达标排放量以下，所以都已达标；③正确；

故答案为：①②③

【点睛】本题考查斜率应用、切线斜率应用、函数图象应用，考查基本分析识别能力，属中档题.

三、解答题（6道题共85分）

16.【答案】(1) $A\cup B=\{x\mid -2<x<5\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x<2\}$；

(2) $[-1,1]$

【分析】(1) 解一元二次不等式求集合B，应用集合交并运算求集合；

(2) 由题设有$A\subseteq B$，再列不等式组求参数范围，注意说明$A\neq\varnothing$.

【小问1详解】

由$m=2$，则$A=\{x\mid 1<x<5\}$，而$B=\{x\mid x^2<4\}=\{x\mid -2<x<2\}$，

所以$A\cup B=\{x\mid -2<x<5\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x<2\}$.

【小问2详解】

由$A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$，而$B=\{x\mid -2<x<2\}$，

若$m-1\geq m^2+1\Rightarrow m^2-m+2=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\leq 0$，显然不成立，即$A\neq\varnothing$，

所以$\begin{cases} m-1\ge -2 \\ m^2+1\le 2 \end{cases}\Rightarrow -1\le m\le 1$，$m$ 的取值范围为$[-1,1]$.

17.【答案】(1) $8\le x\le 36$.

(2) $24\sqrt{2}$ 米.

【分析】(1) 由矩形三边长不大于 44，列不等式可得；

(2) 矩形三边长的和为铁丝的长度，利用基本不等式得最小值.

【小问 1 详解】

由题意$\frac{144}{x}\times 2+x\le 44$，解得$8\le x\le 36$.

【小问 2 详解】

所用铁丝长度为$y=x+\frac{288}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{288}{x}}=24\sqrt{2}$米，当且仅当$x=\frac{288}{x}$，即$x=12\sqrt{2}$时等号成立.

所以最小需要$24\sqrt{2}$米.

18.【答案】(1) $f(x)$的最大值是 1，$f(x)$的最小值是-3；

(2) $\{m|m\le 2 \text{或} m\ge 6\}$.

【分析】(1) 利用二次函数在$\left[\frac{1}{2},3\right]$的单调性，求出最大值和最小值;

(2) 该二次函数要在区间$[2,4]$上单调，则对称轴$\frac{m+2}{2}\le 2$或$\frac{m+2}{2}\ge 4$，解不等式即可.

【小问 1 详解】

$\because f(x)=x^2-2x-2=(x-1)^2-3, x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$,对称轴$x=1$,

$\therefore f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$单调递减；在$[1,3]$单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=-3, f(x)_{\max}=f(3)=(3-1)^2-3=1$.

【小问 2 详解】

由题意可得：$g(x)=f(x)-mx=x^2-(m+2)x-2$，对称轴$x=\frac{m+2}{2}$,

$\because g(x)$在$[2,4]$上是单调函数，$\therefore 4\le\frac{m+2}{2}$或$\frac{m+2}{2}\le 2$,

解得：$m\le 2$或$m\ge 6$,所以实数m的集合为：$\{m|m\le 2 \text{或} m\ge 6\}$.

19.【答案】(1) 2；(2) 证明见解析；

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 由$f(1)=-1$计算可得；

（2）由奇偶性定义证明即可；

（2）由单调性定义证明即可.

【小问 1 详解】

由已知 $f(1)=1-a=-1$， $\therefore a=2$；

【小问 2 详解】

由（1） $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$，定义域是$\{x\mid x\neq 0\}$，

$f(-x)=-x+\dfrac{2}{x}=-(x-\dfrac{2}{x})=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数；

【小问 3 详解】

设 x_1,x_2 是 $(0,+\infty)$ 上任意两个实数，且 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=x_1-\dfrac{2}{x_1}-(x_2-\dfrac{2}{x_2})=(x_1-x_2)(1+\dfrac{2}{x_1x_2})$，

$0<x_1<x_2$， 则 $x_1-x_2<0$， $1+\dfrac{2}{x_1x_2}>0$， 所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$， 即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数.

20.【答案】（1） $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}(x\in(-1,1))$；

（2）证明见解析；　（3） $(\dfrac{3}{2},2)$.

【分析】（1）由奇偶性的函数的定义域关于 0 对称求得 a， 由奇函数的性质 $f(0)=0$ 求得 b 得解析式；

（2）根据单调性的定义证明；

（3）由单调性的性质及定义域列不等式组求解.

【小问 1 详解】

由题意 $-a+2a-1=0$， $a=1$， $f(x)=\dfrac{x+b}{x^2+1}$， 又 $f(0)=b=0$，

$f\left(-x\right)=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f\left(x\right)$ 满足题意.

所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}(x\in(-1,1))$；

【小问 2 详解】

设任意的 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(-1,1)$， $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{x_2}{x_2^2+1}=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$，

又 $-1<x_1<x_2<1$，所以 $x_1-x_2<0, 1-x_1x_2>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$， $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上是增函数；

【小问 3 详解】

由（2）得$\begin{cases}x-2>1-x\\x-2<1\\1-x>-1\end{cases}$，解得$\frac{3}{2}<x<2$．解集为$(\frac{3}{2},2)$．

21.【答案】（1）$A=B=\{-2\}$

（2）证明见解析　（3）证明见解析

【分析】（1）当$f(x)=3x+4$时，直接解方程$f(x)=x$、$f[f(x)]=x$，可得出集合 A 、 B；

（2）分$A=\varnothing$、$A\neq\varnothing$两种情况讨论，第一种情况直接验证即可；在第二种情况下，任取$x_0\in A$，由“稳定点”和“不动点”的定义证得$x_0\in B$，即可得出结论；

（3）分$a>0$、$a<0$两种情况讨论，在第一种情况下，推导出$f(x)>x$，结合不等式的基本性质可得出$f[f(x)]>x$，从而得出$B=\varnothing$；在第二种情况下，推导出$f(x)<x$，结合不等式的基本性质可得出$f[f(x)]<x$，从而得出$B=\varnothing$.综合可证得结论成立.

【小问 1 详解】

解：由$f(x)=3x+4=x$，可得$x=-2$，即$A=\{-2\}$，

由$f[f(x)]=3(3x+4)+4=9x+16=x$，解得$x=-2$，即$B=\{-2\}$.

故当$f(x)=3x+4$时，$A=B=\{-2\}$.

【小问 2 详解】

证明：当$A=\varnothing$，则$A\subseteq B$成立，

若$A\neq\varnothing$，对任意的$x_0\in A$，$f(x_0)=x_0$，则$f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，所以，$x_0\in B$，

因此，$A\subseteq B$.

综上所述，$A\subseteq B$.

【小问 3 详解】

证明：因为$A=\varnothing$，则关于x的方程$ax^2+bx+c=x(a\neq0)$无实解，

即方程$ax^2+(b-1)x+c=0$无实解，则$\Delta=(b-1)^2-4ac<0$，

构造函数$g(x)=ax^2+(b-1)x+c$，

①当$a>0$时，函数$g(x)$的图象恒在x轴上方，

即对任意的$x\in\mathbf{R}$，则$f(x)>x$恒成立，

则$f[f(x)]>f(x)>x$，即$f[f(x)]-x>0$恒成立，即$B=\varnothing$；

②当$a<0$时，函数$g(x)$的图象恒在x轴下方，

即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)<x$ 恒成立，

则 $f[f(x)]<f(x)<x$，即 $f[f(x)]-x<0$ 恒成立，即 $B=\varnothing$.

综上所述，当 $A=\varnothing$ 时，$B=\varnothing$.

【点睛】关键点点睛：在证明第三问时，要注意分 $a>0$、$a<0$ 两种情况分析，确定 $f(x)$ 与 x 之间的大小关系，进而可得出 $f[f(x)]$ 与 x 的大小，从而证出结论成立.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！