平谷区 2019—2020 学年度第一学期质量监控

高二数学试卷　　　　2020. 1

考生须知	1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间为 120 分钟 . 2. 试题所有答案必须书写在答题卡上，在试卷上作答无效. 3. 考试结束后，将答题卡交回，试卷按学校要求保存好.

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分；在每个小题列出的四个选项中，只有一项是符合要求的.）

1. 命题“$\forall x\in \mathrm{R}, x^2-x+3>0$”的否定是

A．$\exists x_0\in R, x_0^2-x_0+3\le 0$　　B．$\exists x_0\in R, x_0^2-x_0+3>0$

C．$\forall x\in R, x^2-x+3\le 0$　　D．$\forall x\in R, x^2-x+3<0$

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的渐近线方程为

A．$y=\pm\dfrac{5}{3}x$　　B．$y=\pm\dfrac{4}{3}x$　　C．$y=\pm\dfrac{3}{5}x$　　D．$y=\pm\dfrac{3}{4}x$

3. 已知抛物线 C：$y^2=-8x$，那么抛物线 C 的准线方程为

A．$x=-4$　　B．$x=-2$　　C．$x=2$　　D．$x=4$

4. “$m>n$”是“曲线方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

5. 在我国建国 70 周年大庆之际，某校高二年级团支部组织 6 名学生去慰问平谷区老一代革命军人.现有 10 名学生报名，那么其中甲、乙两名学生被选参加慰问活动的概率是

A．$\dfrac{1}{14}$　　B．$\dfrac{3}{14}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

6. 在对某校高中学生身高的调查中，小明、小华分别独立进行了简单随机抽样调查.小明调查的样本平均数为 165.7，样本量为 100；小华调查的样本平均数为 166.5，样本量为 200.下列说法正确的是

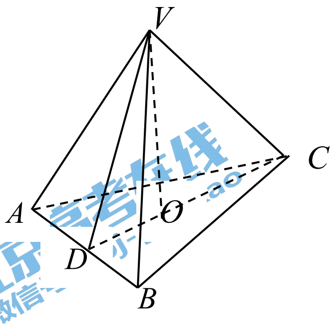
A. 小华的调查结果比小明的调查结果更接近总体平均数的估计

B. 总体平均数一定高于小明调查的样本平均数

C. 总体平均数一定低于小华调查的样本平均数

D. 总体平均数是确定的数，样本平均数总是在总体平均数附近波动

7. 如图，棱锥$V-ABC$中，$VO\perp$平面ABC，$O\in CD$，$VA=VB$，D是AB中点，下列结论错误的是



A. 平面$VCD\perp$平面ABC

B. $VD\perp AB$

C. $CD\perp AB$

D. 二面角$V-AB-C$的平面角为$\angle VBC$

8. 如果把一个平面区域内两点间的距离的最大值称为此区域的直径，那么曲线$|y|=4-x^2$围成的平面区域的直径为

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. $2\sqrt{17}$

第Ⅱ卷（非选择题共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把答案填在答题卡中相应题中横线上）

9. $(x-2)^8$的展开式的第 4 项的系数是__________；

10. 已知命题$p:\exists x_0\in R$，使得$x_0^2+x_0+1<0$，那么此命题是_____命题（填“真”或“假”）；

11. 从 3 名男生和 4 名女生中选出 2 人分别担任 2 项不同的社区活动服务者，要求男、女生各 1 人，那么不同的安排有________种(用数字做答)；

12. 已知抛物线$y^2=4x$上一点P到焦点的距离为5，那么点P的坐标为____________；

13．某市准备引进优秀企业进行城市建设．城市分别对甲地、乙地 5 个企业（共 10 个企业）进行综合评估，得分情况如茎叶图所示．

甲地企业		乙地企业
5　3	9	8　9
9　6	8	4　8
7	7	1

根据茎叶图，可知甲地、乙地企业评估得分的平均值分别是______、______；

试比较甲地、乙地企业得分方差大小__________.

14．某次高二英语听力考试中有 5 道选择题，每题 1 分，每道题在 A，B，C 三个选项中只有一个是正确的.下表是甲、乙、丙三名同学每道题填涂的答案和这 5 道题的得分：

	1	2	3	4	5	得分
甲	C	C	B	B	A	4
乙	C	A	A	B	C	3
丙	A	C	C	B	C	2

则甲同学答错的题目的题号是______ ；此题正确的选项是_______ .

三、解答题：(本大题共 6 小题，共 80 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

15. (本小题 13 分)

（I）已知双曲线与椭圆$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$有相同焦点，且过点$P\left(2,\sqrt{2}\right)$，求双曲线标准方程；

（II）已知椭圆$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{3}=1\left(m>3\right)$的一个焦点为$F$，椭圆上一点$P$到焦点$F$的最大距离是3，求这个椭圆的离心率.

16. (本小题 13 分)

某地区高考实行新方案，规定：语文、数学和英语是考生的必考科目，考生还须从物理、化学、生物、历史、地理和政治六个科目中选出了三个科目作为选考科目．若一名学生从六个科目中选出了三个科目作为选考科目，则称该学生的选考方案确定；否则，称该学生选考方案待确定．

某学校为了了解高一年级 200 名学生选考科目的意向，随机选取 20 名学生进行了一次调查，统计选考科目人数如下表：

性别	选考方案确定情况	物理	化学	生物	历史	地理	政治
男生	选考方案确定的有 5 人	5	5	2	1	2	0
男生	选考方案待确定的有 7 人	6	4	3	2	4	2
女生	选考方案确定的有 6 人	3	5	2	3	3	2
女生	选考方案待确定的有 2 人	1	2	1	0	1	1

（Ⅰ）在选考方案确定的男生中，同时选考物理、化学、生物的人数有多少？

（Ⅱ）从选考方案确定的男生中任选 2 名，试求出这 2 名学生选考科目完全相同的概率.

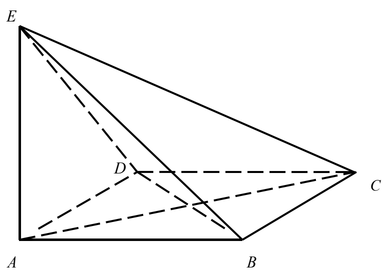
17. (本小题 14 分)

如图，四棱锥$E-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的正方形，$AE\perp$面$ABCD$，且$AE=$

（I）求四棱锥$E-ABCD$的体积；

（II）证明：$BD\perp$面ACE；

（III）求EC与面BDE的夹角的正弦值 .



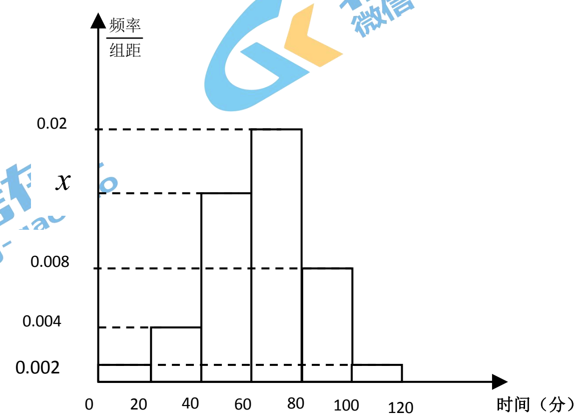
18. (本小题 13 分)

目前用外卖网点餐的人越来越多.现对大众等餐所需时间情况进行随机调查，并将所得数据绘制成频率分布直方图（如图）.其中等餐所需时间的范围是$[0,120]$，样本数据分组为$[0,20)$，$[20,40)$，$[40,60)$，$[60,80)$，$[80,100)$,$[100,120]$.

（Ⅰ）求直方图中x的值；

（Ⅱ）某同学在某外卖网点了一份披萨，试估计他等餐时间不多于1小时的概率；

（Ⅲ）现有3名学生都分别通过外卖网进行了点餐，这3名学生中等餐所需时间少于1小时的人数记为X，求X的分布列和数学期望.（以直方图中的频率作为概率）



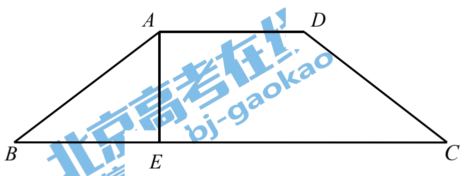
19. (本小题 14 分)

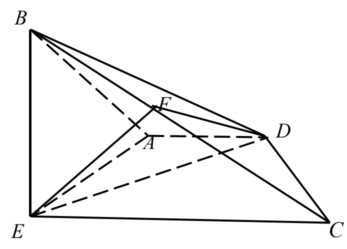
已知等腰梯形$ABCD$，$AD \parallel BC, AD=1, BC=3$，$AE \perp BC$，$AE=2$.现将$\Delta ABE$沿着$AE$折起，使得面$ABE \perp$面$AECD$，点$F$为线段$BC$上一动点.

（I）证明：$EC \perp AB$；

（II）如果F为BC中点，证明：$DF \parallel$面ABE；

（III）若二面角$D-EF-C$的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，求$\dfrac{BF}{BC}$的值.





20. (本小题 13 分)

给定椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，称圆心在原点$O$，半径为$\sqrt{a^2+b^2}$的圆是椭圆$C$的“准圆”. 若椭圆$C$的一个焦点为$F$（$\sqrt{3}$,0)，其短轴上的一个端点到$F$的距离为$2$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程和其“准圆”方程；

（Ⅱ）设椭圆短轴的一个端点为 A，长轴的一个端点为 B，点 P 是“准圆”上一动点，求三角形 ΔABP 面积的最大值.

平谷区 2019-2020 学年度第一学期教学质量监控试卷参考答案

高二数学　　　　2020. 1

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	B	C	D	D	C

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. -448；　10. 假；　11. 24；　12. $(4,4)$,$(4,-4)$或者$(4,\pm4)$；（少一个不给分）

13. 88、88；$s^2_{甲}<s^2_{乙}$.　**（第一、二空一个一分，第三空 3 分）**

14. $3,A$　**（第一空 2 分，第二空 3 分）**

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）.

15.（本小题满分 13 分）

解：（I）因为椭圆方程 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 中

$a^2=8$，$b^2=4$，$\therefore c^2=4$，所以焦点坐标为 $F_1(-2,0)$ $F_2(2,0)$ ………………2 分

设双曲线标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………………3 分

因为曲线过点 $P\left(2,\sqrt{2}\right)$

所以 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ ………………5 分

又 $PF_2=\sqrt{2},F_1F_2=4,PF_2\perp F_1F_2$

所以 $PF_1=3\sqrt{2}$ 即 $2a=2\sqrt{2}$

又因为 $a^2=2,c^2=4,b^2=2$

所以双曲线标准方程 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ ………………7 分

（也可以将点代入方程，代数法酌情给分.）

（II）由椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1(m>3)$，可知椭圆焦点在 x 轴

即 $a^2=m,b^2=3$ ………………8 分

因为椭圆上一点 P 到焦点 F 的最大距离是 3

由椭圆定义可得：$a+c=3$……….①………………10 分

又因为 $a^2-c^2=b^2=3$……….②………………11 分

由①②解得 $a=2,c=1$ ………………12 分

所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ ………………13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）选考方案确定的男生中，同时选择“物理、化学和生物”的人数是 2 人.

………… 6 分

（Ⅱ）由数据可知，已确定选考科目的男生共 5 人.其中有 2 人选择“物理、化学和生物”，记为 a_1，a_2；有 1 人选择“物理、化学和历史”，记为 b；有 2 人选择“物理、化学和地理”，记为 c_1，c_2． ………………8 分

从已确定选考科目的男生中任选 2 人，有 a_1a_2，a_1b，a_1c_1，a_1c_2，a_2b，a_2c_1，a_2c_2，bc_1，bc_2，c_1c_2，共 10 种选法. ………………10 分

两位学生选考科目完全相同的选法种数有 a_1a_2，c_1c_2，共 2 种选法. ………………11 分

设事件 A：从已确定选考科目的男生中任选出 2 人，这两位学生选考科目完全相同.

则 P（A）$=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. ………………13 分

17.（本小题满分 14 分）

解：（I）因为底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，$AE\perp$ 面 $ABCD$,

所以四棱锥 $E-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}AE=\frac{1}{3}\times AB\times AD\times AE=\frac{16}{3}$.………4 分

（II）证明：底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，

所以 $BD \perp AC$

又有 $AE \perp 面ABCD$,

所以 $AE \perp BD$, $AE \cap AC = A$

所以 $BD \perp 面ACE$ ……………8 分

（III）由题意，以 AB 为 x 轴，以 AD 为 y 轴，以 AE 为 z 轴建立空间直角坐标系.

所以 C（2,2,0），D（0,2,0），B（2,0,0），E（0,0,4）

即 $\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-2,0,4)$,$\overrightarrow{EC}=(2,2,-4)$ ………………10 分

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x_1+2y_1=0\\ -2x_1+4z_1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=1\\ y_1=1\\ z_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$ ，即 $\vec{n}=(1,1,\frac{1}{2})$ ………………12 分

设 EC 与面 BDE 的夹角为 θ

那么 $sin\theta=\left|cos<\vec{n},\overrightarrow{EC}>\right|=\left|\dfrac{2+2-2}{\sqrt{24}\times\sqrt{2+\frac{1}{4}}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

所以 EC 与面 BDE 的夹角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$. ………………14 分

18.（本小题满分 13 分）

解：（I）$(0.02+x+0.008+0.004+0.002+0.002)\times 20=1$

解得 $x=0.014$ ………………2 分

（II）由直方图可得等餐时间不多于 1 小时的概率 $P=(0.002+0.004+0.014)\times 20=0.4$

所以他等餐时间不多于 1 小时的概率为 $\dfrac{2}{5}$ ………………4 分

（III）这 3 名学生中等餐所需时间少于 1 小时的人数 X 可取 0,1,2,3 ………………5 分

由（II）可知每个人等餐时间不超过 1 小时的概率为 $\dfrac{2}{5}$

所以 $P(X=0)=(\dfrac{3}{5})^3=\dfrac{27}{125}$ $\quad P(X=1)=C_3^1\dfrac{2}{5}\cdot(\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{54}{125}$

$P(X=2)=C_3^2(\dfrac{2}{5})^2(\dfrac{3}{5})=\dfrac{36}{125}$，$P(X=3)=(\dfrac{2}{5})^3=\dfrac{8}{125}$ ………………11 分

那么 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{27}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{8}{125}$

…………………12 分

这 3 名学生中等餐所需时间少于 1 小时的人数的数学期望

$E(X)=\dfrac{54}{125}+\dfrac{72}{125}+\dfrac{24}{125}=\dfrac{150}{125}=\dfrac{6}{5}$. …………………13 分

19.（本小题满分 14 分）

(Ⅰ) 证明：在等腰梯形中，$AE\perp BC$，所以 $EC\perp AE$

因为面$ABE\perp$面$AECD$，面ABE$\cap$面AECD=AE，$EC\subset$面$AECD$

所以 $EC\perp$面ABE

所以 $EC\perp AB$ …………………4 分

(Ⅱ) 取 BE 中点 M，连接 AM,MF

在三角形 BEC 中，$MF\underline{\underline{//}}\dfrac{1}{2}EC$，而 $AD\underline{\underline{//}}\dfrac{1}{2}EC$，所以 $AD\underline{\underline{//}}MF$

即四边形 $AMFD$ 为平行四边形，$DF//AM$

因为 $AM\subset$面ABE，$DF\not\subset$面ABE，所以$DF//$面ABE …………………8 分

（解法说明：如果前两问学生直接建系，建系写出坐标，正确给 2 分.）

(Ⅲ) 由 $EC\perp$面ABE，$AE\perp BE$，则以 EC为x轴，以EA为y轴，EB为z轴建立空间直角坐标系.

则 $B(0,0,1)$，$C(2,0,0)$，$D(1,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,-1)$

设$\dfrac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{BC}}=\lambda,(0<\lambda<1),F(x_1,y_1,z_1)$，则 $F(2\lambda,0,1-\lambda)$ …………………10 分

设面 DEF 的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\lambda x+(1-\lambda)z=0\\ x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\\ z=\dfrac{4\lambda}{\lambda-1}\end{cases}$，即$\vec{n}=\left(2,-1,\dfrac{4\lambda}{\lambda-1}\right)$ …………………12 分

因为 $EA\perp$平面 EFC，所以 $\overrightarrow{EA}$是面EFC的法向量，

若二面角 $D-EF-C$ 的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，

则 $\cos<\overrightarrow{EA},\vec{n}>=|\dfrac{-2}{2\times\sqrt{5+\left(\dfrac{4\lambda}{\lambda-1}\right)^2}}|=\dfrac{1}{3}$ ………………13 分

解得 $\lambda=-1$，或者 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，由题意 $\lambda=\dfrac{1}{3}$

即 $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{1}{3}$. ………………14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题可知 $c=\sqrt{3}, a=2$，

$\therefore b=1$ ………………2 分

$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$， ………………3 分

准圆方程为 $x^2+y^2=5$. ………………4 分

（Ⅱ）设椭圆短轴的一个端点为 $A(0,1)$，长轴的一个端点为 B（2,0），

那么直线 AB 方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$，即 $x+2y-2=0$ ………………6 分

要使得三角形 ΔABP 面积最大，则过点 P 的直线与直线 AB 平行且于圆相切.

………………8 分

设过点 P 的直线 L：$x+2y+m=0$， ………………9 分

因为直线 L 与圆相切，所以 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{5}}=r=\sqrt{5}$. ………………10 分

所以 $m=\pm5$，

由图分析可得：当 $m=5$ 时，三角形 ΔABP 面积最大，

即直线 L：$x+2y+5=0$ ………………11 分

此时直线 L 与直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|-2-5|}{\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ ………………12 分

所以三角形 ΔABP 面积最大值 $S_{\Delta ABP}=\dfrac{1}{2}\times AB\times d=\dfrac{7}{2}$ ………………13 分