

2019 北京育才学校高三（上）期中

数 学

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$, $B = \{x \mid x \geq 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $(-\infty, 2]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(1, 2)$ D. $[1, +\infty)$
2. 已知向量 $a = (x + 1, 2)$, $b = (-1, x)$, 若 a 与 b 垂直, 则 $|b| =$ ()
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
3. 下列函数中, 在定义域上既是奇函数又是增函数的是 ()
A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^3$ C. $y = \sin x$ D. $y = \lg x$
4. 若 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 2$, $c = \log_{\frac{1}{4} 3}$, 则下列结论正确的是 ()
A. $a < c < b$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$
5. “ $a = \frac{\pi}{4}$ ” 是 “ $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ” 的 ()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分且必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. A, B, C, D, E 五人并排站在一排, 如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边, 那么不同的排法种数有 ()
A. 60 种 B. 48 种 C. 36 种 D. 24 种
7. 将函数 $f(x) = \sin x$ 图象所有的点向右移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 所得图象的函数解析式为 ()
A. $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$ B. $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6})$
C. $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ D. $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$
8. 将五个 1, 五个 2, 五个 3, 五个 4, 五个 5 共 25 个数填入一个 5 行 5 列的表格内 (每格填入一个数), 使得同一行中任何两数之差的绝对值不超过 2, 考察每行中五个数之和, 记这五个和的最小值为 m , 则 m 的最大值为 ()
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $(1 - i)^2 =$ _____
10. 已知角 α 的终边经过点 $(-3, 4)$, 则 $\tan \alpha =$ _____; $\cos(\alpha + \pi) =$ _____
11. 已知平面向量 a, b 满足 $a \cdot (a + b) = 3$, 且 $|a| = 2, |b| = 1$, 则向量 a 与 b 的夹角为 _____
12. 已知函数 $f(x) = 1 + 2x + \frac{3}{x} (x > 0)$ 在 $x = a$ 时取到最小值 b , 则 $a =$ _____; $b =$ _____
13. 能说明“若定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)f(2) > 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上不存在零点”为假命题的一个函数是 _____

14. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 下列命题正确的有_____ (写出所有正确命题的编号)

- ① $f(x)$ 是奇函数;
- ② $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是单调递增函数;
- ③ 方程 $f(x) = x^2 + 2x$ 有且仅有 1 个实数根;
- ④ 如果对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) > kx$, 那么 k 的最大值为 2

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边长分别是 a, b, c , 且 $C = \frac{\pi}{3}$, $c = 4$.

- (1) 若 $\sin A = \frac{3}{4}$, 求 a ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $4\sqrt{3}$, 求 a, b ,

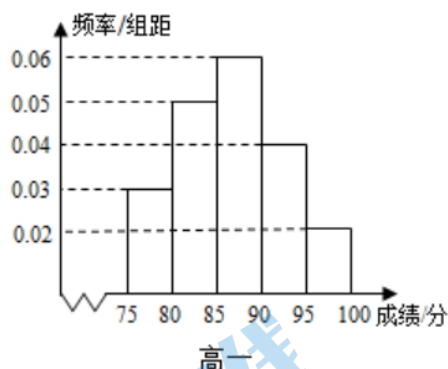
16. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间;
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5$, $a_1 + a_4 = 12$. 等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数, 且满足 $b_n b_{n+1} = 2^{a_n}$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及数列 $\{b_n\}$ 的公比 q ;
- (2) 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 某学校组织高一、高二年级学生进行了“纪念建国 70 周年”的知识竞赛，从这两个年级各随机抽取了 40 名学生，对其成绩进行分析，得到了高一年级成绩的频率分布直方图和高二年级成绩的频数分布表。



成绩分组	频数
[75, 80)	2
[80, 85)	6
[85, 90)	16
[90, 95)	14
[95, 100]	2

高二

规定成绩不低于 90 分为“优秀”。

- 估计高一年级知识竞赛的优秀率；
- 将成绩位于某区间的频率作为成绩位于该区间的概率，在高一、高二年级学生中各选出 1 名学生，记这 2 名学生中成绩优秀的人数为 ξ ，求随机变量 ξ 的分布列；
- 在高一、高二年级各随机选取 1 名学生，用 X, Y 分别表示所选高一、高二年级学生成绩优秀的人数，写出方差 DX, DY 的大小关系。（只需写出结论）

19. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 \ln x (a \in R)$ 。

- 求函数 $f(x)$ 的单调区间；
- 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

20. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ 。设 l 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0 \in [-1, 1]$ 。

- 求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；
- 求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；
- 设直线 $y = a$ 分别与曲线 $y = f(x)$ 和射线 $y = x - 1 (x \in [0, +\infty))$ 交于 M, N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值。

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gaokzx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。