人大附中2022~2023学年度第二学期高二年级数学期中练习

2023年4月25日

制卷人：战景林　　审卷人：梁丽平

说明：本试卷六道大题，26道小题，共6页，满分150分，考试时间120分钟；请在密封线内填写个人信息.

I卷（共18题，满分100分）

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

1．数列$-1,3,-7,15,\cdots$的一个通项公式可以是（　）

A．$a_n=(-1)^n\cdot(2^n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$　　B．$a_n=(-1)^n\cdot(2n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$

C．$a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2^n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$　　D．$a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$

2．设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_4+a_5=12$，则S_8的值为(　)

A. 14　　B. 28　　C. 36　　D. 48

3．下列求导运算正确的是（　）

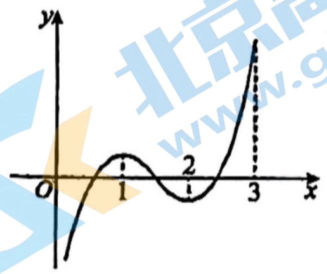
A．$\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)'=\cos\frac{\pi}{3}$　　B．$(1+e^x)'=1+e^x$

C．$\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{x\sin x-\cos x}{x^2}$　　D．$(2e^x)'=2e^x$

4．在曲线$f(x)=x^2+1$的图象上取一点$(1,2)$及邻近一点$(1+\Delta x,2+\Delta y)$，则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$为（　）

A．$\Delta x+\frac{1}{\Delta x}+2$　　B．2　　C．$\Delta x+2$　　D．$\Delta x-\frac{1}{\Delta x}+2$

5．已知定义在$[0,3]$上的函数$f(x)$的图象如图，则不等式$f'(x)<0$的解集为（　）



A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(0,1)\cup(2,3)$

6. 在等差数列$\{a_n\}$中，“$a_2+a_5=a_3+a_m$”是“$m=4$”的（　）

A. 必要不充分条件　　　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

7. 若函数$f(x)=kx-\ln x$在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，则$k$的取值范围为（　）

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $[4,+\infty)$

8. 在数列$\{a_n\}$中，它的前 n 项和为$S_n=2^n+p$（p为常数），若$\{a_n\}$是以q为公比的等比数列，则$p+q=$（　）

A. 0　　B. 1　　D. 4

9. 小红在手工课上设计了一个剪纸图案，她先在一个半径为r的圆纸片上画一个内接正方形，再画该正方形的内切圆，依次重复以上画法，得到了一幅由 6 个圆和 6 个正方形构成的图案，依次剪去夹在正方形及其内切圆之间的部分，并剪去最小正方形内的部分，得到如图所示的一幅剪纸，则该图案（阴影部分）的面积为(　)

A. $(\pi-2)r^2$　　B. $\frac{31}{16}(\pi-2)r^2$　　C. $\frac{63}{32}(\pi-2)r^2$　　D. $\frac{127}{64}(\pi-2)r^2$

10. 已知e为自然对数的底数，函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f'(x)<-f(x)$成立，则（　）

A. $\frac{f(0)}{e}>f(1)>ef(2)$　　B. $f(1)>ef(2)>\frac{f(0)}{e}$

C. $ef(2)>f(1)>\frac{f(0)}{e}$　　D. $ef(2)>\frac{f(0)}{e}>f(1)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．请把结果填在答题纸上的相应位置.）

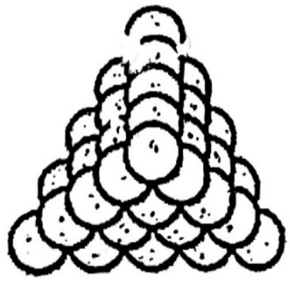
11．曲线 $f(x)=x^3+2x^2-\frac{1}{2}\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为________

12．函数 $f(x)=(x-2)e^x$ 的零点个数为________，其极值点是________

13．公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_3 是 a_2 与 a_6 的等比中项，则 $\frac{S_3}{a_3}=$

____

14．南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法》中有如下俯视图所示的几何体，后人称之为"三角垛"．其最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，…，则第九层球的个数为________



15．关于函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x^2$，

①$f(x)$ 无最小值，无最大值；

②函数 $y=f(x)-2x$ 有且只有 1 个零点；

③存在实数 k，使得 $f(x)>kx$ 恒成立；

④对任意两个正实数 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>2$.

其中所有正确的结论序号是________

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

16. （本小题 8 分）

在①$a_8=9$,②$S_5=20$,③$a_2+a_9=13$这三个条件中选择两个,补充在下面问题中,并进行解答.已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$n\in\mathbf{N}^*$,______,______.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

注:如果选择多组条件分别解答,按第一个解答计分.

17.（本小题 12 分）

已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx$在$x=\pm1$处取得极值.

(1)求$f(x)$的解析式;

(2)求$f(x)$在$[-2,1]$上的最值.

18. （本小题 15 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{ae^x}{x}-\dfrac{1}{x}-\ln x(a\in\mathbf{R})$,

（1）当$a=0$时，求曲线$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

（2）当$a>0$时，求$f(x)$的单调区间;

（3）若对$\forall x>1,f(x)\le1-x-\dfrac{1}{x}$恒成立，求$a$的取值范围.

II卷 （共8道题，满分50分）

四．选择题（共3小题，每小题5分，共15分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置．）

19．在二项式$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中，含$x^2$项的二项式系数为（　　）

A．15　　　B．-15　　　C．10　　　D．-10

20．已知函数$f(x)=(x-1)e^x-kx^3+1$，若对任意的$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，都有$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$，则实数$k$的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\dfrac{e}{3}\right]$　　　B．$\left(-\infty,\dfrac{e}{3}\right]$　　　C．$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　　D．$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$

21．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$2^{a_n}-2^{a_{n+1}}=\left(2^{a_n}-1\right)\left(2^{a_{n+1}}-1\right),n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*$，记数列$\{a_n\}$前$n$项和为$S_n$，则(　)

A．$7<S_{2023}<8$　　　B．$8<S_{2023}<9$　　　C．$9<S_{2023}<10$　　　D．$10<S_{2023}<11$

五．填空题（共4小题，每小题5分，共20分，请把结果填在答题纸上的相应位置．）

22．$(1+ax)^5$的展开式各项系数的和是-1，则$a=$__________.

23．二进制数是用0和1表示的数，它的基数为2，进位规则是“逢二进一”，借位规则是“借一当二”，二制数$(a_0a_1a_2\dots a_k)_2(k\in\mathbf{N}^*)$对应的十进制数记为$m_k$，即$m_k=a_0\times2^k+a_1\times2^{k-1}+\dots+a_{k-1}\times2+a_k\times2^0$，其中$a_0=1$，$a_i\in\{0,1\}(i=1,2,3,\cdots,k)$，则在$a_0$，$a_1$，$a_2$，…$a_5$中恰好有2个0的所有二进制数$(a_0a_1\dots a_5)_2$对应的十进制数的总和为__________（用数字作答）

将五个数20、23、2、0、3任意次序排成一行，拼成一个7位数，则能产生不同的7位数的个数是__________（用数字作答）

25．已知函数$f(x)=x^2e^{ax}-1$与x轴有两个交点，则实数a的取值范围为______.

六．解答题（本小题15分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

26.（本小题15分）

已知数列$\{a_n\}$，若对任意的$n, m\in \mathbf{N}^*$，$n\neq m$，存在正数k使得$|a_n-a_m|\leqslant k|n-m|$，则称数列$\{a_n\}$具有守恒性质，其中最小的$k$称为数列$\{a_n\}$的守恒数，记为$p$.

（1）若数列$\{a_n\}$是等差数列且公差为$d(d\neq 0)$，前n项和记为S_n.

①证明：数列$\{a_n\}$具有守恒性质，并求出其守恒数p.

②数列$\{S_n\}$是否具有守恒性质？并说明理由.

（2）若首项为1且公比不为1的正项等比数列$\{a_n\}$具有守恒性质，且$p=\dfrac{1}{2}$，求公比q值的集合.

人大附中 2022~2023 学年度第二学期高二年级数学期中练习答案

参考答案和评分标准 2023.4.25

一、选择题（本大题共 **10** 小题，每小题 4 分，共 **40** 分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	D	C	B	A	B	B	C	A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

题号	11	12	13	14	15
答案	$13x-2y-7=0$	1 个，$x=1$	1	45	①④

【注：12 题第一空 3 分，第二空 2 分；15 题少选得 2 分，错选不得分.】

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分.）

16.解：

（1）由于$\{a_n\}$是等差数列,设公差为d，

当选①②时:$\begin{cases}a_8=a_1+7d=9\\S_5=5a_1+10d=20\end{cases}$,解得$\begin{cases}a_1=2\\d=1\end{cases}$,……………………………………………2 分

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2+(n-1)\times1=n+1,n\in\mathbf{N}^*$……………………………………4 分

选①③时:$\begin{cases}a_8=a_1+7d=9\\a_2+a_9=2a_1+9d=13\end{cases}$,解得$\begin{cases}a_1=2\\d=1\end{cases}$,

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2+(n-1)\times1=n+1,n\in\mathbf{N}^*$.

选②③时:$\begin{cases}S_5=5a_1+10d=20\\a_2+a_9=2a_1+9d=13\end{cases}$,解得$\begin{cases}a_1=2\\d=1\end{cases}$,

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2+(n-1)\times1=n+1,n\in\mathbf{N}^*$.

（2）由(1)知,$a_n=n+1,n\in\mathbf{N}^*$,

所以$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$,……………………………………………6 分

所以$T_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{2(n+2)}$……………………8 分

17.解:

（1） $f'(x)=3x^2+2ax+b$， ……………………………………………………………1 分

依题意得 $f'(1)=f'(-1)=0$，

即 $\begin{cases}3+2a+b=0;\\3-2a+b=0;\end{cases}$ ……………………………………………………………………2 分

解得 $a=0$， $b=-3$.

所以 $f(x)=x^3-3x$， …………………………………………………………………3 分

经检验， $f(x)=x^3-3x$ 满足题意. ……………………………………………………4 分

（2） $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

令 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>1$; 令 $f'(x)<0$，得 $-1<x<1$. ……………………6 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间是 $(-1,1)$；

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

……………………………………………………………………………………………8 分

可知 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增，在 $[-1,\ 1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{max}=f(-1)=2$

又 $f(1)=-2$， $f(-2)=-2$，

所以 $f(x)_{min}=-2$. …………………………………………………………………12 分

18.解:

（1） 当$a=0$时，$f\left(x\right)=-\frac{1}{x}-\ln x$，

$f'\left(x\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$，斜率为 0，$f\left(1\right)=-1$

所以切线方程为$y=-1$……………………………………………………………4 分

（2）$f\left(x\right)=\frac{ae^x}{x}-\frac{1}{x}-\ln x\left(a>0\right)$ ，$f'\left(x\right)=\frac{\left(ae^x-1\right)\left(x-1\right)}{x^2}$

由$f'\left(x\right)=0$，得$x_1=1$，$x_2=-\ln a$ ……………………………………………………6 分

当$a=\frac{1}{e}$时，$f'(x)\geq 0$，$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，…………………………7 分

当$0<a<\frac{1}{e}$时，$x_2>x_1$，

令$f'(x)>0$，得$0<x<1,x>-\ln a$，$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right),\left(-\ln a,+\infty\right)$上单调递增，

令$f'(x)<0$，得$1<x<-\ln a$，$f\left(x\right)$在$\left(1,-\ln a\right)$上单调递减，……………8 分

当$a>\frac{1}{e}$时，

若$x_2=-\ln a\leq 0$，即$a\geq 1$，令$f'(x)>0$，得$x>1$，$f\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

令$f'(x)<0$，得$x<1$，$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，

若$x_2>0$，即$\frac{1}{e}<a<1$，令$f'(x)>0$，得$0<x<-\ln a,x>1$，

$f\left(x\right)$在$\left(0,-\ln a\right),\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

令$f'(x)<0$，得$-\ln a<x<1$，

$f\left(x\right)$在$\left(-\ln a,1\right)$上单调递减，…………10 分

（3）由$f(x)\leqslant 1-x-\frac{1}{x}$可转化为$a\leqslant\frac{(\ln x-x+1)x}{e^x}$，……………………………11 分

令$h(x)=\frac{(\ln x-x+1)x}{e^x}$，$h'(x)=\frac{(1-x)(\ln x-x+2)}{e^x}$，……………………………12 分

令 $\varphi(x)=\ln x-x+2$，$\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x}<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $\varphi(e)=3-e>0$，$\varphi(e^2)=4-e^2<0$，

所以 $x>1$ 时，$\varphi(x)$ 在 (e,e^2) 内存在唯一零点 x_0，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0+\infty)$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{x_0(\ln x_0-x_0+1)}{e^{x_0}}$.

因为 $\varphi(x_0)=\ln x_0-x_0+2=0$，所以 $x_0=e^{x_0-2}$，……………………………………………13 分

所以 $h(x_0)=\dfrac{-x_0}{e^{x_0}}=-\dfrac{e^{x_0-2}}{e^{x_0}}=-e^2$，所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=-e^{-2}$，即 $a\leqslant -e^{-2}$.…………14 分

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-e^{-2}]$ ……………………………………………………………15 分

第 II 卷（共 8 道题，满分 50 分）

一、 选择题（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

题号	19	20	21
答案	A	B	D

二、 填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

题号	22	23	24	25
答案	-2	506	75	$\pm\dfrac{2}{e}$或0

三、解答题（本小题 15 分.）

26.（本小题 15 分）

解：(1) ①因为$\{a_n\}$是等差数列且公差为 d，所以 $a_n=a_1+(n-1)d$，

所以对任意 n，$m\in N^*$，$n\neq m$，

$|a_n-a_m|=|[a_1+(n-1)d]-[a_1+(m-1)d]|$

$=|(n-m)d|\leqslant|d||n-m|$ 恒成立，

所以数列$\{a_n\}$具有守恒性质，且守恒数 $p=|d|$；……………………………………2 分

②假设数列$\{S_n\}$具有守恒性质，因为 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$，所以存在实数 $k>0$，

$|S_n-S_m|$

$=|\dfrac{d}{2}(n^2-m^2)+(a_1-\dfrac{d}{2})(n-m)|\leqslant k|n-m|$

$\Rightarrow k\geqslant|\dfrac{d}{2}(n+m)+(a_1-\dfrac{d}{2})|$.

若 $d>0$，则当 $n+m>\dfrac{2(k-a_1+\dfrac{d}{2})}{d}$ 时，$|\dfrac{d}{2}(n+m)+(a_1-\dfrac{d}{2})|>k$，矛盾；

若 $d<0$，则当 $n+m<\dfrac{2(k-a_1+\dfrac{d}{2})}{d}$ 时，$|\dfrac{d}{2}(n+m)+(a_1-\dfrac{d}{2})|>k$，矛盾.

所以数列$\{S_n\}$不具有守恒性质；……………………………………………………………6 分

(2) 显然 $q>0$ 且 $q\neq1$，因为 $a_1=1$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=q^{n-1}$.

因为数列$\{a_n\}$具有守恒性质，

所以对任意 n，$m\in N^*$，$n\neq m$，存在正数 k 使得$|a_n-a_m|\leqslant k|n-m|$，

即存在正数 k，$|q^{n-1}-q^{m-1}|\leqslant k|n-m|$ 对任意 n，$m\in N^*$，$n\neq m$ 都成立. ………7 分

(i) 若 $q>1$，等比数列$\{a_n\}$递增，不妨设 $n>m$，则 $q^{n-1}-q^{m-1}\leqslant k(n-m)$，

即 $q^{n-1}-kn\leqslant q^{m-1}-km$，(*)

设 $b_n=q^{n-1}-kn$，由 (*) 式中的 m，n 任意性可知，数列$\{b_n\}$不递增，

所以 $b_{n+1}-b_n=q^{n-1}(q-1)-k\leqslant0$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立.

而当$n>1+\log_q\dfrac{k}{q-1}$，

$b_{n+1}-b_n=q^{n-1}(q-1)-k>q^{1+\log_q\frac{k}{q-1}-1}(q-1)-k=0$，

所以$q>1$不符题意.……………………………………………………………………………11 分

(ii) 若$0<q<1$，则数列{ a_n }单调递减，不妨设$n>m$，则$q^{m-1}-q^{n-1}\leqslant k(n-m)$，

即$q^{m-1}+km\leqslant q^{n-1}+kn$，(**)

设$c_n=q^{n-1}+kn$，由(**)式中的m，n任意性可知，数列$\{c_n\}$不递减，

所以$c_{n+1}-c_n=q^{n-1}(q-1)+k\geqslant 0$对任意$n\in N^*$恒成立，

所以$k\geqslant q^{n-1}(1-q)$对任意$n\in N^*$恒成立，

显然，当$0<q<1$，$n\in N^*$时，$f(n)=q^{n-1}(1-q)$单调递减，

所以当$n=1$时，$f(n)=q^{n-1}(1-q)$取得最大值$f(1)=1-q$，

所以$k\geqslant 1-q$.

又$p=\dfrac{1}{2}$，故$1-q=\dfrac{1}{2}$，即$q=\dfrac{1}{2}$.

综上所述，公比q的取值集合为$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$……………………………………………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。