参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

1. 【答案】C

【分析】本题考查全称命题的否定，注意量词的转化.

【详解】全称命题的否定为特称命题，$\forall x>0$ 改为 $\exists x>0$，$x^2+1\geq 1$ 改为 $x^2+1<1$，

故选：C

2. 【答案】B

【分析】

利用交集的定义可求得集合 $A\cap B$.

【详解】$\because A=\{x|1<x<5\}$，$B=\{y|0<y<3\}$，因此，$A\cap B=\{x|1<x<3\}$.

故选：B.

3. 【答案】D

【分析】对于 ABC，举例判断，

【详解】对于 AB，若 $a=-1,b=-2,c=2,d=1$，则 $ac=-2=bd$，所以 AB 错误，

对于 C，若 $a=2,b=1,c=2,d=\frac{1}{2}$，则 $\frac{a}{c}=\frac{2}{2}<\frac{b}{d}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$，所以 C 错误，

故选：D

4. 【答案】D

【分析】根据奇偶函数的定义及单调性的定义逐项判断即可.

【详解】对于 A，对于 $y=f(x)=x+1$，$f(-x)=1-x\neq f(x)$，且 $f(-x)=1-x\neq -f(x)$，

故函数 $y=x+1$ 是非奇非偶函数，不满足题意；

对于 B，函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$，满足 $f(-x)=-f(x)$ 是奇函数，但在定义域内不具有单调性，不满足条件；

对于 C，函数的定义域为 $[-1,2]$，不具有对称性，故不具有奇偶性，不满足题意；

对于 D，对于函数 $y=f(x)=-x|x|$，定义域为 R，满足 $f(-x)=-f(x)$，是奇函数，

当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

又当 $x=0$ 时，$-x^2=x^2$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递减，满足题意.

故选：D.

5. 【答案】C

【详解】分析：要判断函数 f（x）=x3+3x-3 的零点的位置，我们可以根据零点存在定理，则该区间两端点对应的函数值，应异号，将四个答案中各区间的端点依次代入函数的解析式，易判断零点的位置.

解答：解：∵f（-1）=-7

f（0）=-3

f（1）=1

f（2）=11

f（3）=33

根据零点存在定理，∵f（0）f（1）<0

故[0，1]存在零点

故选 C

点评：要判断函数的零点位于哪个区间，可以根据零点存在定理，即如果函数 f（x）在区间（a，b）上存在一个零点，则 f（a）?f（b）<0，如果方程在某区间上有且只有一个根，可根据函数的零点存在定理进行解答，但要注意该定理只适用于开区间的情况，如果已知条件是闭区间或是半开半闭区间，我们要分类讨论.

6. 【答案】C

【分析】首先对a进行分类讨论，然后分别将其代入对应的解析式中即可求解a的值

【详解】当$a<1$时，得：$0=1$，不符合题意，故舍去；

当$1\le a<2$时，得：$a+1=1$，解得：$a=0$，不符合范围条件，故舍去；

当$a\ge 2$时，得：$-a^2+5=1$，解得：$a=2$或$a=-2$，

由于$a\ge 2$，故得：$a=2$.

故选：C

7. 【答案】C

【分析】根据分段函数具有单调性的条件列出不等式组，解出即可.

【详解】因为函数$f(x)=\begin{cases}(2-3a)x+1, x\le 1\\ \dfrac{1}{x}-1, x>1\end{cases}$是 R 上的减函数，

所以$\begin{cases}2-3a<0\\ 3-3a\ge 0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{2}{3}<a\le 1$，

故选： C.

8. 【答案】A

【分析】由题设易知奇函数$f(x)$在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$上递增，结合$f(3)=-f(-3)=0$且$\begin{cases}x>0\\ f(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\ f(x)<0\end{cases}$，即可求解集.

【详解】由题设$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增，又$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上递增，而$f(3)=0$，则$f(-3)=0$，

由 $xf(x)>0$，有 $\begin{cases}x>0\\f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\f(x)<0\end{cases}$，则 $x>3$ 或 $x<-3$，

所以不等式解集为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

故选：A

9.【答案】A

【分析】设 A，B，C，D 四名同学的阅读量分别为 a,b,c,d，根据题意可得 $\begin{cases}a+c=b+d\\a+b>c+d\\d>b+c\end{cases}$，由此能求出这四名同学按阅读量从大到小的顺序排列.

【详解】设 A，B，C，D 四名同学的阅读量分别为 a,b,c,d，

根据题意可得 $\begin{cases}a+c=b+d & (1)\\a+b>c+d & (2)\\d>b+c & (3)\end{cases}$，

(2) 式左边减去 $a+c$，右边减去 $b+d$ 可得 $b>c$；

故结合 (1) 式，得 $a>d$；

再结合 (3) 式，得 $a>d>b>c$，

所以这四名同学按阅读量从大到小的顺序排列为 $A>D>B>C$，

故选：A.

10.【答案】C

【分析】根据取整函数的定义得，$x-1<[x]\le x\le[x]+1$，再利用不等式的性质即可判断各命题的真假.

【详解】对于 A，取 $x=0$，则 $[x]+1=1$，显然满足 $x\le[x]+1$，故 A 是真命题；

对于 C，当 x 为整数时，$y=0$，

当 x 不为整数时，$y=x-[x]<1$，且 $y>0$，故 $y\in[0,1)$，故 C 是假命题；

对于 B，因为 $0\le x-[x]<1$，记 $\{x\}=x-[x]$，则 $[x]=x-\{x\}$，$0\le\{x\}<1$，

当 $0\le\{x\}+\{y\}<1$ 时，$\{x\}+\{y\}=\{x+y\}$，

则 $[x]+[y]=x-\{x\}+y-\{y\}=x+y-\{x+y\}=[x+y]$；

当 $1\le\{x\}+\{y\}<2$ 时，$1\le x-[x]+y-[y]<2$，

所以 $x+y-2<[x]+[y]\le x+y-1<[x+y]$；

综上：$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$[x]+[y]\le[x+y]$，故 B 是真命题；

对于 D，若 $\exists t\in\mathbf{R}$，使得 $[t^3]=1,[t^4]=2,[t^5]=3,\cdots,[t^n]=n-2$ 同时成立，

则 $1\le t<\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[4]{2}\le t<\sqrt[4]{3}$，$\sqrt[5]{3}\le t<\sqrt[5]{4}$，$\sqrt[6]{4}\le t<\sqrt[6]{5}$，$\cdots$，$\sqrt[n]{n-2}\le t<\sqrt[n]{n-1}$，

因为$\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{2}$，若$n\geq 6$，则不存在t同时满足$1\leq t<\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[6]{4}\leq t<\sqrt[6]{5}$.

只有$n\leq 5$时，存在$t\in[\sqrt[5]{3},\sqrt[3]{2})$满足题意，故D是真命题，

故选：C.

二、填空题（本大题共5小题，每题5分，共25分）

11.【答案】$(0,\frac{1}{2}]$

【详解】$\because x^2+2\geq 2,\therefore 0<\frac{1}{x^2+2}\leq\frac{1}{2}$

$\therefore$函数$y=\frac{1}{x^2+2}$的值域为$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

12.【答案】 ①. -5 ②. $-9x-5$

【分析】由$f(0)=f(2-2)$结合解析式求函数值，应用换元法求$f(x)$解析式.

【详解】由$f(0)=f(2-2)=-9\times 2+13=-5$，

令$t=x-2\Rightarrow x=t+2$，则$f(x-2)=f(t)=-9(t+2)+13=-9t-5$，

所以$f(x)=-9x-5$，且定义域为R.

故答案为：-5；$-9x-5$

13.【答案】$(0,1)$

【分析】利用判别式与韦达定理得到关于m的不等式组，从而得解.

【详解】因为$\frac{1}{4}x^2+(m-2)x+m=0$有两个不相等的正根，即$x^2+4(m-2)x+4m=0$有两个不相等的正根，

所以$\begin{cases}\Delta=16(m-2)^2-4\times 4m>0\\ -4(m-2)>0\\ 4m>0\end{cases}$，解得$0<m<1$.

故答案为：$(0,1)$.

14.【答案】 ①. $(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$ ②. $(-\infty,-3]$##$(-\infty,-3)$

【分析】根据偶次方根的被开方数为非负数列不等式，由此求得$f(x)$的定义域，结合二次函数的性质求得$f(x)$的单调递减区间.

【详解】由$x^2-x-12=(x-4)(x+3)\geq 0$解得$x\leq -3$或$x\geq 4$，

所以$f(x)$的定义域是$(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$.

二次函数 $y=x^2-x-12$ 的开口向上，对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-3]$.

故答案为：$(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$；$(-\infty,-3]$

15.【答案】$(-2,-1]\cup(1,2]$

【分析】根据定义运算法则化简 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)$，画出 $f(x)$ 的图像，结合图像可求出 c 的取值范围

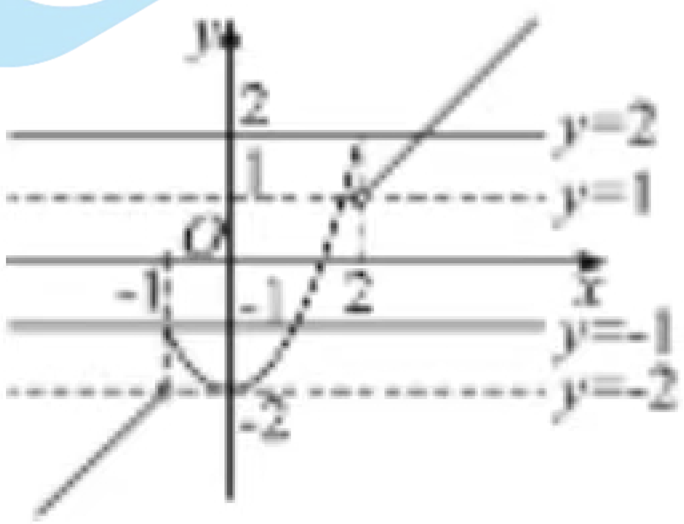
【详解】因为 $a\otimes b=\begin{cases}a, & a-b\le 1,\\ b, & a-b>1.\end{cases}$，

所以 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)=\begin{cases}x^2-2, -1\le x\le 2\\ x-1, x<-1 或 x>2\end{cases}$

由图可知，当 $-2<c\le -1$ 或 $1<c\le 2$ 时，函数 $f(x)$ 与 $y=c$ 的图象有两个公共点，

$\therefore c$ 的取值范围是 $(-2,-1]\cup(1,2]$.

故答案为：$(-2,-1]\cup(1,2]$



三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16.【答案】(1) $\{x\mid -1-\sqrt{6}<x<-1+\sqrt{6}\}$

(2) $\{x\mid \dfrac{8}{5}<x<2\}$

(3) $\{x\mid -5\le x<-\dfrac{1}{2}\}$

【分析】(1) 原不等式化为 $x^2+2x-5<0$，求解即可；

(2) 原不等式化为 $-1<5x-9<1$ 求解即可；

(3) 原不等式化为 $\begin{cases}(x+5)(2x+1)\le 0\\ 2x+1\ne 0\end{cases}$，求解即可.

【小问 1 详解】

不等式 $-x^2-2x+3>-2$ 可化为

$x^2+2x-5<0$，

又 $x^2+2x-5=0$，解得 $x=-1\pm\sqrt{6}$，

故不等式的解集为 $\{x\,|\,-1-\sqrt{6}<x<-1+\sqrt{6}\}$；

【小问 2 详解】

$$|5x-9|<1 \Leftrightarrow -1<5x-9<1 \Leftrightarrow \frac{8}{5}<x<2$$

故不等式的解集为 $\{x\,|\,\frac{8}{5}<x<2\}$；

【小问 3 详解】

$$\frac{5x-2}{2x+1}\geq 3 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{2x+1}-3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-2-3(2x+1)}{2x+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-5}{2x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+1}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+5)(2x+1)\leq 0\\ 2x+1\neq 0\end{cases},$$

解得 $-5\leq x<-\frac{1}{2}$，

故不等式的解集为 $\{x\,|\,-5\leq x<-\frac{1}{2}\}$

17. 【答案】17. 函数 $f(x)$ 为定义域 R 上的偶函数；证明见解析

18. $f(x)+f(\frac{1}{x})=1$； $\frac{7}{2}$.

【分析】（1）根据函数奇偶性的定义及判定方法，即可求解；

（2）根据 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，求得 $f(x)+f(\frac{1}{x})=1$，即可求解.

【小问 1 详解】

解：函数 $f(x)$ 为定义域 R 上的偶函数.

证明如下：

由函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，关于原点对称，

又由 $f(-x)=\frac{(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为定义域 R 上的偶函数.

【小问 2 详解】

解：由 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，可得 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=1$，

则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{4})$

$=f(1)+\left[f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right]=f(1)+1+1+1=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$.

18. 【答案】（1） $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}(0\le x<4)$

（2） $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}(-4<x<0)$

（3）图象见解析；$(-3,0),(3,4)$

【分析】（1）先判断 $f(x)$ 的函数类型，再利用待定系数法即可得解；

（2）结合（1）中结论，利用函数奇偶性即可求得 $f(x)$ 在 $(-4,0)$ 上的解析式，从而得解；

（3）由（1）（2）得到 $f(x)$ 在 $(-4,4)$ 上的解析式，从而作出图象，结合图象即可得解.

【小问 1 详解】

因为当 $0\le x<4$ 时，$f(x)$ 的图象是过点 $A\ 1,0$ 的抛物线的一部分，且在 $x=3$ 时取得最小值 $y=-2$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,4)$ 上是一元二次函数，不妨设为 $f(x)=a(x-3)^2-2(a>0)$，

所以 $f(1)=a(1-3)^2-2=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2-2=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}(0\le x<4)$；

【小问 2 详解】

当 $-4<x<0$ 时，$0<-x<4$，

所以 $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2-3(-x)+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$，

因为 $f(x)$ 为定义在 $(-4,4)$ 上的偶函数；

所以 $f(x)=f(-x)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}(-4<x<0)$，

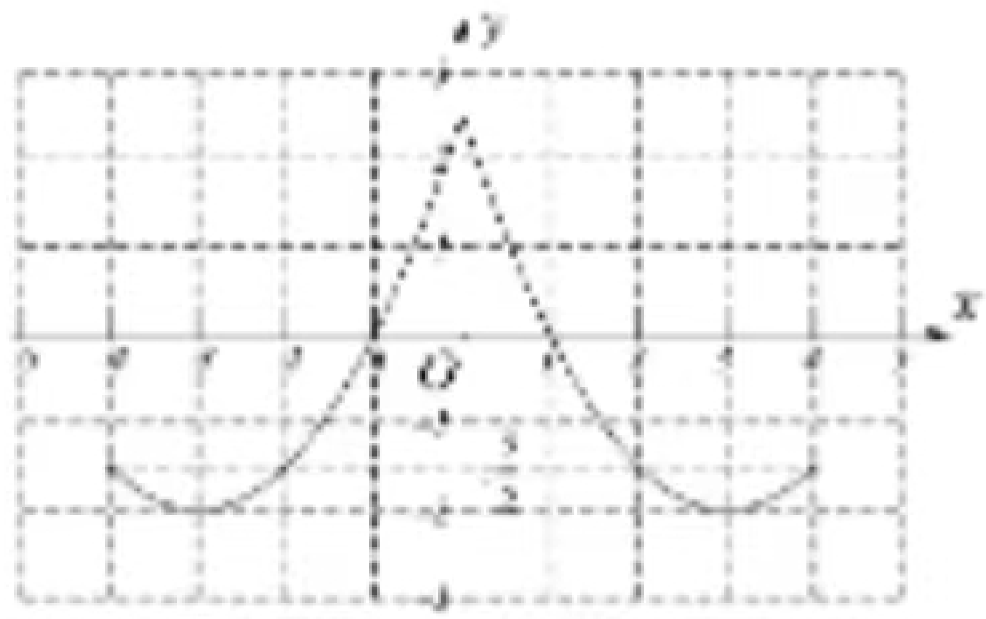
【小问 3 详解】

由（1）（2）可得，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2},0\le x<4\\ \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2},-4<x<0\end{cases}$，

所以 $f(-4)=\frac{1}{2}\times(-4)^2+3\times(-4)+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$，$f(4)=\frac{1}{2}\times4^2-3\times4+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$，

$f(-3)=\frac{1}{2}\times(-3)^2+3\times(-3)+\frac{5}{2}=-2$，$f(3)=-2$，

从而作出 $f(x)$ 的图象如图，



所以结合图象，可得 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-3,0),(3,4)$.

19.【答案】（1）$L(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^2+4x-2,0<x<8\\ 36-\left(x+\dfrac{100}{x}\right),x\geq 8\end{cases}$

（2）年产量为 10 万件时，所获利润最大，最大利润是 16 万元.

【分析】（1）根据题意分 $0<x<8$ 和 $x\geq 8$ 求出利润，得利润的分段函数；

（2）分别利用二次函数及基本不等式求最值，比较大小可得函数的最大值.

【小问 1 详解】

因为每件产品售价为 5 元，则 x（万件）商品销售收入为 $5x$ 万元，依题意当 $0<x<8$ 时，

$L(x)=5x-\left(\dfrac{1}{3}x^2+x\right)-2=-\dfrac{1}{3}x^2+4x-2$；

当 $x\geq 8$ 时，$L(x)=5x-\left(6x+\dfrac{100}{x}-38\right)-2=36-\left(x+\dfrac{100}{x}\right)$.

所以 $L(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^2+4x-2,0<x<8\\ 36-\left(x+\dfrac{100}{x}\right),x\geq 8\end{cases}$.

【小问 2 详解】

当 $0<x<8$ 时，$L(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+4x-2=-\dfrac{1}{3}(x-6)^2+10$，

此时，当 $x=6$ 时，$L(x)$ 取得最大值 10；

当 $x\geq 8$ 时，$L(x)=36-\left(x+\dfrac{100}{x}\right)\leq 36-2\sqrt{x\times\dfrac{100}{x}}=16$，

此时，当且仅当 $x=\dfrac{100}{x}$，即 $x=10$ 时，$L(x)$ 取得最大值 16.

因为 $10<16$，所以年产量为 10 万件时，小王在这一商品的生产中所获利润最大，最大利润是 16 万元.

20.【答案】(1) $a=-3$

(2) 证明见解析　(3) $(0,\frac{1}{3}]\cup\{\frac{3}{8}\}$

【分析】(1) 由已知，建立关于a的方程，解出即可；

(2) 将$a=2$代入，利用取值，作差，变形，判号，作结论的步骤证明即可；

(3) 问题转化为$h(x)=2x^2-3x+3a$在$(0,1)$上有唯一零点，由二次函数的零点分布问题解决.

【小问1详解】

由$2f$ (1) $=-f(-1)$得，$\frac{4}{1-a}=-\frac{-2}{-1-a}$，解得$a=-3$；

【小问2详解】

当$a=2$时，$f(x)=\frac{2x}{x-2}$，设x_1，$x_2\in(2,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1}{x_1-2}-\frac{2x_2}{x_2-2}=\frac{4(x_2-x_1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

$\because x_1$，$x_2\in(2,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

$\therefore x_2-x_1>0$，$(x_1-2)(x_2-2)>0$，

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减；

【小问3详解】

$g(x)=x\cdot\frac{2x}{x-a}-3=\frac{2x^2-3x+3a}{x-a}$，

若函数$g(x)$在$(0,1)$上有唯一零点，即$h(x)=2x^2-3x+3a$在$(0,1)$上有唯一零点($x=a$不是函数$h(x)$的零点)，

且二次函数$h(x)=2x^2-3x+3a$的对称轴为$x=\frac{3}{4}$，

若函数$h(x)$在$(0,1)$上有唯一零点，依题意，

①当$h(0)h$ (1) <0时，$3a(3a-1)<0$，解得$0<a<\frac{1}{3}$；

②当$\triangle=0$时，$9-24a=0$，解得$a=\frac{3}{8}$，则方程$h(x)=0$的根为$x=\frac{3}{4}$，符合题意；

③当h (1) $=0$时，解得$a=\frac{1}{3}$，则此时$h(x)=2x^2-3x+1$的两个零点为$x_1=1,x_2=\frac{1}{2}$，

符合题意.

综上所述，实数a的取值范围为$(0,\frac{1}{3}]\cup\{\frac{3}{8}\}$.

21.【答案】(1) 证明见解析

（2）$\frac{8}{3}$，

（3）证明见解析

【分析】（1）（2）由新定义计算，

（3）由新定义与反证法证明，

【小问1详解】

由题意得 $S_2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$，

$A\in S_2,B\in S_2$，则 $d(A,B)$ 可能的值为 $0,1,2$，

【小问2详解】

设 $P=\{A,B,C,D\}$，4个元素中第1个位置共 t 个1，$4-t$ 个0，

当 $t=0$ 时，$s_1=|a_1-b_1|+|a_1-c_1|+|a_1-d_1|+|b_1-c_1|+|b_1-d_1|+|c_1-d_1|=0$，

当 $t=1$ 时，$s_1=|a_1-b_1|+|a_1-c_1|+|a_1-d_1|+|b_1-c_1|+|b_1-d_1|+|c_1-d_1|=3$，

当 $t=2$ 时，$s_1=|a_1-b_1|+|a_1-c_1|+|a_1-d_1|+|b_1-c_1|+|b_1-d_1|+|c_1-d_1|=4$，

当 $t=3$ 时，$s_1=|a_1-b_1|+|a_1-c_1|+|a_1-d_1|+|b_1-c_1|+|b_1-d_1|+|c_1-d_1|=3$，

当 $t=4$ 时，$s_1=|a_1-b_1|+|a_1-c_1|+|a_1-d_1|+|b_1-c_1|+|b_1-d_1|+|c_1-d_1|=0$，

若要使 $\bar{d}(P)$ 最大，则 $t=2$，同理得第2，3，4个位置各有2个1，2个0，

$\bar{d}(P)$ 的最大值为 $\frac{4\times4}{6}=\frac{8}{3}$，

【小问3详解】

①由题意得 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}$，$i=1,2,\cdots,n$，

若 $c_i=0$，则 $|a_i-c_i|=a_i$，$|b_i-c_i|=b_i$，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$，

若 $c_i=1$，则 $|a_i-c_i|=1-a_i$，$|b_i-c_i|=1-b_i$，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|b_i-a_i|=|a_i-b_i|$，

故 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$，

②由①可设 $d(A,B)=d(A-B,0)=k$，$d(B,C)=d(B-C,0)=m$，$d(A,C)=d(A-B,C-B)=n$，

则 $|A-B|$ 中有 k 个1，$|C-B|$ 中有 m 个1，

设 t 是使得 $|a_i-b_i|=|c_i-b_i|=1$ 成立的i的个数，

则 $n=k+m-2t$，

假设 k,m,n 均为奇数，则 $k+m-2t$ 为偶数，矛盾，故假设不成立，

故 $d(A,B)$、$d(B,C)$、$d(A,C)$ 三个数中至少有一个是偶数．

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！