北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期高三数学统练一

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A=\{0,-a\}$, $B=\{1,a-2,2a-2\}$, 若 $A\subseteq B$, 则 $a=$ (　　)

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) -1

【参考答案】(2023 高考全国 II 2) B

因为 $A\subseteq B$, 则有: 若 $a-2=0$, 解得 $a=2$, 此时 $A=\{0,-2\}$, $B=\{1,0,2\}$, 不符合题意; 若 $2a-2=0$, 解得 $a=1$, 此时 $A=\{0,-1\}$, $B=\{1,-1,0\}$, 符合题意. 综上所述, $a=1$.

2. 命题 "$\forall x\in\mathbf{R}$, $e^x>0$" 的否定为 (　　)

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$, $e^x\leqslant 0$　　(B) $\exists x\in\mathbf{R}$, $e^x<0$　　(C) $\forall x\in\mathbf{R}$, $e^x\leqslant 0$　　(D) $\forall x\in\mathbf{R}$, $e^x<0$

【参考答案】(2023 昌平高一上期末 2) A

3. $|2+i^2+2i^3|=$ (　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) 5

【参考答案】(2023 高考全国乙文 1) C

由题意可得 $2+i^2+2i^3=2-1-2i=1-2i$, 则 $|2+i^2+2i^3|=|1-2i|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

4. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$, 则 (　　)

(A) $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　(B) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　(D) $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

【参考答案】(2023 西城一模 5) A

5. "$ab>0$" 是 "$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$" 的 (　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

【参考答案】C

6. 已知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=2$, 一个周期为 4, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 (　　)

(A) $\sin(\frac{\pi}{2}x)$　　(B) $\cos(\frac{\pi}{2}x)$　　(C) $\sin(\frac{\pi}{4}x)$　　(D) $\cos(\frac{\pi}{4}x)$

【参考答案】(2023 高考天津 5) B

A 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$, B 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$, C 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$, D 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$, 排除选项 CD, 对于 A 选项, 当 $x=2$ 时, 函数值 $\sin(\frac{\pi}{2}\times 2)=0$, 故 $(2,0)$ 是函数的一个对称中心, 排除选项 A, 对于 B 选项, 当 $x=2$ 时, 函数值 $\cos(\frac{\pi}{2}\times 2)=-1$, 故 $x=2$ 是函数的一条对称轴.

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=9, a_8=-5$, 则当 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大时, n 的值为 (　　)

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

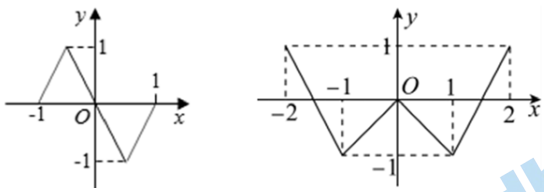
【参考答案】(2023 西城高二下期末 5) A

8. 某工厂产生的废气经过滤后排放, 过滤过程中废气的污染物含量 P (单位: mg/L) 与时间 t (单位: h) 间的关系为 $P=P_0e^{-kt}$. 其中 P_0, k 是正的常数. 如果在前 10 h 污染物减少 19%, 那么再过 5 h 后污染物还剩余 (　　)

(A) 40.5%　　(B) 54%　　(C) 65.6%　　(D) 72.9%

【参考答案】(2022 朝阳二模 10) D

9. 奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 的图象分别如图所示, 方程 $f(g(x))=0$, $g(f(x))=0$ 的实根个数分别为 a, b, 则 $a+b=$ (　　)



(A) 14　　(B) 10　　(C) 7　　(D) 3

【参考答案】B

10. 若非空实数集 X 中存在最大元素 M 和最小元素 m, 则记 $\Delta(X)=M-m$. 下列命题中正确的是 (　　)

(A) 已知 $X=\{-1,1\}$, $Y=\{0,b\}$, 且 $\Delta(X)=\Delta(Y)$, 则 $b=2$

(B) 已知 $X=[a,a+2]$, $Y=\{y\mid y=x^2, x\in X\}$, 则存在实数 a, 使得 $\Delta(Y)<1$

(C) 已知 $X=\{x\mid f(x)\geqslant g(x), x\in[-1,1]\}$, 若 $\Delta(X)=2$, 则对任意 $x\in[-1,1]$, 都有 $f(x)\geqslant g(x)$

(D) 已知 $X=[a,a+2]$, $Y=[b,b+3]$, 则对任意的实数 a, 总存在实数 b, 使得 $\Delta(X\cup Y)\leqslant 3$

【参考答案】(2021 西城一模 10) D

二、填空题共 5 小题。

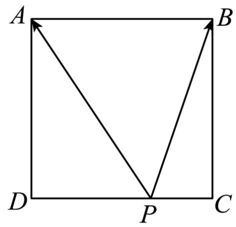
11. 函数 $f(x)=\lg(1-x)+\sqrt{x}$ 的定义域为 ________ .

【参考答案】$[0,1)$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $b=\sqrt{3}$, 且 $\sin B=\sqrt{3}\sin A$, $C=\frac{\pi}{6}$, 则 $a=$ ________ , $c=$ ________ .

【参考答案】1, 1.

13. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, P 为 CD 边上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ________ .



【参考答案】(2023 通州高一下期末 13) $[3,4]$.

以 D 为原点, DC, DA 所在直线分别为 x, y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $D(0,0)$, $A(0,2)$, $C(2,0)$, $B(2,2)$, 设 $P(x,0)$, 其中 $0\leqslant x\leqslant 2$, 则 $\overrightarrow{PA}=(-x,2)$, $\overrightarrow{PB}=(2-x,2)$, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-x)(2-x)+2\times 2=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$, 当 $x=1$ 时, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 有最小值 3, 当 $x=0$ 或 2 时, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 有最大值为 4, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[3,4]$.

14. 已知函数 $f(x)=\ln x$, 且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(1) $x_0=$ ________ ;

(2) 令 $g(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\leqslant a, \\ \frac{a}{x}, & x>a, \end{cases}$ 若函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{a}{\mathrm{e}}$ 有且只有一个公共点, 则实数 a 的取值范围是 ________ .

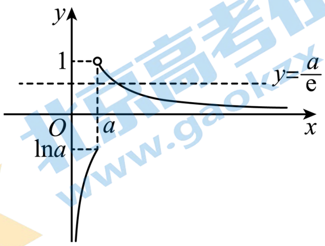
【参考答案】(2023 大兴高二下期末 15) e; $(0,\mathrm{e}]$.

因为 $f(x)=\ln x$, 所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$,

由 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 得 $f'(x)=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 所以 $x_0=\mathrm{e}$;

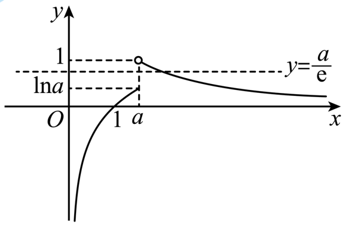
因为 $g(x)=\begin{cases} \ln x, & 0<x\leqslant a, \\ \frac{a}{x}, & x>a. \end{cases}$

①当 $0 < a \leqslant 1$ 时，函数 $g(x)$ 的图象如图所示.



要使得函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = -x$ 有且只有一个公共点，则 $\begin{cases} 0 < \dfrac{a}{e} < 1, \\ 0 < a \leqslant 1, \end{cases}$ 所以 $0 < a \leqslant 1$；

②当 $1 < a < e$ 时，函数 $g(x)$ 的图象如图所示.

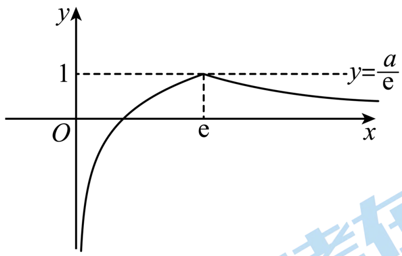


要使得函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = -x$ 有且只有一个公共点，则 $\begin{cases} 1 < a < e, \\ \ln a < \dfrac{a}{e} < 1, \end{cases}$

不妨令 $h(x) = \ln x - \dfrac{x}{e}$，当 $1 < x < e$，$h'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e - x}{ex} > 0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 单调递增，

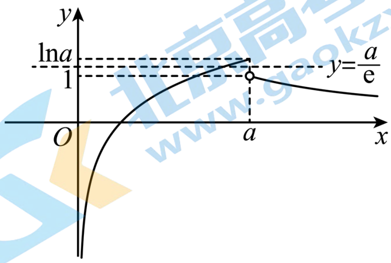
即 $h(x) < h(e) = 0$，所以 $\ln a < \dfrac{a}{e}$ 恒成立，故此时不等式解得 $1 < a < e$；

③当 $a = e$ 时，函数 $g(x)$ 的图象如图所示.



要使得函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = -x$ 有且只有一个公共点，则 $\begin{cases} a = e, \\ \dfrac{a}{e} = 1, \end{cases}$ 所以 $a = e$；

④当 $a > e$ 时，函数 $g(x)$ 的图象如图所示.



要使得函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = -x$ 有且只有一个公共点，则 $\begin{cases} a > e, \\ 1 < \dfrac{a}{e} < \ln a, \end{cases}$ 所以 $0 < a \leqslant 1$；

对于函数，$h(x) = \ln x - \dfrac{x}{e}$，当 $x > e$，$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e - x}{ex} < 0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 单调递减，即 $h(x) < h(e) = 0$，所以 $\ln a < \dfrac{a}{e}$ 恒成立，故此时不等式组无解.

综上，实数 a 的取值范围是 $(0, e]$.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n + S_n = kn + b$，其中 k, b 不同时为 0. 给出下列四个结论：

①当 $k = 0$ 时，$\{a_n\}$ 为等比数列；

②当 $k \neq 0$ 时，$\{a_n\}$ 一定不是等差数列；

③当 $k=b$ 时, $\{a_n\}$ 为常数列;

④当 $k>b$ 时, $\{a_n\}$ 是单调递增数列.

其中所有正确结论的序号是 ______ .

【参考答案】①③④.

三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足 $a_{n+1}=a_n+2$, $S_2=a_3$.

(1) 若 a_1, a_3, a_m 成等比数列, 求 m 的值;

(2) 设 $b_n=a_n-2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【参考答案】(2022 大兴高三上期中 (改编) 17)

(1) 因为 $a_{n+1}=a_n+2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 设公差为 d, 则 $d=2$.

又因为 $S_2=a_3$, 所以 $a_1+a_2=a_3$, 得 $a_1=d=2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n(n\in\mathbf{N}^*)$.

又因为 a_1,a_3,a_m 成等比数列, 所以 $a_3^2=a_1\times a_m$,

即 $36=2\times 2m$, 得 $m=9$.

(2) 因为 $b_n=2n-2^{2n}=2n-4^n$,

所以 $T_n=(2\times1-4^1)+(2\times2-4^2)+\cdots+(2\times n-4^n)$

$=2\times(1+2+\cdots+n)-(4^1+4^2+\cdots+4^n)$

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{4\times(1-4^n)}{1-4}=n(n+1)-\dfrac{4}{3}\times(4^n-1)=n^2+n+\dfrac{4}{3}-\dfrac{4^{n+1}}{3}$.

17. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π, 再从下列两个条件中选择一个作为已知条件:

条件①: $f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{\pi}{3},0)$ 对称;

条件②: $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 对称.

(1) 请写出你选择的条件, 并求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 在 (1) 的条件下, 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

【参考答案】(2022 东城高一上期末 18)

(1) 选条件①: 由已知, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$ $(\omega>0)$, 则 $\omega=2$,

则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $(\dfrac{\pi}{3},0)$ 对称.

则 $\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$, 即 $\varphi=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

由 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 知 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

选条件②: 由已知, $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\ (\omega>0)$, 则 $\omega=2$.

则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称.

则 $2\cdot\frac{\pi}{12}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$, 即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbf{Z})$.

由 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 知 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

(2) 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,

即 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}$, 即 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}]\ (k\in\mathbf{Z})$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $(2a-c)\cos B=b\cos C$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b=\sqrt{7}$, $a+c=4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【参考答案】(2023 石景山高一下期末 18)

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $(2a-c)\cos B=b\cos C$,

结合正弦定理得 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$,

所以 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,

所以 $2\sin A\cos B=\sin(B+C)$,

所以 $2\sin A\cos B=\sin A$,

因为 $A\in(0,\pi)$, 所以 $\sin A\neq 0$, 所以 $\cos B=\frac{1}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 若 $b=\sqrt{7}$, $a+c=4$,

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, 得 $7=(a+c)^2-2ac-ac$,

得 $7=16-3ac$, 得 $ac=3$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

19. 已知函数 $f(x)=x^2+(a-4)x-2a\ln x$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a=-1$ 时, 求证: $\forall\ x_1,x_2\in[1,4]$, 恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2+2\ln 2$.

【参考答案】(2023 通州高二下期中 20)

(1) 因为 $f(x)=x^2+(a-4)x-2a\ln x$, 定义域为 $(0,+\infty)$,

所以 $f'(x)=2x+(a-4)-\dfrac{2a}{x}=\dfrac{2x^2+(a-4)x-2a}{x}=\dfrac{(x-2)(2x+a)}{x}$.

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=2$, 或 $x=-\dfrac{a}{2}$.

①当 $-\dfrac{a}{2}=2$, 即 $a=-4$ 时, $f'(x)\geqslant 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

②当 $-\dfrac{a}{2}\leqslant 0$, 即 $a\geqslant 0$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减, 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

③当 $0<-\dfrac{a}{2}<2$, 即 $-4<a<0$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(0,-\frac{a}{2})$	$-\frac{a}{2}$	$(-\frac{a}{2},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,-\dfrac{a}{2})$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(-\dfrac{a}{2},2)$ 上单调递减.

④当 $-\dfrac{a}{2}>2$, 即 $a<-4$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(0,2)$	2	$(2,-\frac{a}{2})$	$-\frac{a}{2}$	$(-\frac{a}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 和 $(-\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(2,-\dfrac{a}{2})$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a\geq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(2,+\infty)$, 单调递减区间是 $(0,2)$;

当 $-4<a<0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,-\dfrac{a}{2})$ 和 $(2,+\infty)$, 单调递减区间是 $(-\dfrac{a}{2},2)$;

当 $a=-4$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$, 无递减区间;

当 $a<-4$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$ 和 $(-\dfrac{a}{2},+\infty)$, 单调递减区间是 $(2,-\dfrac{a}{2})$.

(2) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=x^2-5x+2\ln x$.

当 $x\in[1,4]$ 时, 由 (1) 知, $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减, 在区间 $(2,4)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上的最小值是 $f(2)=-6+2\ln 2$.

因为 $f(1)=-4$, $f(4)=-4+4\ln 2$.

所以 $f(1)<f(4)$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上的最大值是 $f(4)=-4+4\ln 2$.

所以 $\forall\, x_1,x_2\in[1,4]$, 恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant f(4)-f(2)=2+2\ln 2$.

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-ax-1\ (a\in\mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0, 则 $x_0<a-2$.

【参考答案】(2023 朝阳一模 19)

(1) 因为 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-ax-1(x\in\mathbf{R})$, 所以 $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-a$.

①若 $a\leqslant 0$, 则 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

②若 $a>0$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$.

当 $x\in(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2})$ 时, $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2})$ 上单调递减;

当 $x\in(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2},+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a\leqslant 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2})$, 单调递增区间为 $(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2},+\infty)$.

(2) ①若 $a\leqslant 2$, 当 $x>0$ 时, $2\mathrm{e}^{2x}>2$, $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-a>0$,

则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 所以 $f(x)>f(0)=0$.

所以 $a\leqslant 2$ 符合题意.

若 $a>2$, 则 $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}>0$.

由 (1) 可知 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2})$ 上单调递减,

所以当 $x\in(0,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2})$ 时, $f(x)<f(0)=0$, 不符合题意.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

(3) 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0,

则 $a>2$, $x_0>0$ 且 $\mathrm{e}^{2x_0}-ax_0-1=0$, 即 $a=\dfrac{\mathrm{e}^{2x_0}-1}{x_0}$.

欲证 $x_0 < a-2$,

只需证 $x_0 < \dfrac{e^{2x_0}-1}{x_0} - 2$,

只需证 $e^{2x_0} > (x_0+1)^2$,

即证 $e^{x_0} > x_0 + 1$.

由 (2) 知, $e^{2x} - 2x - 1 > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $e^x - x - 1 > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

所以 $e^{x_0} > x_0 + 1$.

所以 $x_0 < a - 2$.

21. 对于给定的正整数 m 和实数 a, 若数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质:

① $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = a$; ②对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+m} = a_n$, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_2(1)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和;

(2) 对于给定的正奇数 t, 若数列 $\{a_n\}$ 同时具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项式;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$, 求证: 存在自然数 N, 对任意的正整数 k, 不等式 $\dfrac{a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}}{k} \geqslant \dfrac{a}{m}$ 均成立.

【参考答案】(2022 东城高三上期末 21)

(1) 依题意 $a_1 + a_2 = 1$, 且 $a_{n+2} = a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 5.

(2) 由于数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$, 其中 t 为大于零的奇数,

令 $t = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}^*$, 则有 $a_{n+2} = a_{n+2+2k-1+2k-1} = a_{n+4k} = a_n$,

所以 $a_{n+1} = a_{n+1+2k-1} = a_{n+2k} = a_n$.

综上 $\{a_n\}$ 为常数列.

又因为 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_4(4)$, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$.

所以 $a_n = 1$.

(3) 要证 $\dfrac{a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}}{k} \geqslant \dfrac{a}{m}$,

只需证 $a_{N+1} + a_{N+2} \cdots + a_{N+k} \geqslant k \cdot \dfrac{a}{m}$,

即只需证 $(a_{N+1} - \dfrac{a}{m}) + (a_{N+2} - \dfrac{a}{m}) + \cdots + (a_{N+k} - \dfrac{a}{m}) \geqslant 0$,

令数列 $b_n = a_n - \dfrac{a}{m}$, 由于数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$, 则数列 $\{b_n\}$ 具有性质 $P_m(0)$.

令 $S_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i\ (i \in \mathbf{N}^*)$,

设 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 的最小值为 $S_N\ (1 \leqslant N \leqslant m)$,

对 $k \in \mathbf{N}^*$, 令 $N + k = pm + r$, $p, r \in \mathbf{N}$, $0 < r \leqslant m$,

由于 $\{b_n\}$ 具有性质 $P_m(0)$, 所以 $S_{pm} = 0$.

所以 $S_{pm+r}=S_{pm}+b_{pm+1}+b_{pm+2}+\cdots+b_{pm+r}=b_1+b_2+\cdots+b_r=S_r\geqslant S_N$.

所以 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$ 成立.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！