首都师大附中 2020—2021 学年第一学期

高二数学期中考试（1-4）

第 I 卷（共 30 分）

一、单选题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的）

1．双曲线的方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，则其离心率为（　　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

答案：B

2．已知直线 $l_1: kx+(4-k)y+1=0$ 与 $l_2: 2kx-2y+3=0$ 平行，则 k 的值是（　　）

A．1 或 0　　B．5　　C．0 或 5　　D．1 或 5

答案：C

3．设 m, n 是两条不同的直线，α, β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是（　　）

A．若 $m \perp n$，$n // \alpha$，则 $m \perp \alpha$

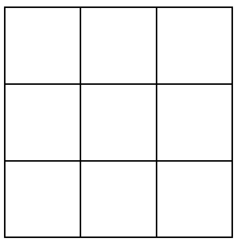
B．若 $m // \beta$，$\beta \perp \alpha$，则 $m \perp \alpha$

C．若 $m \perp \beta$，$n \perp \beta$，$n \perp \alpha$，则 $m \perp \alpha$

D．若 $m \perp n$，$n \perp \beta$，$\beta \perp \alpha$，则 $m \perp \alpha$

答案：C

4．将 6 枚相同的硬币放入如图所示的 9 个方格中，要求每个方格中至多放一枚硬币，并且每行每列都有 2 枚硬币，则放置硬币的方法共有（　　）种．



A．6

B．12

C．18

D．36

答案：A

5．圆 $E: x^2+y^2=1$ 与圆 $F: x^2+y^2-4x-4y+4=0$ 的公切线的条数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案：B

6．双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的顶点到其渐近线的距离等于（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

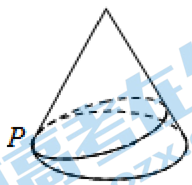
答案：C

7．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$．过点 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点．若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8，则椭圆 C 的标准方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{7}=1$　　C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

答案：C

8．如图，一竖立在水平地面上的圆锥形物体的母线长为 $4m$，底面半径为 $1m$，一只小虫从圆锥的底面圆上的点 P 出发，绕圆锥表面爬行一周后回到点 P 处，则该小虫爬行的最短路程为（　　）



A．$4\sqrt{2}m$　　B．$4m$

C．$2\sqrt{3}m$　　D．$2m$

答案：A

9．要排出高三某班一天中，语文、数学、英语各 2 节，自习课 1 节的功课表，其中上午 5 节，下午 2 节，若要求 2 节语文课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻（注意：上午第五节和下午第一节不算相邻），则不同的排法种数是（　　）

A．84　　B．54　　C．42　　D．18

答案：C

10．佩香囊是端午节传统习俗之一．香囊内通常填充一些中草药，有清香、驱虫、开窍的功效，因地方习俗的差异，香囊常用丝布做成各种不同的形状，形形色色，玲珑夺目．图 1 的▱$ABCD$ 由六个正三角形构成．将它沿虚线折起来，可得图 2 所示的六面体形状的香囊．那么在图 2 这个六面体中，棱 AB 与 CD 所在直线的位置关系为（　　）

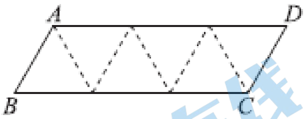


图 1

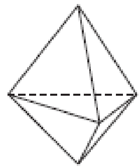


图 2

A．平行　　　　　　　　　　B．相交

C．异面且垂直　　　　　　　D．异面且不垂直

答案：B

第 II 卷（共 70 分）

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

11．在 $(\sqrt{x}+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为_________．（用数字作答）

答案：15

12． F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点， A,B,C 在抛物线上，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$_________．

答案：6

13．某种产品的加工需要 A,B,C,D,E 五道工艺，其中 A 必须在 D 的前面完成（不一定相邻），其它工艺的顺序可以改变，但不能同时进行，为了节省加工时间，B 与 C 必须相邻，那么完成加工该产品的不同工艺的排列顺序有_________种．（用数字作答）

答案：24

14．若方程 $\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$ 所表示的曲线为 C，给出下列四个命题：

① 若 C 为椭圆，则实数 t 的取值范围为 $(1,4)$；

② 若 C 为双曲线，则实数 t 的取值范围为 $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$；

③ 曲线 C 不可能是圆；

④ 若 C 表示椭圆，且长轴在 x 轴上，则实数 t 的取值范围为 $(1,\dfrac{3}{2})$．

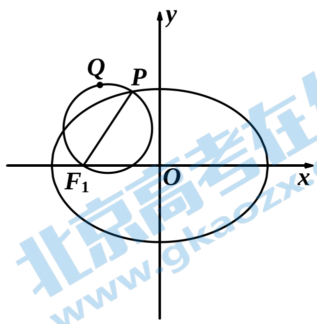
其中真命题的序号为_________.（把所有正确命题的序号都填在横线上）

答案：②

15．寒假里 5 名同学结伴乘动车外出旅游，实名制购票，每人一座，恰在同一排 A,B,C,D,E 五个座位（一排共五个座位），上车后五人在这五个座位上随意坐，则恰有一人坐对与自己车票相符座位的坐法有_________种.（用数字作答）

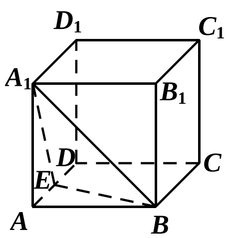
答案：45

16．设 F_1 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点，P 为椭圆 C 上给定一点，以 PF_1 为直径作圆 Γ，点 Q 为圆 Γ 上的动点，则坐标原点 O 到 Q 的距离的最大值为_________.



答案：$\sqrt{2}$

17．已知棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E 为棱 AD 中点，现有一只蚂蚁从点 B_1 出发，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上行走一周后再回到点 B_1，这只蚂蚁在行走过程中与平面 A_1BE 的距离保持不变，则这只蚂蚁行走的轨迹所围成的图形的面积为_________.



答案：$2\sqrt{6}$

18．关于曲线 $C: x^2 - xy + y^2 = 4$，给出下列四个结论：

① 曲线 C 关于原点对称，但不关于 x 轴、y 轴对称；

② 曲线 C 恰好经过 4 个整点(即横、纵坐标均为整数的点)；

③ 曲线 C 上任意一点都不在圆 $x^2 + y^2 = 3$ 的内部；

④ 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不大于 $2\sqrt{2}$．

其中，正确结论的序号是________．

答案：① ④

三、解答题（本大题共 4 小题，共 38 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

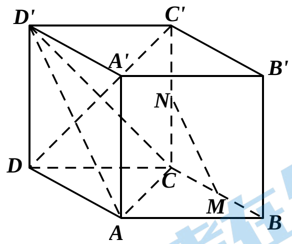
19．（本小题 9 分）

如图所示，平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AA' \perp$ 平面 $ABCD$，$AB \perp AC$，M, N 分别为 CB, CC' 的中点，$AB = AC = AA' = 1$．

（Ⅰ）求证：$MN \,//$ 平面 ACD'；

（Ⅱ）求证：$C'D \perp$ 平面 ACD'；

（Ⅲ）求点 B 到平面 ACD' 的距离．



证明：因为 $AA' \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AA' \perp AB$，$AA' \perp AC$．

因为 $AB \perp AC$，

如图建立空间直角坐标系，则

$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-1,1,0)$，

$A'(0,0,1)$，$B'(1,0,1)$，$C'(0,1,1)$，$D'(-1,1,1)$

$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$N(0,1,\frac{1}{2})$

此时 $\overrightarrow{MN} = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DC'} = (1,0,1)$，$\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$，$\overrightarrow{AC} = (0,1,0)$，$\overrightarrow{AD'} = (-1,1,1)$．

（Ⅰ）因为 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD'}$，

所以 $MN \,//\, AD'$．

因为 $MN \not\subset$ 平面 ACD'，

所以 $MN \,//$ 平面 ACD'．

（Ⅱ）因为 $\overrightarrow{DC'}\cdot\overrightarrow{AC}=0$， $\overrightarrow{DC'}\cdot\overrightarrow{AD'}=0$，

所以 $\overrightarrow{DC'}$ 是平面 ACD' 的法向量.

所以 $C'D\perp$ 平面 ACD'.

（Ⅲ）点 B 到平面 ACD' 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{DC'}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DC'}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20.（本小题 8 分）

已知点 O 为坐标原点， $A(-6,0)$，动点 P 使得 $|PO|:|PA|=1:2$.

（Ⅰ）求点 P 的轨迹方程；

（Ⅱ）设点 P 的轨迹为 Γ，过点 $Q(4,4)$ 的直线 l 与 Γ 交于两点 A、B，若 $|AB|=4\sqrt{3}$，求直线 l 的方程.

解：（Ⅰ）设点 $P(x,y)$，则

$$|PO|=\sqrt{x^2+y^2}，\ |PA|=\sqrt{(x+6)^2+y^2} .$$

由题意

$$\sqrt{(x+6)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2} .$$

整理得

$$(x-2)^2+y^2=16 .$$

即点 P 的轨迹方程为 $(x-2)^2+y^2=16$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，Γ 为以 $C(2,0)$ 为圆心，以 $r=4$ 为半径的圆，设 AB 的中点为 M，连结 CM, CA. 由垂径定理， $CM\perp AB$.

$$CM=\sqrt{r^2-AM^2}=\sqrt{16-\left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2$$

即点 $C(2,0)$ 到直线 l 的距离为 2 .

（1）当直线 l 的斜率不存在时， $l:x=4$，经检验符合题意；

（2）当直线 l 的斜率存在时，设 $l:y-4=k(x-4)$，即

$$kx-y+4-4k=0$$

所以，$\dfrac{|2k+4-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$.

解得， $k=\dfrac{3}{4}$.

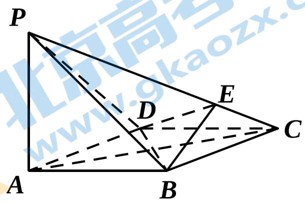
所以， $l:\dfrac{3}{4}x-y+1=0$，即 $3x-4y+4=0$.

由（1）、（2）可知，直线 l 的方程为 $x=4$ 或 $3x-4y+4=0$.

，

21．（本小题 11 分）

四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA\perp$平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle DAB=60^\circ$，$PA=AB=AD=2$，点 E 是棱 PC 上一点.



（Ⅰ）求证：平面 $PAC\perp$平面 BDE；

（Ⅱ）当 E 为 PC 中点时，求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）若直线 BE 与平面 PAC 所成的角为 45° 时，求 CE．

证明：（Ⅰ）因为平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD$，

所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

所以 $AC\perp BD$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BD$.

又因为 $PA\cap AC=A$，

所以 $BD\perp$平面 PAC .

所以平面 $PAC\perp$平面 BDE .

（Ⅱ）在平面 $ABCD$ 内，过点 A 作 $AQ\,//\,BD$，则 $AQ\perp AC$，因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AQ\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AQ$．如图建立空间直角坐标系，则

$$A(0,0,0)，\ B(1,\sqrt{3},0)，\ C(0,2\sqrt{3},0)，\ D(-1,\sqrt{3},0)，\ P(0,0,2).$$

当 E 为 PC 中点时， $E(0,\sqrt{3},1)$.

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,\sqrt{3},1)$， $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$， $\overrightarrow{BD}=(-2,0,0)$， $\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$.

设平面 ABE 的方向量为 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_1}=(x_1,y_1,z_1)$， 则

$$\begin{cases}\sqrt{3}y_1+z_1=0,\\ x_1+\sqrt{3}y_1=0.\end{cases}$$

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $y_1=-1$， $z_1=\sqrt{3}$， 所以 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_1}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$.

设平面 DBE 的方向量为 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_2}=(x_2,y_2,z_2)$， 则

$$\begin{cases}-2x_2=0,\\ -x_2+z_2=0.\end{cases}$$

则 $x_2=z_2=0$， 令 $y_2=1$， 则 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_2}=(0,1,0)$.

所以， $\cos\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle = \dfrac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{7}} = -\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

因为二面角 $A-BE-D$ 为锐二面角，得二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

（III）设 $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{CP}$ （$0 \le \lambda \le 1$），则

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{CP} = (-1, \sqrt{3}, 0) + \lambda(0, -2\sqrt{3}, 2) = (-1, \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda, 2\lambda).$$

由（Ⅰ）得，$BD \perp$ 平面 PAC. 所以，平面 PAC 的一个方向量为 $\overrightarrow{BD} = (-2, 0, 0)$，

由题意：$\left|\cos\langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE} \rangle\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\left|\dfrac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{BE}|}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即

$$\left|\frac{2}{2 \cdot \sqrt{1 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda)^2 + (2\lambda)^2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以，$1 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda)^2 + (2\lambda)^2 = 2$，即

$$16\lambda^2 - 12\lambda + 2 = 0.$$

解得 $\lambda_1 = \dfrac{1}{4}$， $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

所以 $CE = \dfrac{1}{4}CP = 1$ 或 $CE = \dfrac{1}{2}CP = 2$.

22．（本小题 10 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$（其中 $a>0$）的右焦点为 $F(1,0)$，直线 l 过点 F 与椭圆 C 交于 A, B 两点，O 为坐标原点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的长轴长和离心率；

（Ⅱ）求 $\triangle AOB$ 的面积的最大值；

（Ⅲ）若 $\triangle AOB$ 为直角三角形，求直线 l 的方程.

解：（Ⅰ）由题意，$a^2-1=1$，解得

$$a=\sqrt{2}.$$

所以，椭圆 C 的长轴长为 $2a=2\sqrt{2}$，离心率为 $e=\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $x=my+1$，联立

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ x=my+1.\end{cases}$$

整理得

$$(my+1)^2+2y^2=2,$$

即 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由 $\Delta=(2m^2)-4\cdot(m^2+2)\cdot(-1)=8m^2+8>0$，得

$$y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}，\quad y_1\cdot y_2=-\frac{1}{m^2+2}$$

所以，$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{\sqrt{8m^2+8}}{m^2+2}$.

所以，$\triangle AOB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$

令 $\sqrt{m^2+1}=t$，则 $t\in[1,+\infty)$，得 $S=\dfrac{\sqrt{2}t}{t^2+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{t+\frac{1}{t}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

当且仅当 $t=1$ 时（即 $m=0$ 时）等号成立，此时 $l:x=1$.

（III）（1）若 $\angle OAB=90°$，则 $OA\perp FA$，故 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$， $\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，则

$$x_1(x_1-1)+y_1^{\ 2}=0$$

因为 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$，故 $\frac{x_1^2}{2}-x_1(x_1-1)=1$，即 $x_1^2-2x_1+2=0$，无解.

即 $\angle OAB\neq 90°$.同理，$\angle OBA\neq 90°$.

（2）若 $\angle AOB=90°$，得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$，得

$$(my_1+1)(my_2+1)+y_1y_2=0$$

故 $(m^2+1)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=0$．故

$$-\frac{m^2+1}{m^2+2}-\frac{2m^2}{m^2+2}+1=0.$$

解得 $m^2=\frac{1}{2}$，故 $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．故 $l:x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$（即 $y=\pm\sqrt{2}x\mp\sqrt{2}$）

本试卷到此结束

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。

北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）

扫码关注获取更多