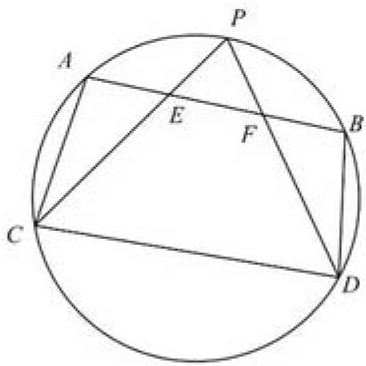
加试

一、（本题满分 40 分）如图，AB 是圆 ω 的一条弦，P 为弧 AB 内一点，E、F 为线段 AB 上两点，满足 $AE=EF=FB$，连线 PE、PF 并延长，与圆 ω 分别交于点 C、D，求证

$$EF\cdot CD=AC\cdot BD$$



证明 连接 AD，BC，CF，DE. 由于 $AE=EF=FB$，从而

$$\frac{BC\cdot\sin\angle BCE}{AC\cdot\sin\angle ACE}=\frac{\text{点}B\text{到直线}CP\text{的距离}}{\text{点}A\text{到直线}CP\text{的距离}}=\frac{BE}{AE}=2. \qquad ①$$

………………………10 分

同样

$$\frac{AD\cdot\sin\angle ADF}{BD\cdot\sin\angle BDF}=\frac{\text{点}A\text{到直线}PD\text{的距离}}{\text{点}B\text{到直线}PD\text{的距离}}=\frac{AF}{BF}=2. \qquad ②$$

另一方面，由于

$$\angle BCE=\angle BCP=\angle BDP=\angle BDF,$$
$$\angle ACE=\angle ACP=\angle ADP=\angle ADF,$$

故将①，②两式相乘可得 $\frac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}=4$，即

$$BC\cdot AD=4AC\cdot BD. \qquad ③$$

由托勒密定理

$$AD\cdot BC=AC\cdot BD+AB\cdot CD. \qquad ④$$

故由③，④得 $AB\cdot CD=3AC\cdot BD$，

即 $EF\cdot CD=AC\cdot BD$. ………………………40 分

二、（本题满分 40 分）给定正整数u,v．数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=u+v$，对整数$m\geq 1$，

$$
\begin{cases}
a_{2m}=a_m+u\\
a_{2m+1}=a_m+v
\end{cases}
$$

记$S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m\ (m=1,2,\cdots)$．证明：数列$\{S_m\}$中有无穷多项是完全平方数．

证明 对正整数n，有

$$
\begin{aligned}
S_{2^{n+1}-1}&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+\left(a_{2^{n+1}-2}+a_{2^{n+1}-1}\right)\\
&=u+v+(a_1+u+a_1+v)+(a_2+u+a_2+v)+\cdots+\left(a_{2^n-1}+u+a_{2^n-1}+v\right)\\
&=2^n(u+v)+2S_{2^n-1}.
\end{aligned}
$$

……………………10 分

所以

$$
\begin{aligned}
S_{2^n-1}&=2^{n-1}(u+v)+2S_{2^{n-1}-1}=2^{n-1}(u+v)+2\left(2^{n-2}(u+v)+2S_{2^{n-2}-1}\right)\\
&=2\cdot 2^{n-1}(u+v)+2^2S_{2^{n-2}-1}\\
&=\cdots=(n-1)\cdot 2^{n-1}(u+v)+2^{n-1}(u+v)\\
&=(u+v)n\cdot 2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

……………………20 分

设$u+v=2^k\cdot q$，其中k是非负整数，q是奇数．取$n=q\cdot l^2$，其中l为满足$l\equiv k-1 \pmod 2$的任意正整数．此时$S_{2^n-1}=q^2l^2\cdot 2^{k-1+ql^2}$，注意到$q$是奇数，故

$$k-1+q\cdot l^2\equiv k-1+l^2\equiv k-1+(k-1)^2=k(k-1)\equiv 0 \pmod 2,$$

所以，S_{2^n-1}是完全平方数．由于l有无穷多个，故数列$\{S_n\}$中有无穷多项是完全平方数．

……………………40 分

三、（本题满分 50 分）一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加，其中 $m,n\ge 2$ 为给定的整数，每道题的得分规则是：若该题恰有 x 个学生没有答对，则每个答对该题的学生得 x 分，未答对的学生得零分．每个学生的总分为其 m 道题的得分总和，将所有学生总分从高到低排列为 $p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，求 p_1+p_n 的最大可能值．

解 对任意的 $k=1,2,\cdots,m$，设第 k 题没有答对者有 x_k 人，则第 k 题答对者有 $n-x_k$ 人，由得分规则知，这 $n-x_k$ 个人在第 k 题均得到 x_k 分．设 n 个学生的得分之和为 S，则有

$$\sum_{i=1}^{n}p_i=S=\sum_{k=1}^{m}x_k(n-x_k)=n\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{k=1}^{m}x_k^2.$$

因为每一个人在第 k 道题上至多得 x_k 分，故

$$p_1\le\sum_{k=1}^{m}x_k.$$ ……………………10 分

由于 $p_2\ge\cdots\ge p_n$，故有 $p_n\le\dfrac{p_2+p_3+\cdots+p_n}{n-1}=\dfrac{S-p_1}{n-1}$．所以

$$\begin{aligned}p_1+p_n&\le p_1+\frac{S-p_1}{n-1}=\frac{n-2}{n-1}p_1+\frac{S}{n-1}\\&\le\frac{n-2}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m}x_k+\frac{1}{n-1}\cdot\left(n\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{k=1}^{m}x_k^2\right)\\&=2\sum_{k=1}^{m}x_k-\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m}x_k^2.\end{aligned}$$ ……………………20 分

由柯西不等式得

$$\sum_{k=1}^{m}x_k^2\ge\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)^2.$$

于是

$$\begin{aligned}p_1+p_n&\le 2\sum_{k=1}^{m}x_k-\frac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)^2\\&=-\frac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}x_k-m(n-1)\right)^2+m(n-1)\\&\le m(n-1).\end{aligned}$$ ……………………40 分

另一方面，若有一个学生全部答对，其他 $n-1$ 个学生全部答错，则

$$p_1+p_n=p_1=\sum_{k=1}^{m}(n-1)=m(n-1).$$

综上所述，p_1+p_n 的最大值为 $m(n-1)$． ……………………50 分

四、（本题满分 50 分）设 n,k 为大于 1 的整数，$n<2^k$．证明：存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数，若将它们任意分成两组，则总有一组有若干个数的和被 n 整除．

证明 先考虑 n 为 2 的幂的情形．

设 $n=2^r$，$r\geq 1$，则 $r<k$．取 3 个 2^{r-1} 及 $2k-3$ 个 1，显然这些数均不被 n 整除．将这 $2k$ 个数任意分成两组，则总有一组中含 2 个 2^{r-1}，它们的和为 2^r，被 n 整除． ……………………10 分

现在设 n 不是 2 的幂，取 $2k$ 个数为

$$-1,\ -1,\ -2,\ -2^2,\ \cdots,\ -2^{k-2},\ 1,\ 2,\ 2^2,\cdots,2^{k-1}.$$

因为 n 不是 2 的幂，故上述 $2k$ 个数均不被 n 整除． ……………………20 分

若可将这些数分成两组，使得每一组中任意若干个数的和均不能被 n 整除．不妨设 1 在第一组，由于 $(-1)+1=0$，被 n 整除，故两个 -1 必须在第二组；因 $(-1)+(-1)+2=0$，被 n 整除，故 2 在第一组，进而推出 -2 在第二组．

现归纳假设 $1,2,\cdots,2^l$ 均在第一组，而 $-1,-1,-2,\cdots,-2^l$ 均在第二组，这里 $1\leq l<k-2$，由于 $(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^l\right)+2^{l+1}=0$，被 n 整除，故 2^{l+1} 在第一组，从而 -2^{l+1} 在第二组．故由数学归纳法可知，$1,2,2^2,\cdots,2^{k-2}$ 在第一组，$-1,-1,-2,-2^2,\cdots,-2^{k-2}$ 在第二组．最后，由于

$$(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^{k-2}\right)+2^{k-1}=0,$$

被 n 整除，故 2^{k-1} 在第一组．因此 $1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}$ 均在第一组，由正整数的二进制表示可知，每一个不超过 2^k-1 的正整数均可表示为 $1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}$ 中若干个数的和，特别地，因为 $n\leq 2^k-1$，故第一组中有若干个数的和为 n，当然被 n 整除，矛盾！

因此，将前述 $2k$ 个整数任意分成两组，则总有一组中有若干个数之和被 n 整除． ……………………50 分