

数 学

考生注意:

- 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘在答题卡上的指定位置。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

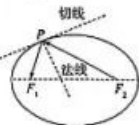
一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程是 公众号:燕公文化服务平台
A. $x = -1$ B. $x = -2$ C. $y = -1$ D. $y = -2$
- 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,若 $a_1 + a_3 = 25$,则 $a_2 =$
A. 100 B. 80 C. 50 D. 40
- 已知直线 $l_1: ax + 3y - 5 = 0$ 与 $l_2: (3a - 2)x + ay + 4 = 0$ 垂直,则 $a =$
A. 0 B. 0 或 $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. 0 或 $\frac{2}{3}$
- 一个做直线运动的质点的位移 s (m) 与时间 t (s) 的关系式为 $s = 100t - 5t^2$,则该质点的瞬时速度为 0 m/s 时, $t =$
A. 50 s B. 20 s C. 10 s D. 5 s
- 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $a_n + a_{n+1} = 2$,且 $S_{2025} = 2\,027$,则 $a_1 =$
A. 6 B. 5 C. 3 D. 1
- 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形, $AB = 2$, $\angle DAB = \frac{2\pi}{3}$,
M 为棱 PC 的中点,且 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$,则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} =$
A. 6 B. 8 C. 9 D. 10
- 曲率是数学上衡量曲线弯曲程度的重要指标,对于曲线 $y = f(x)$,其在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的曲率 $K = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + (f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数。已知抛物线

$x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点到准线的距离为 2,则该抛物线上的各点处的曲率最大值为

- A. 2 B. 1 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

8. 椭圆具有如下光学性质:从椭圆的一个焦点发出的光线,经过椭圆反射后,反射光线过椭圆的另一个焦点(如图)。已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,过点 F_2 的直线与 E 交于点 A, B ,过点 A 作 E 的切线 l ,点 B 关于 l 的对称点为 M ,若 $|AB| = \frac{8a}{5}$,



$$\frac{|BF_1|}{|MF_1|} = \frac{2}{3}, \text{ 则 } \frac{S_{\triangle MF_1F_2}}{S_{\triangle AF_1F_2}} =$$

注: S 表示面积。

- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3$, 则
A. $a_2 = 3$ B. $a_n = 2n - 1$
C. $\{a_{2n}\}$ 是等差数列 D. $\{a_n\}$ 是递增数列
10. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{6-m} = 1$, 则
A. 当 $m < 2$ 时, 曲线 C 是椭圆
B. 当 $m = 3$ 时, 曲线 C 是以直线 $y = \pm\sqrt{3}x$ 为渐近线的双曲线
C. 存在实数 m , 使得 C 过点 $(1, 1)$
D. 当 $m \in (2, 6)$ 时, 直线 $y = x$ 总与曲线 C 相交
11. 已知圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, 则
A. 圆 O_2 与 x 轴相切
B. 两圆公共弦所在直线的方程为 $x - y + 1 = 0$
C. 有且仅有一个点 P , 使得过点 P 能作两条与两圆都相切的直线
D. 两圆的公切线长为 $\sqrt{7}$
12. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别是棱 A_1D_1 和 CD 的中点, G 是棱 BB_1 上的一点, P 是正方形 ABB_1A_1 内一动点, 且点 P 到直线 A_1B_1 与直线 BC 的距离相等, 则
A. $EG \perp AF$ B. 点 D_1 到直线 AF 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. 存在点 G , 使得 $GE \parallel$ 平面 ACD_1 D. 动点 P 在一条抛物线上运动

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 曲线 $y = e^x \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 _____.

14. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 向量 $a = (1, -1, m)$, $b = (1, 3, 0)$ 分别为异面直线 l_1, l_2 的方

向向量, 若 l_1, l_2 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$, 则 $m =$ _____.

15. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle POF_2 =$

$\frac{\pi}{3}$ (O 为坐标原点), $PF_1 \perp PF_2$, 则 C 的离心率为 _____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 其前 n 项和为 S_n , 不等式 $p \leq \frac{S_n}{2} - \frac{2}{S_n} \leq q$ 对

任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 恒成立, 则 $q - p$ 的最小值为 _____.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知公比不为1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 a_2, a_3, a_1 是等差数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

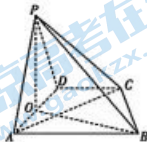
(II) 求数列 $\{4b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, O 为棱 AD 的中点, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD = AB = 2CD = 2$.

(I) 求证: $AC \perp PB$;

(II) 求直线 PC 与平面 POB 所成角的正弦值.



19. (12分)

已知圆 $C: (x-a)^2 + y^2 = (a-1)^2 (a > 0)$, 过点 $P(1, \sqrt{3})$ 作圆 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 且 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$.

(I) 求 a 的值;

(II) 过点 $D(1, 0)$ 作两条互相垂直的直线, 分别与圆 C 交于不同于点 D 的两点 M, N , 若 $|MD| \cdot |ND| = \sqrt{2}$, 求直线 MN 的方程.

20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n a_n = a_n^2 + 1$.

(I) 证明: $\{S_n^2\}$ 是等差数列;

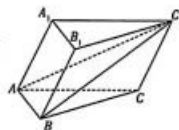
(II) 求数列 $\{2^n \cdot S_n^2\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分)

如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, $AC = 2$, 且三棱锥 C_1-ABC 的体积为 $\frac{1}{4}$.

(I) 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高;

(II) 若平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $AA_1 = 1$, $\angle A_1AC$ 为锐角, 求二面角 C_1-AB-C 的余弦值.



22. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 $A(0, 1)$, 右顶点为 B , 且直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(I) 求 C 的方程;

(II) 若直线 l 与 C 交于 P, Q 两点 (异于点 B), 且满足 $\vec{PB} \cdot \vec{QB} = 0$, 求 $\triangle PQB$ 面积的最大值.